

TriRisk-Watch: Visualisierung des Value-at-Risk komplexer Portefeuilles

1. Einleitung

Die in Bankenportefeuilles wirkenden risiko-reduzierenden Diversifikationseffekte lassen sich mit Dreiecksstrukturen graphisch verdeutlichen.[1] Anhand einer „TriRisk-Watch“ lassen sich die Value-at-Risk-Beträge der im Portefeuille befindlichen Positionen darstellen. Die „Risiko-Uhr“ zeigt Teil- und Gesamtrisiken des Portefeuilles und gibt insbesondere Empfehlungen für risikominimierende Positionen (Hedging-Strategie). Bei der vorgestellten Methode handelt es sich sowohl um ein didaktisches Instrument als auch um eine praxisrelevante Methodik zur Führungsinformation. So bekommen die Geschäftsleitungen von Banken in der Regel nicht mehr als 10 bis 20 VaR-Beträge für vorgegebene aggregierte Portefeuilles vorgelegt, um sich einen Überblick über die Risikosituation des Institutes zu machen.

2. Bankinterne Risikomessmodelle

Interne Risikomessmodelle schätzen das Verlustpotential eines Portefeuilles von Kauf- und Verkaufspositionen (Long- und Short-Positionen)

* Wir danken den Gutachtern Jacqueline Henn, Patrick Wegmann und Prof. Dr. Heinz Zimmermann für ihre wertvollen Anregungen. Adressen der Autoren: FH Dortmund, Emil-Figge-Str. 45, D-44047 Dortmund (schultemattler@fh-dortmund.de, tysiak@fh-dortmund.de).

anhand der Kennzahl Value-at-Risk ab. Die Modelle basieren im weitesten Sinne und das Varianz-Kovarianz-Modell im engeren Sinne auf der Portfolio-Selection-Theorie von Harry Markowitz. Markowitz erkannte, dass der Investor neben der Entscheidungsgrösse „Gesamtrendite des Portefeuilles“ noch eine zweite Grösse für das „Risiko des Portefeuilles“ direkt oder indirekt berücksichtigt. Die Bestimmung der erwarteten Rendite eines Portefeuilles ergibt sich als die Addition der mit den jeweiligen Portefeuilleanteilen gewichteten Einzelrenditen. Als Massgrösse für das erwartete Risiko eines Portefeuilles benutzt Markowitz die Volatilität gemessen mit der Varianz (oder der Standardabweichung) der den jeweiligen Positionen im Portefeuille zugrunde liegenden Aktivpreisveränderungen.

Die Stärke der Risikoreduktion (Diversifikation) hängt von der Grössenordnung des Korrelationskoeffizienten (ρ_{ij}) zwischen den Preisveränderungen der Handelspositionen a_i und a_j ab. Für eine bestimmte Anzahl von n Positionen ergibt sich das Risiko des Portefeuilles in Geldeinheiten (Standardabweichung σ_p) formal wie folgt:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_i \cdot a_j \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \rho_{ij}} \quad (1)$$

Die Standardabweichung σ_p des Portefeuilles gibt die geschätzte Höhe eines „typischen“ Gewinnes

oder Verlustes während des nächsten Handelstages an. Nach der „Rule 66“[2] ist die Wahrscheinlichkeit für eine maximale Schwankung vom Mittelwert um eine Standardabweichung (ungefähr) 66 Prozent. Deshalb wird in 66 Prozent aller Fälle (also in durchschnittlich 66 von 100 Handelstagen) für das Portefeuille ein Gewinn oder Verlust kleiner als σ_p Geldeinheiten erwartet.

Der von den Instituten in Risikomodellen bestimmte Value-at-Risk des Portefeuilles (VaR_p), der im bankaufsichtlichen KWG-Eigenkapitalgrundsatz I als potentieller Risikobetrag bezeichnet wird, ist dahingegen ein „extremer“ Verlustwert, der nur mit einer sehr geringen Wahrscheinlichkeit ($1 - p$) während einer bestimmten Halteperiode der Positionen überschritten wird.[3]

In bankaufsichtlich anerkannten Modellen muss der VaR auf dem 99prozentigen Vertrauensniveau p eines einseitigen Prognoseintervalls basieren, das heisst, in 99 Prozent aller Fälle wird ein Verlust kleiner als die Risikomessgrösse erwartet. Wenn das Risikomodell mit der Annahme einer Normalverteilung der Gewinne und Verluste eines Portefeuilles arbeitet, lässt sich die Höhe des Risikobetrages mit dieser Eigenschaft als das 2,33fache der eintägigen Standardabweichung des Portefeuilles bestimmen. Zudem wird eine Haltedauer h von zehn Tagen vorgeschrieben, das heisst, man nimmt an, dass verlusttragende Positionen innerhalb dieser Zeitspanne glattgestellt werden können. Sofern ein Institut die Standardabweichung des Portefeuilles auf der Basis einer eintägigen Haltedauer ermittelt, darf dieses Ergebnis durch Multiplikation mit $\sqrt{10}$ (also 3,16) auf eine zehntägige Haltedauer hochgerechnet werden („Wurzel-Regel“).[4] Abschliessend kommt noch ein Skalierungsfaktor (Multiplikator) zum Ausgleich für bestimmte Schwachpunkte von internen Modellen hinzu, der mindestens den Wert 3 hat.

Den bankaufsichtlich gewünschten Value-at-Risk-Wert VaR_p erhält man also durch die Multiplikation der Standardabweichung des Portefeuilles σ_p mit der Zahl 22 ($= 2,33 \cdot 3,16 \cdot 3$).[5] Es ist offensichtlich, dass durch entsprechende Anpassung

auch VaR-Werte mit anderen Annahmen bezüglich Sicherheitsniveau und Haltedauer angegeben werden können.

Der Value-at-Risk eines Portefeuilles VaR_p kann aus den jeweiligen Value-at-Risk-Beträgen der einzelnen Positionen $VaR_i = 22 \cdot a_i \cdot \sigma_i$ wie folgt errechnet werden:

$$VaR_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n VaR_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n VaR_i \cdot VaR_j \cdot \rho_{ij}} \quad (2)$$

$$= \sqrt{\mathbf{var} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{var}^T}$$

\mathbf{var} ist ein $1 \times n$ -Zeilenvektor mit den VaR-Beträgen der einzelnen Handelspositionen, \mathbf{var}^T ist die Transponierte von \mathbf{var} (also ein $n \times 1$ -Spaltenvektor) und \mathbf{R} die $n \times n$ -Korrelationsmatrix mit den Korrelationskoeffizienten zwischen den den Positionen zugrunde liegenden Risikofaktoränderungen (wie Preise, Kurse und Zinsen).[6]

3. TriRisk-Analogie

Für ein Portefeuille mit lediglich zwei Positionen i und j vereinfacht sich die Gleichung (2) zu

$$VaR_p = \sqrt{VaR_i^2 + VaR_j^2 + 2 \cdot VaR_i \cdot VaR_j \cdot \rho_{ij}} \quad (3)$$

Der Satz von Markowitz lautet in diesem Fall: In einem Portefeuille mit zwei Aktiva ist das Quadrat des Portefeuillerrisikos (VaR_p) gleich der Summe der Quadrate der Einzelrisiken im Portefeuille (VaR_i und VaR_j), adjustiert um das 2fache Produkt dieser Einzelrisiken und dem Korrelationskoeffizienten (ρ_{ij}).

