

Optionspreiseffekte von Warrant-Emissionen im Black/Scholes-Modell

1. Einleitung

Wesentlicher Beitrag von BLACK und SCHOLES (1973) bzw. MERTON (1973) war die analytische Lösung des Optionsbewertungsproblems unter der Annahme einer geometrischen Brownschen Bewegung für den Basiswert (zum Beispiel eine Aktie). Allgemein gilt, dass unter der Annahme eines Diffusionsprozesses für den Aktienkurs in der Modellwelt die Bildung (und ständige Anpassung) eines Portefeuilles aus Basiswert und einem risikolosen Papier möglich ist, das die Auszahlung der Option perfekt repliziert. Durch die damit verbundene völlige Eliminierung des Risikos wird eine präferenzfreie Bewertung von Optionen möglich („risikoneutrales Bewertungsprinzip“).[1]

Änderungen des stochastischen Prozesses des Basiswertes ziehen Änderungen der im jeweiligen Modell errechneten Optionspreise nach sich. Die Auswirkungen der Emission von Warrants (Optionsschein) auf den Aktienkursprozess wurden jedoch in der Literatur bisher nicht ausführlich behandelt. Wir verwenden in dieser Arbeit den Terminus „Warrant“ ausschliesslich zur Bezeich-

nung von Optionen, die von einer Aktiengesellschaft emittiert werden und mit einer bedingten Kapitalerhöhung verbunden sind. Die zur Erfüllung der Ansprüche im Fall der Ausübung der Warrants erforderlichen Aktien werden also neu emittiert. Im Gegensatz dazu haben „gewöhnliche“ Optionen, die von Dritten geschrieben werden, keinen Einfluss auf die Kapitalstruktur der Gesellschaft. Die hier verwendete Methodik ist mit geringen Modifikationen auch auf Wandelanleihen anwendbar.

In dieser Arbeit analysieren wir die durch die Emission von Warrants ausgelösten Änderungen in der Verteilung des Aktienkursprozesses im BLACK/SCHOLES-Modell und zeigen anhand numerischer Beispiele, welche Auswirkungen eine solche Emission auf die Modellpreise von Optionen hat, die auf die Aktien des emittierenden Unternehmens geschrieben sind. Eine Folge der Emission von Warrants ist dabei, dass die Verwendung der BLACK/SCHOLES-Formel zur Optionsbewertung nach der Emission selbst dann, wenn die Aktie vor der Emission exakt einer geometrischen Brownschen Bewegung folgte, inkonsistent und aus theoretischer Sicht nicht korrekt ist. Aufgrund der wesentlichen Bedeutung der BLACK/SCHOLES-Formel in der Praxis schlagen wir eine einfache Korrektur des Volatilitätsinputs vor. Diese Korrektur ist für praktische Zwecke ausreichend: Ein Vergleich der so berechneten Preise mit den theoretisch korrekten (numerisch

* Die Autoren bedanken sich bei den Gutachtern Manuel Ammann und Heinz Zimmermann für wertvolle Hinweise und Anregungen. Michael Hanke, Institut für Operations Research, Wirtschaftsuniversität Wien, Augasse 2–6, A - 1090 Wien, Tel. +43 - 1 - 31336 4560, Fax +43 - 1 - 31336 708, E-mail: Michael.Hanke@wu-wien.ac.at

berechneten) Optionspreisen zeigt nur sehr geringe Abweichungen. Aus Gründen der einfachen Anwendbarkeit ist die Verwendung der BLACK/SCHOLES-Formel mit der korrigierten Volatilität in der Praxis der (theoretisch korrekten) numerischen Berechnung von Optionspreisen vorzuziehen.

Die vorliegende Arbeit ist somit im Schnittgebiet der Bereiche Unternehmensfinanzierung und Optionsbewertung angesiedelt. Unsere Ergebnisse sind für Wissenschaftler und Praktiker aus beiden Gebieten von Interesse: Im Bereich Unternehmensfinanzierung untersuchen wir, welche Folgewirkungen auf den Aktienkursprozess mit einer bestimmten Finanzierungsform – der Emission von Warrants – verbunden sind. Als neuen eigenen Beitrag beweisen wir hier, dass durch die Warrant-Emission die Volatilität des Aktienkursprozesses sinkt. Für den allgemein an der Bewertung von Optionen interessierten Leser analysieren wir als wesentlichen Schwerpunkt der Arbeit die Auswirkungen der Emission von Warrants auf die Preise von Optionen, die auf die Aktien des emittierenden Unternehmens geschrieben sind. Dabei geben wir Richtung und Ausmass der Änderungen für verschiedene realistische Parameterkonstellationen an. Zuguterletzt zeigen wir, wie die am häufigsten verwendete Bewertungsformel für Optionen im Fall der Emission von Warrants im praktischen Einsatz adaptiert werden sollte, um auch nach der Emission noch korrekte Optionspreise berechnen zu können.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: In Abschnitt 2 wird kurz auf die Bewertung von Warrants eingegangen. Dabei wird die in der Literatur gebräuchliche Erweiterung der BLACK/SCHOLES-Formel vorgestellt. In Abschnitt 3 zeigen wir, wie sich die Emission von Warrants auf die Entwicklung des Aktienkurses des emittierenden Unternehmens auswirkt. Abschnitt 4 stellt die Folgewirkungen der Änderungen des Aktienkursprozesses auf die Preise von Optionen mit Hilfe von Resultaten aus Monte-Carlo-Simulationen dar. In Abschnitt 5 schlagen wir eine Korrektur des Volatilitätsinputs der BLACK/SCHOLES-Formel vor, die sich für

die Zwecke der Optionsbewertung in der Praxis als ausreichend genau erweist. In Abschnitt 6 fassen wir unsere Ergebnisse abschliessend zusammen.

2. Die Bewertung von Warrants

Warrants sind Call-Optionen, die von einem Unternehmen verkauft („emittiert“) werden und auf die Aktien ebendieses Unternehmens geschrieben sind. Im Fall der Ausübung der Warrants werden vom Unternehmen neue Aktien emittiert, die von den Warrant-Besitzern gegen Zahlung des Ausübungspreises erworben werden können. Warrants können als eigenständige Wertpapiere begeben werden. Oft werden sie auch im Bündel mit einer Anleihe als sog. „Optionsanleihe“ emittiert.[2] Üblicherweise kann in diesem Fall das Optionsrecht in Form des Warrants von der eigentlichen Anleihe getrennt und auch isoliert an der Börse gehandelt werden.

Die technische Durchführung erfolgt über eine bedingte Kapitalerhöhung: Wenn die Warrants ausgeübt werden, wird das Grundkapital der Gesellschaft um den entsprechenden Betrag aufgestockt; im Fall der Nichtausübung unterbleibt die Kapitalerhöhung.

Da sich im Fall der Ausübung die Zahl der ausstehenden Aktien erhöht, entsteht ein *Verwässerungseffekt*, der bei der Bewertung der Warrants berücksichtigt werden muss. Standard-Bewertungsformeln für Optionen, wie zum Beispiel die bekannte BLACK/SCHOLES-Formel, müssen daher zur Bewertung von Warrants entsprechend angepasst werden.

Schon 1973 wiesen BLACK, SCHOLES und MERTON[3] in ihren bahnbrechenden Arbeiten darauf hin, dass und wie die von ihnen hergeleiteten Optionsbewertungsformeln zur Bewertung von Warrants adaptiert werden können, um den Verwässerungseffekt zu berücksichtigen. Diese Leitlinien wurden später[4] weiter konkretisiert. Es resultiert eine implizite Bewertungsgleichung, die mittels numerischer Verfahren einfach gelöst wer-

den kann. Der Wert eines Europäischen Warrants ergibt sich demnach als Lösung der Gleichung[5]

$$W = \left(\frac{N}{N/\gamma + M} \right) \left[\left(S + \frac{M}{N} W \right) \Phi(d_1) - e^{-r(T-t_0)} x \Phi(d_2) \right] \quad (1)$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S + MW/N}{x}\right) + r(T-t_0)}{\sigma\sqrt{T-t_0}} + \frac{\sigma\sqrt{T-t_0}}{2}$$

und

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t_0}.$$

Dabei bezeichnen

- W den Preis eines Warrants,
- S den Aktienkurs,
- x den Ausübungspreis,
- N die Zahl der alten Aktien,
- M die Zahl der ausgegebenen Warrants,
- γ das Bezugsverhältnis (die Zahl der Aktien, die je Warrant erworben werden können),
- r den risikolosen Zinssatz,
- t_0 den Zeitpunkt der Warrant-Emission,
- T den Verfallszeitpunkt der Warrants,
- σ die Standardabweichung der Renditen von $S + MW/N$ und
- $\Phi(\cdot)$ die kumulative Standardnormalverteilung.

Die genannte Bewertungsgleichung wurde als Erweiterung zum BLACK/SCHOLES-Modell hergeleitet. Sie basiert auf der Annahme, dass die Summe aus Aktienkurs und dem auf eine Aktie entfallenden Warrantanteil $S + MW/N$ einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt.

3. Auswirkungen der Emission von Warrants auf den Aktienkursprozess

3.1 Motivation

Wir nehmen zur Vereinfachung der Darstellung an, dass vor der Emission der Warrants nur eine einzige Kategorie von Eigenkapitaltiteln existiert (Stammaktien). Bezeichnen wir für $t < t_0$ mit V_t den Marktwert des Eigenkapitals im Zeitpunkt t , so gilt vor Emission der Warrants:

$$S_t = \frac{V_t}{N}, \quad (2)$$

und der Aktienkurs S_t folgt dem gleichen Prozess wie V_t (skaliert um die Zahl der Aktien N).

Bei der Erweiterung des BLACK/SCHOLES-Modells zur Bewertung von Warrants wird implizit unterstellt, dass die Emission der Warrants keine Auswirkungen auf die weitere Entwicklung des Marktwertes des Eigenkapitals hat[6] (abgesehen vom Sprung im Emissionszeitpunkt t_0 um den Emissionserlös MW). Es wird also hinsichtlich des Emissionserlöses angenommen, dass er in Projekte investiert wird, deren Renditeverteilung der bisherigen Verteilung der Eigenkapitalrenditen entspricht.[7] Nach der Emission existieren jedoch zwei Arten von Eigenkapitaltiteln: Aktien und Warrants. Somit folgt annahmegemäss die Summe der Werte aller Aktien und aller Warrants einer geometrischen Brownschen Bewegung. Der auf eine Aktie entfallende Eigenkapitalanteil beträgt (vgl. (2)) V_t/N . Aus dem Warrantverkauf erlöst das Unternehmen insgesamt MW , davon entfallen auf eine Aktie MW/N , die gemäss obiger Annahme reinvestiert werden. Der durch die Warrants repräsentierte bedingte Anspruch an das Eigenkapital hat zu einem beliebigen Zeitpunkt t (nach der Emission, aber vor dem Verfallstag) einen Gesamtwert von MW_t ; auf eine Aktie entfallen daher MW_t/N . Der Aktienkurs nach Emission, jedoch vor Ausübung der Warrants ergibt sich demnach zu[8]

$$S_t = \left(1 + \frac{MW}{V_{t_0}}\right) \frac{V_t}{N} - \frac{MW_t}{N}. \quad (3)$$

Im Zeitraum zwischen Warrant-Emission und Verfallstag ist es also die Summe aus einer Aktie und dem „auf eine Aktie entfallenden Warrantteil“, die als geometrische Brownsche Bewegung modelliert wird. Aus diesem Grund wird in der Literatur σ in der impliziten Bewertungsgleichung (1) auch als „Standardabweichung der Renditen von $S + MW/N$ “ definiert (und nicht, wie sonst in der Optionsbewertung nach BLACK/SCHOLES üblich, als Standardabweichung der Renditen von S).

Damit stellt sich die Frage, wie der stochastische Prozess von S_t nach Emission der Warrants aussieht, wenn S_t vor der Emission einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt. Diese Frage ist nicht nur von „akademischem Interesse“, sondern – wie in der Einleitung bereits angedeutet – von grosser Bedeutung für die Bewertung von („gewöhnlichen“) Optionen, die auf den Aktienkurs S_t geschrieben sind.