Der Satz des Pythagoras im schiefwinkligen Dreieck lautet wie folgt:[7] In jedem Dreieck ist das Quadrat über einer Dreiecksseite (c) gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten (a und b), vermindert um das 2fache Produkt dieser Seiten und dem Kosinus

des eingeschlossenen Winkels (γ). Formal ausgedrückt also

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma \quad (4)$$

Betrachtet man den Satz des Pythagoras und die Portfoliogleichung von Markowitz fällt sofort die Ähnlichkeit der Ausdrücke auf. Setzt man für die Variablen a , b und c in der Pythagorasgleichung entsprechend die Bezeichnungen von Markowitz ein, ergibt sich:[8]

$$\text{VaR}_p = \sqrt{\text{VaR}_i^2 + \text{VaR}_j^2 + 2 \cdot \text{VaR}_i \cdot \text{VaR}_j \cdot [-\cos(\gamma_{ij})]} \quad (5)$$

In Verbindung mit der Portfoliogleichung folgt daraus $\rho_{ij} = -\cos(\gamma_{ij})$, wobei für den Winkel γ_{ij} gilt $\gamma_{ij} = \arccos(-\rho_{ij})$. Wir wollen γ_{ij} „Winkel-Korrelationsäquivalent“ nennen. Er ist der Schlüssel zur graphischen Darstellung der Risiken eines Portefeuilles. Die allgemeine Portfolioformel für beliebig viele Aktiva lässt sich damit nämlich wie folgt schreiben:

$$\text{VaR}_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \text{VaR}_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \text{VaR}_i \cdot \text{VaR}_j \cdot [-\cos(\gamma_{ij})]} \quad (6)$$

Der negative Wert des Kosinus der Winkel-Korrelationsäquivalente stimmt jeweils wertmässig mit den zugehörigen Korrelationskoeffizienten überein, es gilt also $-\cos(\gamma_{ij}) = \rho_{ij}$. Die Addition von Teilrisiken als auch die Zusammensetzung des Gesamtrisikos eines Portefeuilles lassen sich durch diese Analogie mit Dreiecken darstellen und verdeutlichen. Ein Fallbeispiel eines komplexen Portefeuilles soll dies verdeutlichen.

4. TriRisk-Watch-Beispiel

Es werden insgesamt zehn offene Positionen unterstellt ($m = 10$), die jeweils verschiedenen Risikofaktoren ausgesetzt sind. Für diese Positionen sind die Value-at-Risk-Werte $\text{VaR}_1, \dots, \text{VaR}_m$ – beispielsweise aufgrund bankaufsichtlicher Vorgaben – sowie die Korrelationen ρ_{ij} der zugrunde liegenden Assetpreisveränderungen schon berechnet worden (siehe Tabelle 1 und 2).[9] Zur besseren graphischen Darstellung werden die VaR-Werte der Einzelpositionen getrennt nach Long- und Short-Positionen der (absoluten) Grösse nach aufsteigend geordnet. Short-Positionen werden, wie in der Praxis üblich, mit einem negativen Vorzeichen versehen.

Tabelle 2 enthält die Korrelationskoeffizienten zwischen jeweils zwei der insgesamt zehn Risikofaktoren.[10] So hat der Korrelationskoeffizient als Mass für die lineare Abhängigkeit der Risikofaktoren RF1 und RF2 einen Wert in Höhe von 0,2808. Für die Korrelationskoeffizienten gilt die Beziehung $\rho_{ij} = -\cos(\gamma_{ij})$. Hieraus lassen sich die Winkel-Korrelationsäquivalente γ_{ij} mit $\gamma_{ij} = \arccos(-\rho_{ij})$ bestimmen (siehe Tabelle 3).

Tabelle 1: Value-at-Risk-Beträge der Einzelpositionen (VaR) und tägliche Volatilitäten der zugrunde liegenden Risikofaktoren (Vola)

Position	VaR	Vola
L1	1	3,68%
L2	2	3,75%
L3	3	3,39%
L4	4	2,75%
L5	5	3,89%
S1	-1	4,03%
S2	-2	2,96%
S3	-3	4,33%
S4	-4	6,97%
S5	-5	4,76%

Tabelle 2: Korrelationskoeffizientenmatrix für zehn Risikofaktoren (RF)

Matrix R / COS	RF1	RF2	RF3	RF4	RF5	RF6	RF7	RF8	RF9	RF10
RF1	1,0000	0,2808	0,3211	0,1329	0,2887	0,4646	0,3683	0,2544	0,1663	0,2745
RF2	0,2808	1,0000	0,3632	0,3754	0,3197	0,5202	0,4083	0,2652	0,2225	0,2850
RF3	0,3211	0,3632	1,0000	0,3045	0,4577	0,5539	0,4062	0,4089	0,3118	0,4914
RF4	0,1329	0,3754	0,3045	1,0000	0,2911	0,3297	0,2492	0,3412	0,1141	0,3737
RF5	0,2887	0,3197	0,4577	0,2911	1,0000	0,5293	0,4529	0,5554	0,4132	0,6430
RF6	0,4646	0,5202	0,5539	0,3297	0,5293	1,0000	0,5918	0,4585	0,3148	0,4844
RF7	0,3683	0,4083	0,4062	0,2492	0,4529	0,5918	1,0000	0,3787	0,4705	0,3896
RF8	0,2544	0,2652	0,4089	0,3412	0,5554	0,4585	0,3787	1,0000	0,3297	0,6272
RF9	0,1663	0,2225	0,3118	0,1141	0,4132	0,3148	0,4705	0,3297	1,0000	0,3033
RF10	0,2745	0,2850	0,4914	0,3737	0,6430	0,4844	0,3896	0,6272	0,3033	1,0000

Tabelle 3: Winkel-Korrelationsäquivalentenmatrix für zehn Risikofaktoren (RF)

Grad (WKÄ)	RF1	RF2	RF3	RF4	RF5	RF6	RF7	RF8	RF9	RF10
RF1	180,0	106,3	108,7	97,6	106,8	117,7	111,6	104,7	99,6	105,9
RF2	106,3	180,0	111,3	112,0	108,6	121,3	114,1	105,4	102,9	106,6
RF3	108,7	111,3	180,0	107,7	117,2	123,6	114,0	114,1	108,2	119,4
RF4	97,6	112,0	107,7	180,0	106,9	109,3	104,4	110,0	96,6	111,9
RF5	106,8	108,6	117,2	106,9	180,0	122,0	116,9	123,7	114,4	130,0
RF6	117,7	121,3	123,6	109,3	122,0	180,0	126,3	117,3	108,3	119,0
RF7	111,6	114,1	114,0	104,4	116,9	126,3	180,0	112,3	118,1	112,9
RF8	104,7	105,4	114,1	110,0	123,7	117,3	112,3	180,0	109,3	128,8
RF9	99,6	102,9	108,2	96,6	114,4	108,3	118,1	109,3	180,0	107,7
RF10	105,9	106,6	119,4	111,9	130,0	119,0	112,9	128,8	107,7	180,0

Werden die VaR-Beträge isoliert (das heisst nicht als Portefeuille) betrachtet, so sollen sie jeweils alle als Vektoren parallel zur x-Achse mit der Länge VaR_i gewählt werden, das heisst, als $v_i = \begin{pmatrix} VaR_i \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Länge des Vektors entspricht damit dem VaR der Position. Für ein Portefeuille bestehend aus den ersten drei Positionen erhalten wir also drei Vektoren:

$$v_{L1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_{L2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } v_{L3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Grundgedanke der graphischen Veranschaulichung des VaR eines Portefeuilles besteht darin, dass zwar Summenvektoren der Einzel-VaR gebildet werden, aber die Berücksichtigung der Korrelationen die relative Lage der Vektoren untereinander verändert, die Vektoren also gedreht werden müssen. Wir wollen den Gedankengang schrittweise erläutern.

Schritt 1:

Das Portefeuille bestehe zunächst nur aus der Long-Position L1. Das Verlustrisiko aus dieser Position (VaR) beträgt 1 und wird dargestellt als ein zur x-Achse paralleler Vektor v_{L1} der Länge 1.