3.2 Darstellung des veränderten Aktienkursprozesses

Mit den Änderungen im Aktienkursprozess nach einer Warrant-Emission haben sich bereits SCHULZ und TRAUTMANN (1994) beschäftigt. Wir präsentieren die Herleitung des veränderten Aktienkursprozesses zum einen aus Gründen des Zusammenhangs in der Arbeit, zum andern, weil wir als neuen Beitrag beweisen, dass die Volatilität des Aktienkursprozesses durch eine Warrant-Emission sinkt. Dieses Resultat ist von Bedeutung für die nachfolgende Analyse der Preisänderungen von Optionen, die auf die Aktien des emittierenden Unternehmens geschrieben sind. SCHULZ und TRAUTMANN (1994) stellen diese Behauptung ebenfalls auf (S. 849), allerdings ohne Beweis. Sie argumentieren in diesem Punkt nur auf Basis einer graphischen Darstellung.

Wir nehmen an, dass das Unternehmen zum Zeitpunkt t_0 M Europäische Warrants mit Ausübungspreis x und Verfallstag T emittiert und zu einem Preis von $W_{t_0} =: W$ je Warrant verkauft. Zur Vereinfachung der Notation nehmen wir an, dass jeder Warrant zum Bezug genau einer Aktie berechtigt ($\gamma = 1$). Der Aktienkursprozess ergibt sich somit zu

$$S_T = \begin{cases} \frac{V_t}{N} & \text{für } t_0 \leq t \leq T, \\ \left(1 + \frac{MW}{V_{t_0}}\right) \frac{V_t}{N} - \frac{MW_t}{N} & \text{für } t > T, \\ \left(1 + \frac{MW}{V_{t_0}}\right) \frac{V_t}{N} - \frac{M}{M+N} \times \left(1 + \frac{MW}{V_{t_0}} - \frac{xN}{V_T}\right) \frac{V_t}{N} I_{\{(1 + \frac{MW}{V_{t_0}}) V_T \geq Nx\}} & \text{für } t > T, \end{cases} \quad (4)$$

wobei $I_{(\cdot)}$ die Indikatorfunktion bezeichnet.[9] Dies erklärt sich folgendermassen: Die erste Zeile beschreibt den Aktienkurs vor Emission der Warrants (vgl. (2)). Im Zeitpunkt t_0 erhält das Unternehmen den Verkaufserlös W und investiert ihn wie in Abschnitt 3.1 beschrieben: Dies wird durch den ersten Term in der zweiten Zeile von (4) ausgedrückt. Gleichzeitig geht das Unternehmen eine Eventualverbindlichkeit in Höhe des Wertes des Warrants ein (dargestellt durch den zweiten Term in der zweiten Zeile von (4)).

Vor Erläuterung der dritten Zeile in (4) ist kurz auf den Wert der Warrants am Verfallstag einzugehen: Im Fall der Ausübung erhalten die Warrantbesitzer (als Gruppe betrachtet) einen Anteil am Marktwert des Eigenkapitals des Unternehmens in Höhe von [10] $M/(M+N)$ gegen Zahlung des Ausübungspreises von insgesamt Mx . Der Marktwert des Eigenkapitals besteht dabei aus dem Marktwert des Eigenkapitals unmittelbar vor Ausübung der Warrants zuzüglich dem bezahlten (Gesamt-)Ausübungspreis:

$$MW_T = \left(\left(\left(1 + \frac{MW_{t_0}}{V_{t_0}} \right) V_T + Mx \right) \frac{M}{M+N} - Mx \right)_+,$$

$$W_T = \frac{1}{M+N} \left(\left(1 + \frac{MW_{t_0}}{V_{t_0}} \right) V_T - Nx \right)_+,$$

wobei $(\cdot)_+ := \max(\cdot, 0)$.

Im Zeitpunkt T werden die Warrants genau dann ausgeübt, wenn dies für die Warrantbesitzer vorteilhaft ist (dargestellt durch die Indikatorfunktion in der dritten Zeile von (4)).

Die Dynamik der relativen Änderungen des Marktwertes des Eigenkapitals V_t wird als gegeben und von Finanzierungsmassnahmen unabhängig angenommen. Die Warrant-Emission bewirkt in unserem Modell nur eine Änderung des Prozessniveaus von V_t . Bei der Herleitung des veränderten Aktienkursprozesses nach Emission der Warrants gehen wir davon aus, dass der Marktwert des Eigenkapitals, und damit auch der Aktienkurs vor Emission, einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt. Formal:

$$d\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t dB_t \quad (\text{unter } Q),$$

mit

\tilde{S}_t diskontierter Aktienkurs,

Q äquivalentes Martingalmass (risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmass), und

(B_t) Brownsche Bewegung unter Q.

Da hier der veränderte Aktienkursprozess nach Emission in erster Linie zur Untersuchung der nachfolgenden Änderungen von Optionspreisen interessiert, ist die exakte Herleitung des veränderten Prozesses mitsamt den technischen Details im Anhang A1 wiedergegeben. Bezeichnen wir $1 + MW_{t_0}/V_{t_0}$ mit α , so erhalten wir für den Prozess nach dem Emissionszeitpunkt:

$$d\tilde{S}_t = G_t dB_t,$$

mit

$$G_t = \begin{cases} \alpha\sigma\tilde{Y}_t \left(1 - \frac{M}{M+N} \Phi(d_1) \right) & \text{für } t_0 \leq t \leq T \\ \sigma\tilde{Y}_t \left(\alpha - \frac{M}{M+N} \left(\alpha - \frac{xN}{V_T} \right) I_{\{\alpha V_T > Nx\}} \right) & \text{für } t > T, \end{cases} \quad (5)$$

wobei

$$\tilde{Y}_t = \frac{\tilde{V}_t}{N},$$

$$d_1 = \frac{\ln \left(\frac{V_t (1 + MW_{t_0}/V_{t_0})}{Nx} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t_0)}{\sigma\sqrt{T - t_0}}. \quad (6)$$

Es ändert sich, wie aus (5) ersichtlich, die *Struktur* des Prozesses (dessen Verteilung), insbesondere wird die Volatilität zeitabhängig. Der Aktienkursprozess nach der Warrant-Emission folgt somit im Modell keiner geometrischen Brownschen Bewegung mehr, die Renditeverteilung ist nicht mehr lognormal.

Im Anhang A2 beweisen wir, dass die Volatilität des Aktienkursprozesses durch eine Warrant-Emission sinkt (wie von SCHULZ und TRAUTMANN (1994) beobachtet, aber nicht bewiesen wurde).