Schritt 2:

Nun muss der Winkel bestimmt werden, um den der hinzuzufügende Vektor v_{L2} , also der VaR in Höhe von 2 für die Long-Position L2, gegen die Ausgangslage gedreht werden muss, bevor er an das Ende des ersten Vektors angefügt werden kann. Der gesuchte Drehwinkel λ (siehe Anhang A1) ergibt sich aus der Korrelation $\rho_{1+\dots+n;n+1}$ der neu hinzukommenden Position $n + 1$ zum bisherigen Portefeuille der ersten n Positionen und aus der relativen Lage des bisher aufgebauten Portefeuilles zur x-Achse Winkel($v_{1+\dots+n}; v_{x_Achse}$):

$$\lambda_{L_{n+1}} = \pi - \arccos(-\rho_{1+\dots+n;n+1}) + \text{Winkel}(v_{1+\dots+n}; v_{x_Achse}) \quad (7)$$

Da das bisherige Portefeuille nur aus der ersten Position v_{L1} besteht, beträgt der Winkel zwischen bisherigem Portefeuille und der x-Achse Null Grad. Aus demselben Grunde kann die Korrelation der Tabelle 2 entnommen werden. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \lambda_{L2} &= \pi - \arccos(-\rho_{1;2}) + \text{Winkel}(v_1; v_{x_Achse}) \\ &= 3,1416 - \arccos(-0,2808) + 0 \\ &= 1,2862 = 73,7^\circ \end{aligned} \quad (8)$$

Der Vektor v_{L2} muss also erst um den Winkel $73,7^\circ$ entgegen dem Uhrzeigersinn gedreht werden (Risikouhren gehen anders herum!), bevor er dem bisherigen Portefeuille (welches nur aus der L1-Position besteht) hinzugefügt wird.

Schritt 3:

Die Drehung erfolgt mittels der bekannten Matrizenmultiplikation. Die Drehung eines Vektors mit zwei Komponenten um den Winkel α erhält man durch Multiplikation des Vektors mit der Matrix \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (9)$$

Da in unserem Falle jeweils Vektoren gedreht werden müssen, die parallel zur x-Achse verlaufen, deren zweite Komponente also gerade Null ist, kann die Drehung des Vektors

$$v_{L2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ berechnet werden mit}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos \alpha \\ x \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (10)$$

Für den Vektor v_{L2} erhalten wir nach einer Drehung um $73,7^\circ$ die folgenden Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot \cos 73,7^\circ \\ 2 \cdot \sin 73,7^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5616 \\ 1,9195 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Schritt 4:

Um den VaR des Portefeuilles als Vektor veranschaulichen zu können, müssen wir den gedrehten Vektor zum bisherigen Portefeuillevektor addieren. Man erhält:

$$\begin{aligned} v_{L1,L2} &= v_{L1} + v_{L2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5616 \\ 1,9195 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1,5616 \\ 1,9195 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

Man beachte, dass die Länge dieses Vektors dem VaR des nunmehr aus zwei Positionen bestehenden Portefeuilles entspricht:

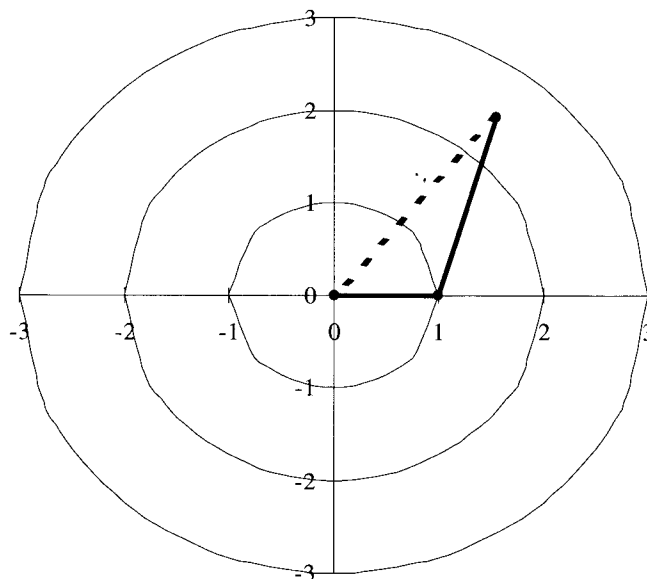
$$\begin{aligned} \text{VaR}_{L_1,L_2} &= \|v_{L_1,L_2}\| \\ &= \sqrt{1,5616^2 + 1,9195^2} = 2,47 \end{aligned} \quad (13)$$

Dieser Wert lässt sich mit der Portfolioformel leicht bestätigen:

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{L_1,L_2} &= \sqrt{\text{VaR}_{L_1}^2 + \text{VaR}_{L_2}^2 + 2 \cdot \text{VaR}_{L_1} \cdot \text{VaR}_{L_2} \cdot [-\cos(\gamma_{L_1,L_2})]} \\ &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot [-\cos(106,8^\circ)]} \quad (14) \\ &= \sqrt{5 + 4 \cdot 0,2808} = 2,47 \end{aligned}$$

Abbildung 1 zeigt die beiden VaR-Vektoren der Einzelpositionen. Das Gesamtrisiko des Portefeuilles aus zwei Positionen ($\text{VaR}_{L_1,L_2} = 2,47$) ist die Länge der – in der Abbildung 1 gestrichelt eingezeichneten – Verbindung zwischen dem Ursprung und dem Endpunkt der beiden Vektoren. Durch diese Verbindung ergibt sich das schon angesprochene (schiefwinkelige) Dreieck, mit dem Risikozusammenhänge verdeutlicht werden können. Das Gesamtrisiko des Portefeuilles, also der Vektor, der im Beginn des ersten Vektors anfängt und in der Spitze des letzten Vektors endet, lässt sich in der Abbildung aufgrund der eingezeichneten Einheitskreise leicht abzulesen.

Abbildung 1: TriRisk-Watch mit zwei Long-Positionen ($\text{VaR}_{L_1} = 1$, $\text{VaR}_{L_2} = 2$, $\text{VaR}_{L_1,L_2} = 2,47$)



Schritt 5:

Fügt man dem jetzt aus zwei Positionen bestehenden Portefeuille die dritte Position L3 mit einem VaR in Höhe von 3 hinzu, so wiederholen sich die Schritte 2 bis 4 analog. Es muss wiederum der Winkel bestimmt werden, um den der hinzuzufügende Vektor v_{L3} , also der VaR in Höhe von 3 für die Long-Position L3, gegen die Ausgangslage gedreht werden muss, bevor er an das Ende der ersten beiden Vektoren angefügt werden kann.

Dazu benötigen wir zwei Formeln, mit denen wir die Korrelation $\rho_{1+\dots+n;n+1}$ zwischen den bisher zusammengefassten Positionen $i = 1$ bis n (also L1 und L2) und der neu hinzukommenden Position $n + 1$ (L3) und die relative Lage des bisher aufgebauten Portefeuilles zur x-Achse Winkel $(v_{1+\dots+n}; v_{x_Achse})$ bestimmen können.

Der Korrelationskoeffizient $\rho_{1+\dots+n;n+1}$ lässt sich berechnen mit der folgenden Gleichung (siehe Anhang A2):

$$\rho_{1+\dots+n;n+1} = \frac{r_{1xn} \cdot \text{var}_{nx1}^T}{\sqrt{\text{var}_{1xn} \cdot R_{nxn} \cdot \text{var}_{nx1}^T}} \quad (15)$$

Da alle Werte bekannt sind, lassen sich die gesuchten Koeffizienten leicht bestimmen. Im Bei-

spiel hat die Korrelation zwischen der neu hinzukommenden Position L3 und dem bereits bestehenden Portefeuille (L2 und L3) einen Wert in Höhe von 0,4233 (siehe Tabelle 4, Spalte 2 für alle anderen Werte):

$$\rho(L1, L2; L3) = \frac{(0,3211 \ 0,3632) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{(1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0,2808 \\ 0,2808 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}} \quad (16)$$

$$= \frac{1,0475}{2,4745} = 0,4233$$

Für den bereits bestimmten Vektor $v_{L1;L2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5616 \\ 1,9195 \end{pmatrix}$ des bisher aufgebauten Portefeuilles ergibt sich der Winkel $(v_{1+\dots+n}; v_{x_Achse})$ zur x-Achse wie folgt (siehe Anhang A3):

$$\text{Winkel}(v_{L1;L2}; v_{x_Achse}) = \arccos\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{1,5616}{2,4745}\right) \quad (17)$$

$$= 0,8879 = 50,9^\circ$$

Tabelle 4: Korrelationen und Winkel-Korrelationsäquivalente der neu hinzukommenden Positionen

Portefeuilles	VaR(P) (1)	Korrel+1 (2)	WKÄ+1 (3)
L1	1,00		
L1, L2	2,47	0,2808	106,3
L1, L2, L3	4,63	0,4233	115,0
L1, L2, L3, L4	7,20	0,3884	112,9
L1, L2, L3, L4, L5	10,56	0,4816	118,8
L1, L2, L3, L4, L5, S1	9,91	0,6756	132,5
L1, L2, L3, L4, L5, S1, S2	9,05	0,5120	120,8
L1, L2, L3, L4, L5, S1, S2, S3	7,83	0,5456	123,1
L1, L2, L3, L4, L5, S1, S2, S3, S4	7,92	0,2331	103,5
L1, L2, L3, L4, L5, S1, S2, S3, S4, S5	7,81	0,3373	109,7

Als Drehungswinkel erhalten wir somit $115,8^\circ$:

$$\begin{aligned} \lambda_{L3} &= \pi - \arccos(-\rho_{1+2;3}) \\ &\quad + \text{Winkel}(v_{L1;L2}; v_{x_Achse}) \\ &= 3,1416 - \arccos(-0,4233) + 0,8879 \\ &= 2,0216 = 115,8^\circ \end{aligned} \quad (18)$$

Schritt 6:

Die Spitze des im Ursprung beginnenden Vektors v_{L3} besitzt nach analoger Rechnung die folgenden Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot \cos 115,8^\circ \\ 3 \cdot \sin 115,8^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,3069 \\ 2,7004 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Schritt 7:

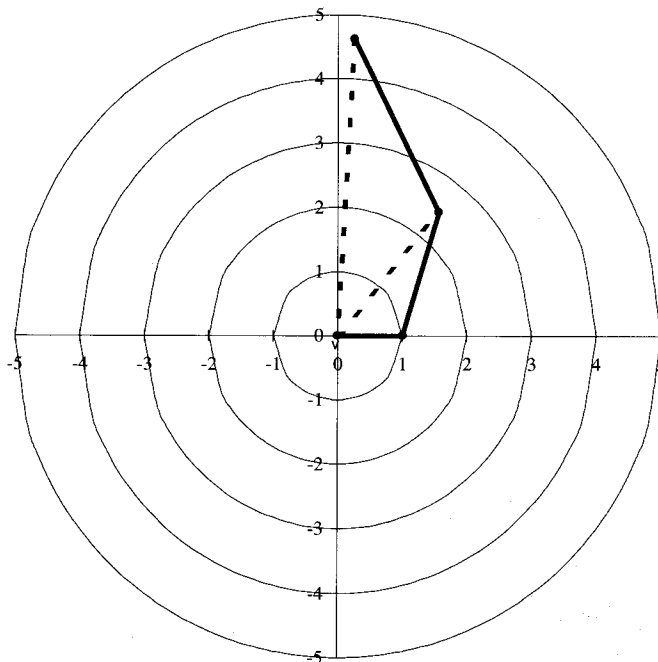
Der Vektor, der den VaR des Gesamtportefeuilles widerspiegelt, ergibt sich als Summe der drei VaR-Vektoren, wobei die ersten beiden im Schritt 4 schon addiert wurden:

$$\begin{aligned} v_{L1,L2;L3} &= \begin{pmatrix} 1,5616 \\ 1,9195 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1,3069 \\ 2,7004 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,2547 \\ 4,6199 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

Die Länge des Vektors entspricht wieder dem VaR des Portefeuilles:

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{L1,L2,L3} &= \|v_{L1,L2;L3}\| \\ &= \sqrt{0,2547^2 + 4,6199^2} \\ &= \sqrt{21,41} = 4,63 \end{aligned} \quad (21)$$

Abbildung 2: TriRisk-Watch mit drei Long-Positionen ($\text{VaR}_{L1} = 1$, $\text{VaR}_{L2} = 2$, $\text{VaR}_{L3} = 3$, $\text{VaR}_{L1,L2,L3} = 4,63$)



Auch dieser Wert lässt sich mit der Portfolioformel leicht verifizieren:

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{L_1, L_2, L_3} &= \sqrt{\text{var} \cdot \mathbf{R} \cdot \text{var}^T} \\ &= \sqrt{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0,2808 & 0,3211 \\ 0,2808 & 1 & 0,3632 \\ 0,3211 & 0,3632 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} \quad (22) \\ &= 4,63 \end{aligned}$$

Abbildung 2 zeigt die drei VaR-Vektoren der Einzelpositionen. Das Gesamtrisiko des Portefeuilles aus drei Positionen, also der VaR in Höhe von 4,63, ist die Länge der Verbindung zwischen dem Ursprung und dem Endpunkt der drei Vektoren. Der Wert lässt sich in der Abbildung aufgrund der eingezeichneten Einheitskreise sofort ablesen. Das hier relevante (schiefwinkelige) Dreieck hat die folgenden Seiten:

- VaR des Portefeuilles aus den ersten beiden Positionen (Vektor vom Ursprung zum Endpunkt der ersten beiden Vektoren),
- VaR der neu hinzukommenden Position (dritter Vektor) und
- VaR des Gesamtportefeuilles (Vektor vom Ursprung zum Endpunkt der drei Vektoren).

5. Diversifikations- und Hedging-Effekt

Analog der obigen Vorgehensweise können auch die anderen Positionen sukzessive in das Portefeuille integriert und deren VaR-Beträge graphisch mit unserer TriRisk-Watch (Risiko-Uhr) dargestellt werden. Es lässt sich dabei festhalten, dass positiv korrelierte Long-Positionen ($0 < \rho < 1$) den VaR, also das Risiko, stetig unterproportional erhöhen. Dies drückt sich anschaulich dahingehend aus, dass sich der Polygonzug immer weiter vom Ursprung weg bewegt. Der VaR aller fünf Long-Positionen beträgt 10,56 (siehe Abbildung 3).

Die einfache Summe aller VaR-Beträge der Long-Positionen ist 15 (Bruttoposition), demnach wird das Risiko durch Portefeuillebildung um 4,44 verringert (Diversifikationseffekt der Long-Positionen).

Die fünf positiv korrelierten Short-Positionen für sich genommen, drehen sich auf der TriRisk-Watch rechts herum (siehe Abbildung 4). Der VaR aller fünf Short-Positionen beträgt 11,23. Die einfache (absolute) Summe der VaR-Beträge aller Short-Positionen ist ebenfalls 15, demnach wird das Risiko durch Portefeuillebildung um 3,77 verringert (Diversifikationseffekt der Short-Positionen).

Nehmen wir alle 10 Positionen in das Portefeuille, ergibt sich ein Brutto-VaR-Betrag in Höhe von 30. Der Diversifikationseffekt auf der Long- und der Short-Seite beträgt insgesamt 8,21 (4,44 + 3,77). In der Gesamtschau kommt ein starker zusätzlicher Hedging-Effekt und ein schwacher Diversifikationseffekt zwischen der Long- und Short-Seite zum Tragen. Beim Hedging wird regelmässig versucht, eine Long-Position (z.B. Aktienposition) durch den Aufbau einer gegenläufigen Short-Position (Terminverkauf der Aktienposition) gegen Preisrisiken (teilweise) zu neutralisieren. Es wird erwartet, dass Wertverluste der Long-Position weitgehend durch Gewinne aus der Short-Position ausgeglichen werden. Ökonomisch wird der Gewinn oder Verlust nicht von der zukünftigen Kursentwicklung sondern nur von dem Verhältnis des ursprünglichen Einstandpreises zum fixierten Verkaufspreis determiniert. Der Hedging-Effekt wirkt in beide Richtungen, dass heisst, verzeichnet die Long-Position einen Wertzuwachs, wird diesem Gewinn ein entsprechender Verlust aus der Short-Position gegenüberstehen.