4. Folgewirkungen des veränderten Prozesses auf die Preise von Optionen

Die beschriebene (und in Anhang A2 bewiesene) Reduktion der Volatilität des Aktienkursprozesses führt gemeinsam mit Resultaten von HOBSON (1998) zu der allgemeinen Aussage, dass die Preise von Optionen mit konvexen Auszahlungsfunktionen durch eine Warrant-Emission sinken. Das Ausmass dieser Reduktion soll in der Folge anhand von Beispielen untersucht werden.

Die beschriebene Änderung des stochastischen Prozesses hat zur Folge, dass das Optionsbewer-

tungsproblem für den neuen, geänderten Aktienkursprozess nicht mehr analytisch gelöst werden kann. Wie im vorigen Abschnitt bereits erwähnt, ändert sich durch die Warrant-Emission die Verteilung des Prozesses. Die Konsequenz daraus ist, dass (aus theoretischer Sicht) die BLACK/SCHOLES-Formel nicht mehr zur Optionsbewertung verwendet werden kann, weil der neue Prozess keiner geometrischen Brownschen Bewegung mehr entspricht. Optionspreise müssen somit unter Zuhilfenahme numerischer Verfahren ermittelt werden. Wir verwenden die Monte-Carlo-Simulation, um die Entwicklung des Aktienkurses unter dem äquivalenten Martingalmass zu simulieren und aus der simulierten Randverteilung des Prozesses im Verfallszeitpunkt der Optionen den Optionspreis numerisch zu errechnen.

Wir untersuchen die durch die Emission von Warrants induzierte (Modell-)Preisänderung einer Europäischen Call-Option. Aufgrund der gezeigten Reduktion der Volatilität erwarten wir für Optionen mit konvexer Auszahlungsfunktion eine Verminderung der Optionspreise.

Für jeden berechneten Optionspreis werden 1 Million Aktienkurspfade simuliert. Die genaue Vorgangsweise bei der Simulation ist in Anhang A3 dargestellt. Da Warrants typischerweise Laufzeiten in der Grössenordnung von Jahren, Optionen dagegen üblicherweise Laufzeiten von Wochen bis Monaten haben, verwenden wir folgende Ausgangsgrössen für die Simulation (das Superskript C bezeichnet die entsprechenden Parameter der Call-Option): $S_{t_0} = 100$, $t_0 = t_0^C = 0$, $T = 156$ (Wochen), $T^C = 8$, $x = 125$, $x^C = 100$ (die Option ist also ursprünglich im Geld), $\sigma = 0.4$, $M/N = 0.2$, $r = 0.03$.

Unmittelbar vor der Warrant-Emission errechnet sich der Optionspreis mit Hilfe der (zu diesem Zeitpunkt aus theoretischer Sicht korrekten) BLACK/SCHOLES-Formel zu 6.471. Da sich der Kurs der Aktie im Emissionszeitpunkt modellgemäss nicht ändert (vgl. (4), die Warrant-Käufer bezahlen ja den fairen Preis für die Warrants), ändert sich auch der Optionspreis nach Emission nicht, wenn man die Auswirkungen der

Warrant-Emission auf den Aktienkursprozess ignoriert.

Wenn man hingegen die Auswirkungen der Emission auf den weiteren Aktienkursverlauf berücksichtigt, errechnet sich mittels Monte-Carlo-Simulation ein geänderter Optionspreis unmittelbar nach der Warrant-Emission von 6.098 (das ist eine Reduktion um etwa 5.8%). Das bedeutet, dass sich durch die Warrant-Emission, die eine diskretionäre Massnahme des Unternehmens darstellt, die Preise von (börsgehandelten) Optionen ändern. Die Emission führt damit zu einer Verschiebung von Vermögen zwischen Schreibern und Käufern dieser Optionen. Während natürlich jede betriebswirtschaftliche Entscheidung eines Unternehmens potentiell die zukünftige Aktienkursentwicklung beeinflusst, liegt die Besonderheit einer Warrant-Emission darin, dass hier alle relevanten Einflussfaktoren (Volumen der Emission, Ausübungspreis,...) im vorhinein bekannt sind, und damit die Auswirkungen (im Modell) exakt beschrieben werden können.

Um qualitative Einsichten in die Abhängigkeit der Änderungen der Optionspreise von wesentlichen Ausgangsparametern zu erhalten, variieren wir jeweils zwei der Parameter unter Konstanthaltung der übrigen. Wir beginnen mit der Variation von M/N (dem Verhältnis der Zahl der unter der bedingten Kapitalerhöhung neu emittierten Aktien zur Zahl der alten Aktien)[11] und T (der Laufzeit der Warrants). Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 dargestellt. Referenzpreis ist dabei der oben angegebene, die Auswirkungen der Warrant-Emission ignorierende BLACK/SCHOLES-Preis von 6.471.

Tabelle 1 zeigt, dass für alle untersuchten Parameterkonstellationen der Call-Preis sinkt. Das Ausmass der (relativen) Preisreduktion nimmt dabei mit steigendem Volumen der Emission zu: Je mehr Warrants emittiert werden, umso stärker die Preisreduktion. In der Restlaufzeitdimension ist der Effekt jedoch nicht monoton: Bei einer Restlaufzeit der Warrants von drei Jahren (156 Wochen) zeigt sich eine stärkere Reduktion in den Optionspreisen als bei einer Restlaufzeit von fünf

Tabelle 1: Callpreise nach Warrant-Emission in % des Callpreises vor Warrant-Emission

$S_{t_0} = 100$, $t_0 = t_0^C = 0$, $T^C = 8$ (Wochen),
 $x = 125$, $x^C = 100$, $\sigma = 0.4$, $r = 0.03$

M/N	T		
	52	156	260
0.1	97.3	97.0	97.1
0.2	94.9	94.2	94.5
0.3	92.7	91.8	92.1

Jahren, wo der Effekt wiederum stärker ist als bei einer Restlaufzeit von einem Jahr.

Als nächstes variieren wir (relativ zur Ausgangskonstellation) die Parameter x^C (den Ausübungspreis der Call-Option) und T^C (die Restlaufzeit der Call-Option). Die Ergebnisse der Simulationen sind in Tabelle 2 dargestellt. Da hier Ausübungspreis und Restlaufzeit der untersuchten Optionen variiert werden, ergibt sich (im Gegensatz zu Tabelle 1) für jede Parameterkonstellation ein anderer Referenzpreis (BLACK/SCHOLES-Preis bei Nichtberücksichtigung der Warrant-Emission).