Im vorliegenden Falle liegen zu den Long- keine exakt gegenläufigen Short-Positionen vor. Die Korrelation zwischen den fünf Long- und den fünf Short-Positionen beträgt 0,7447. Daher ergibt sich ein Diversifikationseffekt zwischen diesen in Höhe von 1,44 und insgesamt im Portefeuille von 9,65 (8,21 + 1,44).

Abbildung 3: TriRisk-Watch mit fünf Long-Positionen ($VaR_{L1} = 1$, $VaR_{L2} = 2$, $VaR_{L3} = 3$, $VaR_{L4} = 4$, $VaR_{L5} = 5$, $VaR_{L1 \text{ bis } L5} = 10,56$)

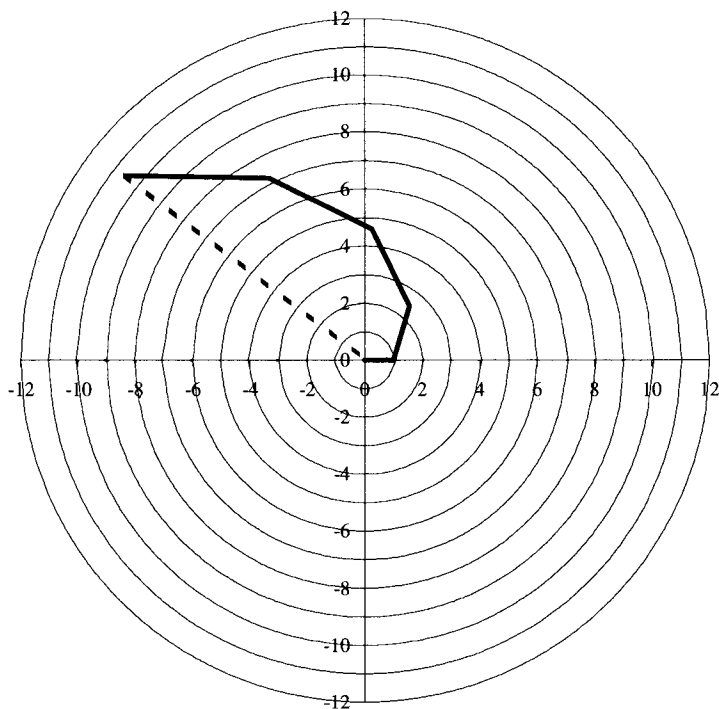


Abbildung 4: TriRisk-Watch mit fünf Short-Positionen ($VaR_{S1} = -1$, $VaR_{S2} = -2$, $VaR_{S3} = -3$, $VaR_{S4} = -4$, $VaR_{S5} = -5$, $VaR_{S1 \text{ bis } S5} = 11,23$)

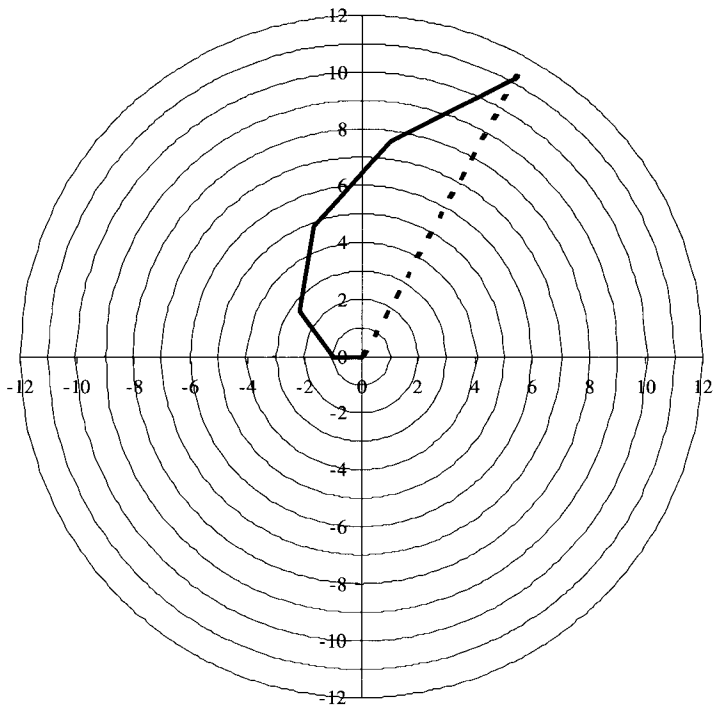
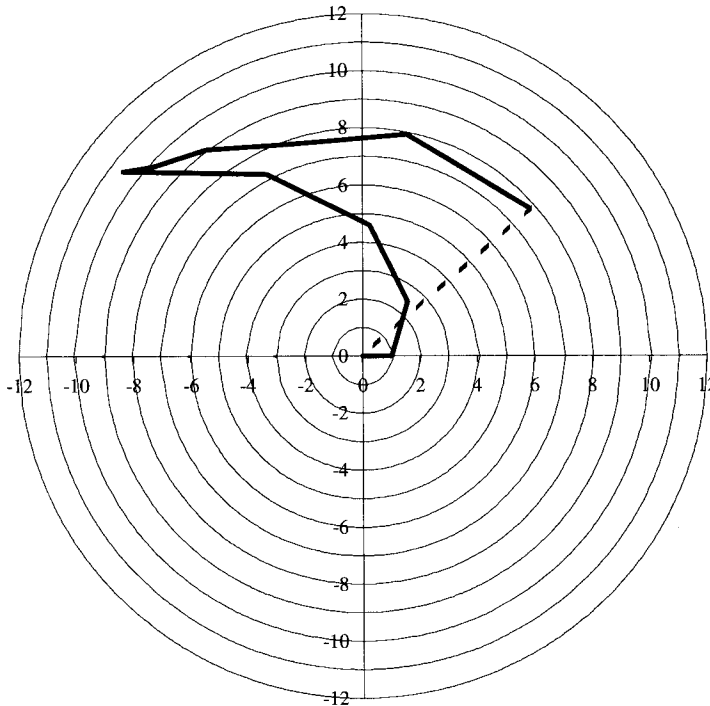


Abbildung 5: TriRisk-Watch mit fünf Long- und fünf Short-Positionen ($VaR_p = 7,81$)

Da der resultierende VaR des Gesamtportefeuilles 7,81 ist (siehe Abbildung 5), beträgt der Hedgingeffekt 12,54. Er ist rund 30 Prozent grösser als der Diversifikationseffekt. Mit der Abbildung 5 lässt sich dieser Tatbestand sehr schön nachvollziehen.

6. Risikoanalyse

Kreditinstitute übernehmen im Rahmen ihrer Geschäftstätigkeit automatisch Risiken, denn erst das Eingehen von Risiken eröffnet Ertragschancen („High Risk, High Return“). Das Risikomanagement dient insbesondere dazu, Risiken bewusst einzugehen und die eingegangenen Risiken zu kontrollieren. Für das unterstellte Beispiel visualisiert die TriRisk-Watch in Abbildung 5 die Höhe und die Zusammensetzung des Gesamttrisikos. Im

folgenden wollen wir drei grundsätzliche Analysemethoden des Risikomanagements darstellen, die in der Praxis durchgeführt werden.

6.1 Absolute Positionsanalyse

Eine allgemeine Praxis ist es, den Einfluss einer gegebenen Positionen auf das Gesamttrisiko zu untersuchen.[11] Hierbei fragt man: Was passiert mit dem Gesamttrisiko, wenn man jede einzelne Position vollständig aus dem Portefeuille entfernt? Eine mit der Portfoliotheorie nicht vertraute Person, würde bei der absoluten Positionsanalyse annehmen, dass die Herausnahme einer Long-Position automatisch zu einer Reduzierung und die Eliminierung einer Short-Position aufgrund eines geringeren Hedging-Effektes zu einer Erhöhung des Gesamttrisikos führt.

Tabelle 5: Absolute Positionsanalyse

Aus dem Gesamtportefeuille wird vollständig entfernt	VaR(P)	Veränderung des VaR(P)	in %
	(1)	(2)	(3)
L1	7,81	0,00	0,0
L2	7,54	-0,27	-3,4
L3	7,90	0,09	1,2
L4	7,24	-0,57	-7,3
L5	9,00	1,19	15,3
S1	7,86	0,05	0,6
S2	7,58	-0,23	-3,0
S3	7,41	-0,40	-5,1
S4	6,89	-0,92	-11,8
S5	7,92	0,11	1,4

Dass diese Einschätzung falsch ist, zeigen die Ergebnisse in Tabelle 5. So kommt es bei der Herausnahme von Long- und Short-Positionen aus dem Gesamtportefeuille nämlich entweder zu einer Risikoreduzierung (bei L2, L4, S2, S3 und S4), einer Risikoerhöhung (bei L3, L5, S1 und S5) oder einem unveränderten Risiko (bei L1). Der VaR des Gesamtportefeuilles verringert sich um 11,8 Prozent auf 6,89 bei der Herausnahme der Position S4 und erhöht sich um 15,3 Prozent auf 9 bei der Herausnahme der Position L5. Die Korrelationen zwischen den Risikofaktoren sind für diese Veränderungen des VaR des Gesamtportefeuilles verantwortlich.

Mit einer intuitiven Beurteilung von Risikoeffekten in komplexen Portefeuilles liegt man – wie das Beispiel zeigt – deshalb oft falsch. Die Herausnahme einer bestimmten Position verändert zwar die Lage des Endpunktes des Polygonzuges, entscheidend für das Gesamtrisiko ist allerdings nur dessen Entfernung zum Ursprung.

Die absolute Positionsanalyse hat den Nachteil, dass sie nicht aufzeigen kann, wie die Risiken der einzelnen Positionen das Risiko des Portefeuilles bestimmen. Nehmen wir an, wir hätten nur die Positionen L5 und S5 in dem Portefeuille. Das Gesamtrisiko hat eine Höhe von 4,22. Entfernt man

eine der beiden Positionen, erhöht sich das Gesamtrisiko auf 5. Aus der Abbildung 6 ist aber ersichtlich, dass mit einer nur geringfügigen Reduzierung der Long- oder Short-Position das Gesamtrisiko sich nicht erhöht, sondern sogar auf einen Wert unter 4 gebracht werden kann. Diese Beobachtung führt uns zu einer weiteren Analysemöglichkeit.

6.2 Marginale Positionsanalyse

Anstatt die Auswirkungen einer vollständigen Eliminierung einer Position aus dem Gesamtportefeuille zu untersuchen, ist es aussagekräftiger, die marginale Änderung einer Position zu analysieren.[12] Voraussetzung für die marginale Positionsanalyse ist die Eigenschaft des VaR – wie auch der Volatilität (Standardabweichung) – sich direkt proportional mit der Positionsgröße zu ändern. Das heisst, wenn alle Positionen um den gleichen Faktor k ($0 < k < 1$) verringert werden, verkleinert sich auch der VaR (Volatilität) um diesen Faktor. Multiplizieren wir beispielsweise die Positionen a_i und damit wegen $VaR_i = 22 \cdot a_i \cdot \sigma_i$ auch die VaR-Beträge der Positionen in der Tabelle 1 mit dem Faktor $k = 0,8$ (siehe Abbildung 7),

Abbildung 6: TriRisk-Watch mit einer Long- und einer Short-Position ($VaR_{L,5} = 5$, $VaR_{S,5} = -5$, $VaR_{L,5,S,5} = 4,22$)

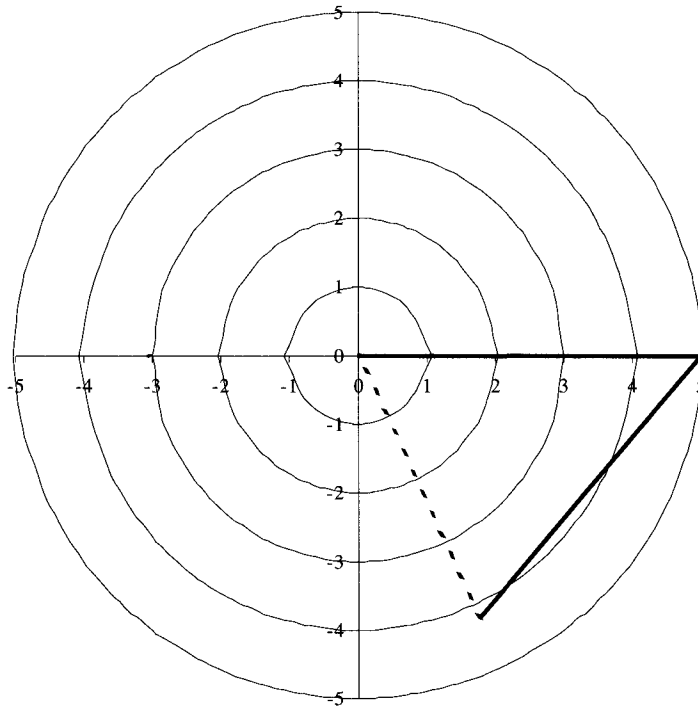
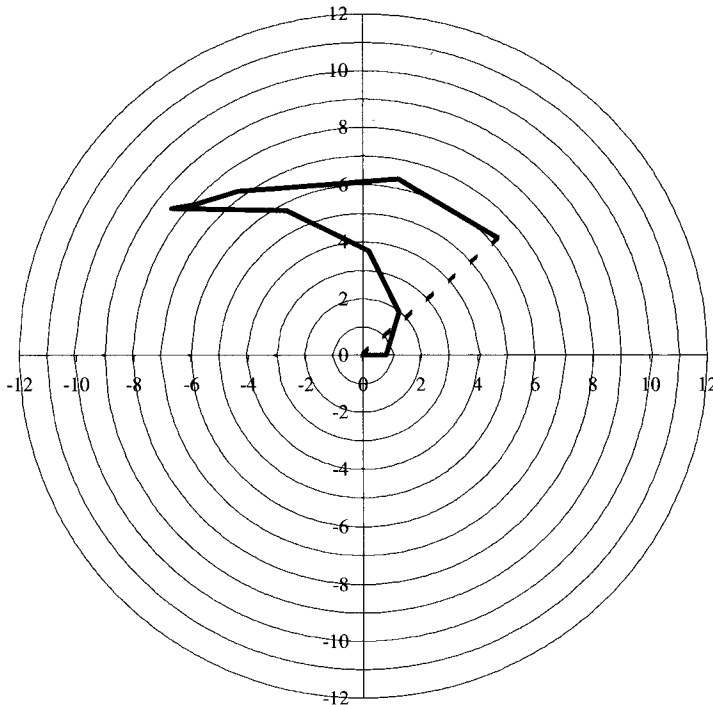


Abbildung 7: TriRisk-Watch mit fünf Long- und fünf Short-Positionen reduziert um den Faktor $k = 0,8$ ($VaR_p = 6,25$)



verringert sich der VaR des Portefeuilles von 7,81 genau um diesen Faktor auf einen Wert in Höhe von 6,25 (= 7,81 x 0,8).[13] Es gilt also:

$$\begin{aligned} \text{VaR}_p(k \cdot 22 \cdot \mathbf{a}_i \sigma_i) &= \text{VaR}_p(k \cdot \text{VaR}_i) \\ &= k \cdot \text{VaR}_p(\text{VaR}_i) \\ &= 0,8 \cdot 7,81 = 6,25 \end{aligned} \quad (23)$$

wobei $k > 0$. \mathbf{a}_i ist ein n-dimensionaler Vektor mit den Long- und Short-Positionen im Portefeuille, σ_i ein n-dimensionaler Vektor mit den der jeweiligen Position zugrunde liegenden Standardabweichung der Aktivpreisveränderungen und VaR_i ein n-dimensionaler Vektor mit den VaR-Beträgen der Positionen.