Aus Tabelle 2 ist ersichtlich, dass die Reduktion (relativ betrachtet) für Optionen aus dem Geld

($x^C = 110$ bzw. $x^C = 120$) am höchsten ist, während sich die Preise von Optionen im Geld deutlich geringfügiger ändern. In der Restlaufzeitdimension ist das Ausmass der Reduktion uneinheitlich. Beachtlich ist insbesondere das Ausmass der Auswirkungen auf at-the-money- (ca. 6% Preisreduktion) und out-of-the-money-Optionen (10%–30% Preisreduktion). Diese Grössenordnungen zeigen, dass die Berücksichtigung der hier analysierten Effekte nicht nur von akademischem Interesse ist: Fehlbewertungen in dieser Höhe werden aus praktischer Sicht wohl nicht mehr als vernachlässigbar angesehen werden können.

Insgesamt zeigt sich, dass die Emission von Warrants im BLACK/SCHOLES-Modell für realistische Parameterkonstellationen deutliche Auswirkungen auf die Preise von Optionen hat, die auf die Aktien des emittierenden Unternehmens geschrieben sind. Für praktische Bewertungszwecke stellt sich nun die Frage, ob die BLACK/SCHOLES-Formel entsprechend adaptierbar ist, sodass sie – obwohl aus theoretischer Sicht nicht korrekt – auch nach der Warrant-Emission noch zur Optionsbewertung in der Praxis taugt. Dies ist insbesondere deshalb von grosser Bedeutung, weil die numerische Berechnung von Optionspreisen via Monte-Carlo-Simulation mit erheblichem Rechenaufwand verbunden ist.

Tabelle 2: Callpreise nach Warrant-Emission in % des Callpreises vor Warrant-Emission

$S_{t_0} = 100$, $t_0 = t_0^C = 0$, $T = 156$ (Wochen), $x = 125$, $\sigma = 0.4$, $M/N = 0.2$, $r = 0.03$

x^C	T^C				
	4	8	12	24	48
80	99.9	99.5	99.2	98.5	98.0
90	98.6	97.8	97.4	96.9	96.5
100	94.2	94.2	94.3	94.4	94.7
110	85.4	88.5	89.8	91.2	92.4
120	71.4	80.3	83.4	87.3	89.9

5. Praktische Verwendbarkeit der BLACK/SCHOLES-Formel unter Berücksichtigung einer Volatilitätskorrektur

Aus theoretischer Sicht ist die Verwendung der BLACK/SCHOLES-Formel zur Optionsbewertung nach einer Warrant-Emission nicht mehr gerechtfertigt, weil die Annahmen, dass der Aktienkurs sowohl vor als auch nach der Emission einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt, (*ceteris paribus*) inkonsistent sind. Falls jedoch die Auswirkungen der Volatilitätsänderung auf die Optionspreise viel stärker sind als die Änderung in der Prozessstruktur (der „Form“ der Verteilung), ist diese Annahme für praktische Zwecke unter Umständen zu rechtfertigen. Zu untersuchen ist also, wie stark die „korrekten“ (simulierten) Optionspreise von Vergleichspreisen abweichen, die unter der Annahme einer geometrischen Brownschen Bewegung für den Aktienkurs mit einer modifizierten Volatilität errechnet werden.

Wesentlich ist die Abgrenzung der folgenden Untersuchung von jener, die SCHULZ und TRAUTMANN (1994), S. 850 ff. durchführen. Sie analysieren, wie gross der Fehler ist, der bei der Bewertung von *Warrants* unter Vernachlässigung des Verwässerungseffekts entsteht, also bei der Verwendung der BLACK/SCHOLES-Formel (*ohne Volatilitätskorrektur!*) zur Berechnung von *Warrant-Preisen*. Hier wird dagegen jener Fehler untersucht, der bei der Bewertung von „gewöhnlichen Optionen“ bei teilweiser Vernachlässigung der Auswirkungen einer Warrant-Emission auf den Aktienkursprozess entsteht, also bei der Verwendung der BLACK/SCHOLES-Formel *unter Berücksichtigung einer Volatilitätskorrektur* zur Berechnung von *Optionspreisen*. Vernachlässigt werden dabei zwei Aspekte: Zum einen die Zeitabhängigkeit der Volatilität nach einer Warrant-Emission, zum andern Auswirkungen auf höhere Momente der Renditeverteilung (Schiefe, Kurtosis).

Als korrigierte Volatilität $\hat{\sigma}$ verwenden wir nahe-
liegenderweise (vgl. (5))

$$\hat{\sigma} = \alpha\sigma \left(1 - \frac{M}{M+N} \Phi(d_1) \right), \quad (7)$$

mit d_1 wie in (6) definiert. Bei dieser Vorgangsweise unterstellt man, dass der Aktienkurs nicht dem in (5) beschriebenen Prozess folgt, sondern einer geometrischen Brownschen Bewegung mit (konstanter!) Volatilität $\hat{\sigma}$:

$$d\tilde{S}_t = \hat{\sigma}\tilde{S}_t dB_t \quad (\text{unter } Q).$$

Für unsere Ausgangsparameterkonstellation ergibt sich ein „korrigierter BLACK/SCHOLES-Preis“ von 6.097. Verglichen mit dem numerisch errechneten Preis unter Zugrundelegung des korrekten Prozesses aus (5) in Höhe von 6.098 ist die Abweichung aus praktischer Sicht vernachlässigbar, zumal ein wesentlicher Parameter der BLACK/SCHOLES-Formel, die Volatilität, nicht beobachtbar ist und in der Praxis ohnehin geschätzt werden muss.

Eine Variation der Ausgangsparameter wie im vorangegangenen Abschnitt zeigt, dass die Abweichungen zwischen den simulierten Preisen und den mittels BLACK/SCHOLES-Formel und modifizierter Volatilität $\hat{\sigma}$ errechneten Preisen in allen untersuchten Fällen minimal sind, wobei die Abweichungen für längere Optionsrestlaufzeiten und höhere Ausübungspreise tendenziell höher sind. Die Differenz ist aber durchwegs in der Größenordnung von 0.01 und damit in der Praxis unbedeutend, weil jedenfalls kleiner als der bid-ask spread. Darüberhinaus ist zu berücksichtigen, dass die simulierten Preise ja selbst wieder Schätzwerte darstellen, die einer Verteilung mit einer strikt positiven – wenn auch durch die hohe Zahl an simulierten Pfaden und die Verwendung leistungsfähiger Varianzreduktionstechniken (vgl. Anhang A3) sehr geringen – Varianz unterliegen.

Zur Bewertung von Optionen in der Praxis ist demnach, falls die Annahme einer geometrischen Brownschen Bewegung für den Aktienkurs *vor* der Emission von Warrants vertretbar war, die Verwendung der BLACK/SCHOLES-Formel zur

Bewertung von Optionen auf Aktien des emittierenden Unternehmens auch *nach* der Emission von Warrants gerechtfertigt, wenn die in (7) vorgeschlagene Volatilitätskorrektur vorgenommen wird. Offensichtlich spielen die dabei vernachlässigten Aspekte (nichtkonstante Volatilität bzw. Folgewirkungen auf höhere Momente der Renditeverteilung) für praktische Bewertungszwecke nur eine unbedeutende Rolle.

6. Schlussfolgerungen und Ausblick

Aus den Ergebnissen der vorangegangenen Abschnitte lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

- Die Emission von Warrants hat Auswirkungen auf die zukünftige Aktienkursentwicklung, die sich in Aktienkursmodellen berücksichtigen lassen.
- Optionsbewertungsmodelle, die auf diesen Aktienkursmodellen basieren (zum Beispiel das BLACK/SCHOLES-Modell, das auf der Annahme einer geometrischen Brownschen Bewegung beruht), müssen aus theoretischer Sicht in solchen Fällen entsprechend adaptiert werden, um diese Änderungen in der Aktienkursentwicklung zu berücksichtigen.
- Die Preise von Optionen auf Aktien des emittierenden Unternehmens ändern sich durch die Emission. Dies ist eine Folge aus zwei Effekten: Sowohl die (Form der) Verteilung des Aktienkursprozesses, als auch die Standardabweichung ändert sich.
- Aus praktischer Sicht ist die BLACK/SCHOLES-Formel auch nach der Emission von Warrants noch hinreichend genau, wenn die Auswirkungen der Emission auf die Volatilität der Aktienrenditen entsprechend berücksichtigt werden. Das bedeutet, dass die Änderung der Form der Verteilung gegenüber der Änderung der Volatilität nur von sehr geringer Bedeutung ist.

Basierend auf den hier präsentierten theoretischen Resultaten werden wir in kommenden For-

schungsarbeiten anhand von Kapitalmarktdaten untersuchen, ob und inwieweit die beschriebenen Effekte von den Marktteilnehmern in der Vergangenheit schon berücksichtigt wurden.

Anhang

A1: Herleitung des geänderten Aktienkursprozesses nach der Warrant-Emission

Sei (Ω, \mathcal{F}, Q) ein Wahrscheinlichkeitsraum, (B_t) eine Brownsche Bewegung unter Q , (F_t) deren natürliche Filtration und (V_t) eine geometrische Brownsche Bewegung. Wir bezeichnen V_t/N fortan mit Y_t . Der diskontierte Prozess (\tilde{Y}_t) erfüllt

$$d\tilde{Y}_t = \sigma \tilde{Y}_t dB_t \text{ unter } Q.$$

Es sei weiters

$$d\tilde{C}_t^x = \sigma \Phi_t^x(d_1) \tilde{Y}_t dB_t \text{ unter } Q$$

mit

$$\tilde{C}_t^x = \tilde{C}_t(Y_t, x, T), \tag{8}$$

wobei $\tilde{C}_t(\cdot)$ den diskontierten Wert einer Call-Option bezeichnet und $\Phi(d_1)$ das Delta dieser Option aus der BLACK/SCHOLES-Formel darstellt.

(1) lässt sich kurz als

$$W = \frac{N}{N+M} C_{t_0} \left(Y_{t_0} + \frac{M}{N} W, x, T \right) \tag{9}$$

schreiben.[12] Herausheben des Faktors $(1 + MW / V_{t_0})$ führt zu

$$W = \frac{N}{N+M} \left(1 + \frac{MW}{V_{t_0}} \right) C_{t_0} \left(Y_{t_0}, \frac{x}{1 + MW/V_{t_0}}, T \right)$$

(da $Y_t = \frac{V_t}{N}$).

Der Wert eines Warrants zu einem beliebigen Zeitpunkt nach der Emission, W_t , beträgt dann unter Verwendung der Notation aus (8)

$$\tilde{W}_t = \frac{N}{N+M} \left(1 + \frac{MW}{V_{t_0}} \right) \tilde{C}_t^{\frac{x}{1 + MW/V_{t_0}}}$$

Wir bezeichnen $(1 + MW/V_{t_0})$ mit α . Einsetzen in (4) liefert

$$d\tilde{S}_t = \begin{cases} \sigma \tilde{Y}_t dB_t & \text{für } t < t_0, \\ \alpha \sigma \tilde{Y}_t \left(1 - \frac{M}{M+N} \Phi_t^x(d_1) \right) dB_t & \text{für } t_0 \leq t \leq T, \\ \sigma \tilde{Y}_t \left(\alpha - \frac{M}{M+N} \left(\alpha - \frac{xN}{V_t} \right) I_{(\alpha V_t > N x)} \right) dB_t & \text{für } t > T. \end{cases} \tag{10}$$

Der beobachtbare Aktienkursprozess (S_t) hängt also vom (nach der Warrant-Emission) nicht mehr beobachtbaren Prozess $(Y_t) = (V_t)/N$ ab. (5) ist eine äquivalente Darstellung von (10).

A2: Volatilität des Aktienkursprozesses sinkt durch Warrant-Emission: Beweis

$Y_t = V_t/N$ folgt annahmegemäss einer geometrischen Brownschen Bewegung:

$$d\tilde{Y}_t = \sigma \tilde{Y}_t dB_t \text{ unter } Q. \tag{11}$$

Vor der Warrant-Emission entspricht dieser Prozess auch dem Aktienkursprozess; die Volatilität des Aktienkursprozesses ist für $t < t_0$ demnach σ . Zu zeigen ist, dass die Volatilität *nach* der Warrant-Emission sinkt.

Wir bezeichnen mit $C_t^x(Y_t)$ den BLACK/SCHOLES-Wert einer Europäischen Call-Option mit Ausübungspreis x und Basiswert Y zum Zeitpunkt t (der Verfallszeitpunkt der Option ist T).