Durch diese Proportionalität – Mathematiker nennen es Homogenität – ist es möglich, das Risiko des Gesamtportefeuilles (VaR_p) in Höhe von 7,81 zu zerlegen. Damit kann gezeigt werden, welchen Anteil jede Position am Gesamtrisiko hat. Grundlage dieser Zerlegung ist die Eulersche Identität für homogene Funktionen (Eulersche partielle Differentialgleichung), die auf unseren Fall angewandt, den folgenden Ausdruck ergibt:

$$\begin{aligned} \text{VaR}_p &= \frac{\partial \text{VaR}_p(\text{VaR}_1)}{\partial k} \cdot \text{VaR}_1 \\ &+ \frac{\partial \text{VaR}_p(\text{VaR}_2)}{\partial k} \cdot \text{VaR}_2 + \dots \\ &+ \frac{\partial \text{VaR}_p(\text{VaR}_n)}{\partial k} \cdot \text{VaR}_n = 7,81 \end{aligned} \quad (24)$$

Einen Schätzwert für die partielle Ableitung nach k der nicht bekannten Risikofunktion $\frac{\partial \text{VaR}_p(\text{VaR}_1)}{\partial k}$, die der ersten Position zugrunde

liegt, erhält man durch Übergang zu Differentialen. Diese können numerisch leicht ermittelt werden, indem man beispielsweise für k einen Wert in Höhe von 1 Prozent wählt und damit die marginale Änderung im VaR des Portefeuilles bestimmt. Für das Beispiel ergeben sich die Werte in Tabelle 6 Spalte 1. Multipliziert man diese Werte mit der jeweiligen Position (Spalte 2), erhält man die Veränderung des VaR des Portefeuilles aufgrund der marginalen Änderung in einer bestimmten Position. Es zeigt sich, dass das Gesamtrisiko des Portefeuilles in Höhe von 7,81 sich

Tabelle 6: Marginale Positionsanalyse

Aus dem Gesamtportefeuille wird marginal geändert	$\frac{\partial \text{VaR}_p(\text{VaR}_i)}{\partial k}$ (1)	$\frac{\partial \text{VaR}_p(\text{VaR}_i)}{\partial k} \cdot \text{VaR}_i$ (2)	Prozentualer Beitrag am Gesamtrisiko (3)
L1	0,0638	0,06	0,82
L2	0,2591	0,52	6,64
L3	0,1610	0,48	6,18
L4	0,3940	1,58	20,18
L5	0,0636	0,32	4,07
S1	-0,0139	0,01	0,18
S2	-0,2425	0,49	6,21
S3	-0,3224	0,97	12,39
S4	-0,4729	1,89	24,23
S5	-0,2984	1,49	19,11
Summe		7,81	100

als Summe der Veränderungen in den VaR-Werten der Einzelpositionen aufgrund einer geringfügigen prozentualen Änderung der Positionen darstellt.

Mit der marginalen Positionsanalyse kann eine Aussage darüber getroffen werden, auf welche Risikopositionen das Gesamtrisiko des Portefeuilles besonders sensitiv reagiert. Im Beispiel sind dies die Positionen L4, S4 und S5, die zusammen rund 64 Prozent des Gesamtrisikos ausmachen (siehe Tabelle 6 Spalte 3). Das heisst, erhöht man alle zehn Positionen um 1 Prozent, wird der VaR des Portefeuilles um 0,0781 auf einen Wert in Höhe von 7,89 steigen ($=7,81 \cdot 1,01$). Die genannten drei Positionen tragen an diesem Anstieg des Gesamtrisikos 0,05 bei (also einen Anteil in Höhe von 64 Prozent).

Da es sich bei diesen Überlegungen um eine marginale Analyse handelt, kann aus den Prozentwerten nicht geschlossen werden, dass sich bei Eliminierung der drei Positionen das Gesamtrisiko ebenfalls um 64 Prozent senkt. Es ist leicht zu zeigen, dass ein Portefeuille ohne die Positionen L4, S4 und S5 immer noch einen VaR in Höhe von

5,84 hat, sich das Gesamtrisiko also nur um rund 25 Prozent reduziert.

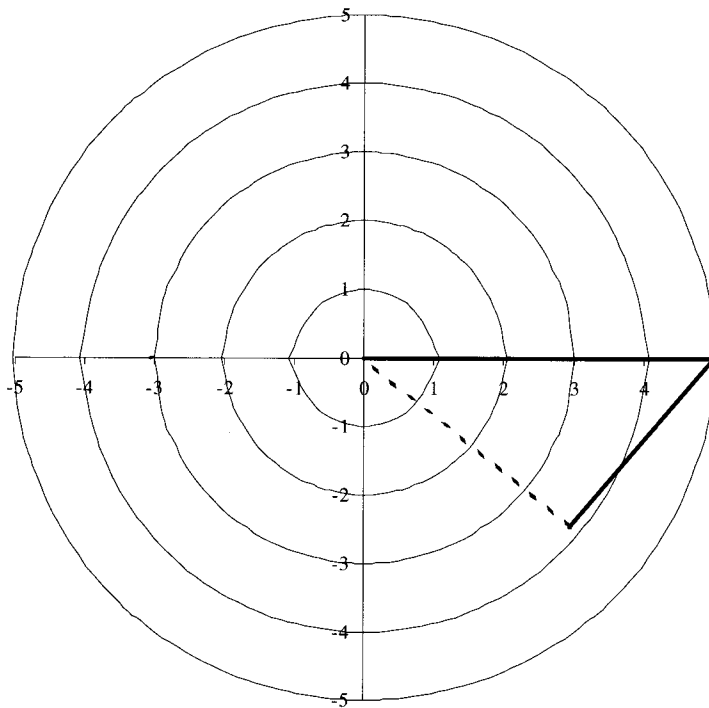
6.3 Risikominimierende Positionsanalyse

Als dritte Analysemöglichkeit soll für jede Position die Grössenordnung bestimmt werden, die das Gesamtrisiko des Portefeuilles ceteris paribus minimiert. Abbildung 6 zeigt deutlich, dass eine Reduzierung der Short-Position S5 zunächst zu einer Reduzierung des Gesamtrisikos führt. Eine risikominimierende Positionsgrösse für S5 ist offensichtlich vorhanden, denn eine kleinere als die risikominimierende Position vergrössert den VaR und damit das Risiko des Portefeuilles wieder.