Nach der Warrant-Emission (aber vor Ausübung der Warrants) ergibt sich der Aktienkurs zu (vgl. (4) in Verbindung mit (9))

$$\tilde{S}_t = \alpha \tilde{Y}_t - \frac{M}{M+N} \tilde{C}_t^{\chi/\alpha}(\alpha Y_t), \quad (12)$$

wobei die Gleichung $C_t^x(Y_t + MW/N) = C_t^{\chi/\alpha}(\alpha Y_t)$ verwendet wurde, deren Gültigkeit durch Einsetzen leicht überprüfbar ist. Aus (11) und (12) ergibt sich durch Anwendung von Ito's Lemma

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= \alpha \sigma \tilde{Y}_t dB_t - \frac{M}{M+N} \frac{\partial C_t^{\chi/\alpha}}{\partial Y}(\alpha Y_t) \alpha \sigma \tilde{Y}_t dB_t \\ &= \alpha \sigma \tilde{Y}_t \left(1 - \frac{M}{M+N} \frac{\partial C_t^{\chi/\alpha}}{\partial Y}(\alpha Y_t) \right) dB_t \end{aligned}$$

$d\tilde{S}_t$ lässt sich also in der Form $d\tilde{S}_t = G_t dB_t$ darstellen mit

$$\frac{G_t}{\tilde{S}_t} = \frac{\alpha \sigma \tilde{Y}_t}{\tilde{S}_t} \left(1 - \frac{M}{M+N} \frac{\partial C_t^{\chi/\alpha}}{\partial Y}(\alpha Y_t) \right). \quad (13)$$

Zu zeigen ist demnach: $G_t/\tilde{S}_t \leq \sigma$.

Dazu benötigen wir folgende Ungleichung:

$$\alpha Y_t \frac{\partial C_t^{\chi/\alpha}}{\partial Y}(\alpha Y_t) \geq C_t^{\chi/\alpha}(\alpha Y_t) \quad (14)$$

bzw. in diskontierter Form

$$\alpha \tilde{Y}_t \frac{\partial C_t^{\chi/\alpha}}{\partial Y}(\alpha Y_t) \geq \tilde{C}_t^{\chi/\alpha}(\alpha Y_t). \quad (15)$$

(14) begründet sich folgendermassen: Die BLACK/SCHOLES-Formel zur Bewertung einer Europäischen Call-Option lässt sich kurz als

$$C = S\Phi(d_1) - e^{-r(T-t_0)} x\Phi(d_2) \quad (16)$$

darstellen. Betrachten wir nun eine Call-Option auf das Underlying αY_t mit Ausübungspreis x/α :

Der linke Teil der Ungleichung (14) entspricht dem $S\Phi(d_1)$ in (16), der rechte Teil dem Gesamtwert der Option. Die Gültigkeit von (14) folgt nun unmittelbar aus $e^{-r(T-t_0)} x\Phi(d_2) \geq 0$ in (16).

Unter Verwendung von (15) und (12) ergibt sich aus (13)

$$\begin{aligned} \frac{G_t}{\tilde{S}_t} &= \frac{\sigma}{\tilde{S}_t} \left(\alpha \tilde{Y}_t - \frac{M}{M+N} \alpha \tilde{Y}_t \frac{\partial C_t^{\chi/\alpha}}{\partial Y}(\alpha Y_t) \right) \\ &\leq \sigma \left(\frac{\alpha \tilde{Y}_t - \frac{M}{M+N} \tilde{C}_t^{\chi/\alpha}(\alpha Y_t)}{\tilde{S}_t} \right) = \sigma. \end{aligned}$$

A3: Technische Details der Monte-Carlo-Simulation

Unter Verwendung der jeweiligen Ausgangsparameter (vgl. Abschnitt 4) werden zur Berechnung jedes Optionspreises eine Million Aktienkurspfade unter dem äquivalenten Martingalmass Q simuliert. Dabei wird folgendermassen vorgegangen:

Die Simulation startet in $u = 0 = t_0 = t_0^C$. Zuerst werden die Pfade für den Marktwert des Eigenkapitals (V_u) ohne Berücksichtigung der Warrant-Emission simuliert (u wird dabei als (diskreter) Zeitindex verwendet). Die dazu benötigten Renditen ergeben sich zu

$$y_{u,i} = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma z_{u,i} \sqrt{\Delta t}.$$

Δt bezeichnet dabei die Länge der Zeitintervalle $[u, u + 1]$ (für diese Arbeit wurde eine Intervalllänge von einer Woche zugrundegelegt). Die $z_{u,i}$ sind dabei standardnormalverteilte Zufallszahlen, und i ist der Index für die Pfade ($1 \leq i \leq n$, $n = 10^6$). Die Verteilung der Marktwerte des Eigenkapitals (unter Q) zum Zeitpunkt $u + 1$ ergibt sich dann zu

$$V_{u+1,i} = V_u e^{y_{u,i}} \quad \forall i. \quad (17)$$

Dieser Vorgang wird für die Zeitpunkte $1 \leq u \leq T^C$ wiederholt. Division von (17) durch N liefert die simulierten Aktienkurse (ohne Berücksichtigung der Warrant-Emission) zum Zeitpunkt $u + 1$.

Die Aktienkurse unter Berücksichtigung der Warrant-Emission werden aus den in (17) simulierten Werten unter Verwendung von (5) berechnet. Der dazu benötigte Warrant-Preis W wird aus (1) errechnet. Aus den so ermittelten simulierten Aktienkursen $S_{T^C,i}$ werden die entsprechenden Call-Preise am Verfallstag (pfadweise) wie folgt ermittelt:

$$C_i = (S_{T^C,i} - x)_+ \quad (18)$$

Der simulierte Callpreis ergibt sich als diskontierter Durchschnitt über alle Pfade:

$$C = e^{-rT^C} \frac{\sum_{i=1}^n C_i}{n}$$

Zur Reduktion der Varianz der simulierten Optionspreise werden drei Methoden verwendet[13]: die Antithetische Simulationstechnik, die Control-Variate-Methode und die „Empirische Martingalsimulation“[14]. Bei der Antithetischen Simulationstechnik werden für jeden Satz der Zufallszahlen $z_{u,i}$ zwei Preise ermittelt: Der erste beruht auf $z_{u,i}$, $i = 1, \dots, n/2$ und der zweite auf $-z_{u,i}$, $i = 1, \dots, n/2$. Als Callpreis wird der Durchschnitt der beiden Werte definiert.

Die „Empirische Martingalsimulation“ (EMS) ist eine einfache Erweiterung der Monte-Carlo-Methode, die sicherstellt, dass die simulierten Aktienkurspfade tatsächlich Martingale sind.

Der simulierte Aktienkurs S_i^{ems} zum Zeitpunkt u_j unter der EMS errechnet sich aus:

$$S_i^{ems}(u_j, n) = S_0 \frac{Z_i(u_j, n)}{Z_0(u_j, n)}$$

mit

$$Z_i(u_j, n) = S_i^{ems}(u_{j-1}, n) \frac{S_i(u_j)}{S_i(u_{j-1})}$$

und

$$Z_0(u_j, n) = \frac{1}{n} e^{-ru_j} \sum_{i=1}^n Z_i((u_j - u_0), n)$$

$S_i(u_j)$ bezeichnet den simulierten Aktienkurs des i -ten Simulationslaufes zum Zeitpunkt u_j vor der EMS-Anpassung (u_0 ist der Startzeitpunkt). Damit wird auch erreicht, dass die Optionspreise, die auf Basis der Simulation berechnet werden, „rationale Schranken“ wie

$$C_0 \geq (S_0 - xe^{-rT^C})_+$$

nicht verletzen.[15] Die so errechneten Optionspreise werden mit C^{ems} bezeichnet.

Die control-variate-Methode basiert darauf, dass für bestimmte Optionspreise analytische Lösungen existieren. Aus der simulierten Verteilung von V_{T^C}/N , die mit den gleichen Zufallszahlen wie die Verteilung von S_{T^C} erzeugt wurde, werden wie in (18) Callpreise generiert ($C^{ems}(V/M)$).

Der Callpreis unter Berücksichtigung der Warrant-Emission nach der control-variate-Korrektur ergibt sich zu:

$$C^{emscv} = C^{ems} - F(C^{ems}(V/N) - C^{BS}(V/N))$$

mit

$C^{BS}(V/N)$ analytisch berechneter BLACK/SCHOLES-Preis einer Option auf V/N und F Korrelation zwischen $E[(S_{T^C} - x)_+]$ und $E[(V_{T^C}/N - x)_+]$.

Fussnoten

- [1] Vgl. z.B. COX und ROSS (1976).
 [2] Vgl. z.B. SÜCHTING (1995), S. 129 und S. 137 ff.
 [3] Vgl. BLACK und SCHOLES (1973), S. 648 ff.; MERTON (1973), S. 142 ff.
 [4] Vgl. GALAI und SCHNELLER (1978); LAUTERBACH und SCHULTZ (1990).
 [5] Vgl. z.B. LAUTERBACH und SCHULTZ (1990), S. 1182; HULL (1997), S. 245.
 [6] Vgl. die Diskussion im Anhang in LAUTERBACH und SCHULTZ (1990), S. 1207 f.
 [7] Für die hier im folgenden behandelte Bewertung von Optionen auf den Aktienkurs ist der Erwartungswert dieser Verteilung aufgrund der risikoneutralen Bewertung jedoch unbedeutend.
 [8] In (3) wurde der durch die Emission verursachte Sprung im Marktwert des Eigenkapitals berücksichtigt. Für $t \geq t_0$ ist V_t demnach als hypothetischer Marktwert des Eigenkapitals zu interpretieren, der beobachtet werden könnte, wenn das Unternehmen keine Warrants emittiert hätte.
 [9] Die Indikatorfunktion nimmt den Wert 1 an, wenn die in Klammern angeführte Bedingung wahr ist, und ist sonst 0.
 [10] Hier kommt der Verwässerungseffekt der Warrants zum Ausdruck.
 [11] Der gewählte Wertebereich ist durchaus realistisch: LAUTERBACH und SCHULTZ (1990), S. 1190 f., finden empirisch „Verwässerungsfaktoren“ (dort als $M/(M + N)$ definiert) von bis zu 0,5, und SCHULZ und TRAUTMANN (1994), S. 853, finden in ihrem Datensatz, der sich auf deutsche Unternehmen bezieht, Verwässerungsfaktoren bis zu 23% für einzelne Warrant-Emissionen.
 [12] Wir setzen das Bezugsverhältnis wieder gleich 1.
 [13] Vgl. BOYLE et al. (1997), S. 1272 ff.
 [14] Vgl. DUAN und SIMONATO (1998).
 [15] Vgl. DUAN und SIMONATO (1998), S. 1218.

Literatur

- BLACK, F. und M. SCHOLES (1973): „The pricing of options and corporate liabilities“, *Journal of Political Economy* 81, pp. 637–654.
 BOYLE, P., M. BROADIE und P. GLASSERMAN (1997): „Simulation methods for security pricing“, *Journal of Economic Dynamics and Control* 21, pp. 1267–1321.
 COX, J. und S. ROSS (1976): „The valuation of options for alternative stochastic processes“, *Journal of Financial Economics* 3, pp. 145–166.
 DUAN, J.-C. und J.-G. SIMONATO (1998): „Empirical martingale simulation for asset prices“, *Management Science* 44, pp. 1218–1233.
 GALAI, D. und M. I. SCHNELLER (1978): „Pricing of warrants and the value of the firm“, *The Journal of Finance* 33, pp. 1333–1342.
 HOBSON, D. G. (1998): „Volatility misspecification, option pricing and superreplication via coupling“, *The Annals of Applied Probability* 8, pp. 193–205.
 HULL, J. C. (1997): *Options, futures and other derivative securities*, Upper Saddle River: Prentice Hall.
 LAUTERBACH, B. und P. SCHULTZ (1990): „Pricing warrants: An empirical study of the Black/Scholes model and its alternatives“, *The Journal of Finance* 45, pp. 1181–1209.
 MERTON, R. C. (1973): „Theory of rational option pricing“, *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, pp. 141–183.
 SCHULZ, G. U. und S. TRAUTMANN (1994): „Robustness of option-like warrant valuation“, *Journal of Banking and Finance* 18, pp. 841–859.
 SÜCHTING, J. (1995): *Theorie und Politik der Unternehmensfinanzierung*, Wiesbaden: Gabler-Verlag.