Die das Portefeuillerisiko minimierende Höhe der Position S5 ist genau dann erreicht (siehe Tabelle 7), wenn zwischen dem Vektor des VaR des Gesamtrisikos (gestrichelte Linie in Abbildung 6) und dem Vektor des VaR der Position S5 ein Winkel von 90° erreicht ist (siehe Abbildung 8). Dazu ist die Länge des VaR-Vektors der Long-Position L5 mit dem Korrelationskoeffizienten

Tabelle 7: Risikominimierende Positionsanalyse

Aus dem Gesamtportefeuille wird optimiert	VaR der risikominimierenden		VaR(P) (3)	Veränderung des	
	Position (1)	Δ VaR (2)		VaR(P) (4)	in% (5)
L1	0,50	-0,50	7,79	-0,02	-0,2
L2	-0,02	-2,02	7,54	-0,27	-3,4
L3	1,74	-1,26	7,71	-0,10	-1,3
L4	0,92	-3,08	7,18	-0,63	-8,1
L5	4,50	-0,50	7,79	-0,02	-0,2
S1	-0,89	0,11	7,81	0,00	0,0
S2	-0,11	1,89	7,58	-0,23	-3,0
S3	-0,48	2,52	7,39	-0,42	-5,3
S4	-0,31	3,69	6,88	-0,93	-11,9
S5	-2,67	2,33	7,45	-0,36	-4,6

Abbildung 8: TriRisk-Watch mit einer Long- und einer risikominimierenden Short-Position ($\text{VaR}_{L5,S5} = 3,83$)

zwischen den Positionen L5 und S5 zu multiplizieren (siehe Tabelle 2):[14]

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{S5}^{\text{Opt}} &= \text{VaR}_{L5} \cdot \rho_{L5,S5} \\ &= -5 \cdot 0,6430 = -3,215 \end{aligned} \quad (25)$$

Die Höhe der risikominimierenden Position S5, a_{S5}^{Opt} , lässt sich wegen

$$a_{S5}^{\text{Opt}} = \frac{\text{VaR}_{S5}^{\text{Opt}}}{22 \cdot \sigma_{S5}} = \frac{-3,215}{22 \cdot 0,0476} = -3,07 \quad (26)$$

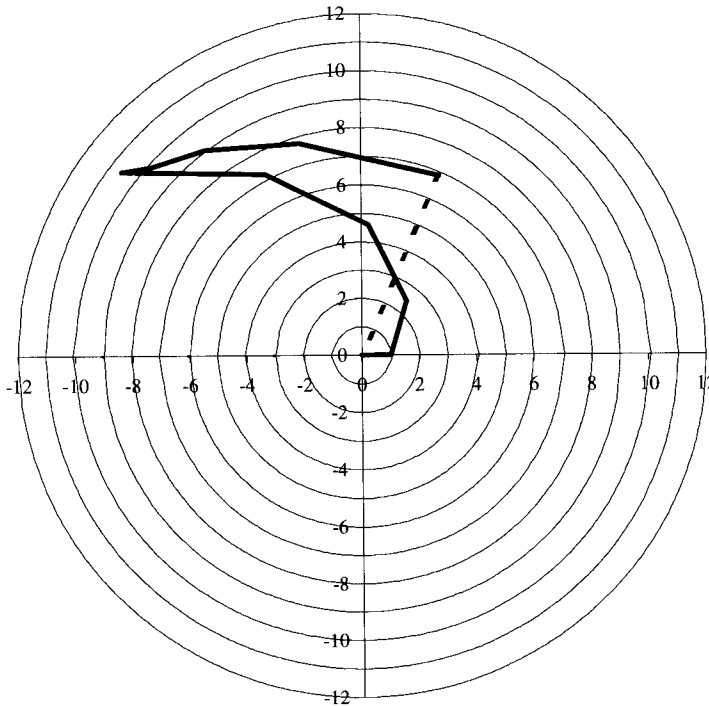
einfach bestimmen ($\sigma_{S5} = 4,76\%$; siehe Tabelle 1). Kleinere und grössere als die risikominimie-

rende Short-Position führen zu einem Risikoanstieg im Portefeuille.

Führt man diese Analyse für das Portefeuille durch, ergeben sich die risikominimierenden Positionen nicht so leicht wie im Fall mit nur zwei Positionen. Sie lassen sich aber relativ schnell mit Iterationsverfahren bestimmen (siehe Tabelle 7 Spalte 1). Wird beispielsweise die Position S4 in einem Ausmass verkleinert, dass der zugehörige VaR einen Wert in Höhe von 0,31 hat, so kann das Gesamtrisiko des Portefeuilles von 7,81 auf 6,88 gesenkt werden (siehe Abbildung 9 im Vergleich zu Abbildung 5).

Kommen wir zurück auf die Gleichung 15. Multipliziert man beide Seiten mit dem Nenner der rechten Seite, so ergibt sich eine interessante Beziehung:

Abbildung 9: TriRisk-Watch mit fünf Long- und fünf Short-Positionen (risikominimierende Position S4, $VaR_{S4} = -0,31$; $VaR_p = 6,88$)



$$\begin{aligned} \rho_{1+\dots+n;n+1} \cdot VaR_{1+\dots+n} &= \sum_{i=1}^n VaR_i \cdot \rho_{i;n+1} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sigma_i \cdot \rho_{i;n+1} \end{aligned} \quad (27)$$

Die linke Seite der Gleichung 27 gibt analog zur Gleichung 26 den VaR der neu hinzukommenden Position $n+1$ an, mit der das Gesamtrisiko des neu entstehenden Portefeuilles einschliesslich der Position $n+1$ minimiert wird. Die Höhe der risikominimierenden Position $n+1$ lässt sich mit der Gleichung 25 leicht bestimmen. Derselbe VaR-Wert ergibt sich auf der rechten Seite der Gleichung 27, bei der die optimalen VaR-Werte (und

damit die jeweils risikominimierenden Positionen) der jeweils neu hinzukommenden Position bei einem sukzessiven Aufbau des Portefeuilles addiert werden.

Aus der Gleichung 27 lässt sich insbesondere ableiten, dass der mit einem Iterationsverfahren bestimmte risikominimierende VaR-Wert für die Position S4 in Höhe von 0,31 auch direkt berechnet werden kann. Dazu wird das Portefeuille zu nächst mit den übrigen neun Positionen sukzessive aufgebaut, so dass man die für die Gleichung 27 notwendigen Daten erhält. Dann wird der risikominimierende VaR-Betrag (oder die risikominimierende Position) analog der Gleichungen 25 und 26 mit Gleichung 27 bestimmt.[15]

7. Ausblick

Die Visualisierung von Risikoeffekten in komplexen Portefeuilles, für die das Risikomass Value-at-Risk (VaR) mit einem Varianz-Kovarianz-Modell bestimmt wird, mit Dreieckskonstruktionen („TriRisk“) sowie Vektorzügen („TriRisk-Watch“) ist eine sehr plastische Art und Weise sich auch nicht-intuitive Risikoeffekte zu verdeutlichen.

Insbesondere die TriRisk-Watch ermöglicht ein unmittelbares „Sehen“ von Sachverhalten, die zwar auch mit Hilfe statistischer Kalkulationen nachvollziehbar wären (z. B. risikominimierende Positionsanalyse), sich bislang aber nicht veranschaulichen liessen. Somit besteht die Möglichkeit, die Dynamik komplexer Portefeuilles transparent zu machen.

Die vorgestellten Analysen stossen an ihre Grenzen, wenn Portefeuilles mit grossen Optionspositionen unterstellt werden. In diesem Fall treten nicht zu vernachlässigende Konvexitätsrisiken auf, die mit der TriRisk-Watch nicht abgebildet werden können. Die Autoren haben deshalb damit begonnen, eine Risiko-Uhr mit sphärischen Dreiecken zu entwickeln („TriRisk-Convex-Watch“), die zusätzlich zu den dargestellten Effekten auch Konvexitätsrisiken berücksichtigen kann. Dieses Verfahren soll Gegenstand eines separaten Beitrages sein.

Anhang

A 1: Bestimmung des Drehwinkels

Die Formel für den Drehwinkel λ_{Ln+1} lässt sich anhand der Abbildung A1 ableiten. Dabei wird die Umkehrfunktion des Kosinus benötigt, der Arcus-Kosinus. Da in unserem Zusammenhang mit Winkeln operiert wird, sollen diese arccos-Werte nicht im Bogenmass angegeben sein, sondern im Gradmass. Für die Winkel α_1 und α_2 gelten die folgenden Beziehungen:

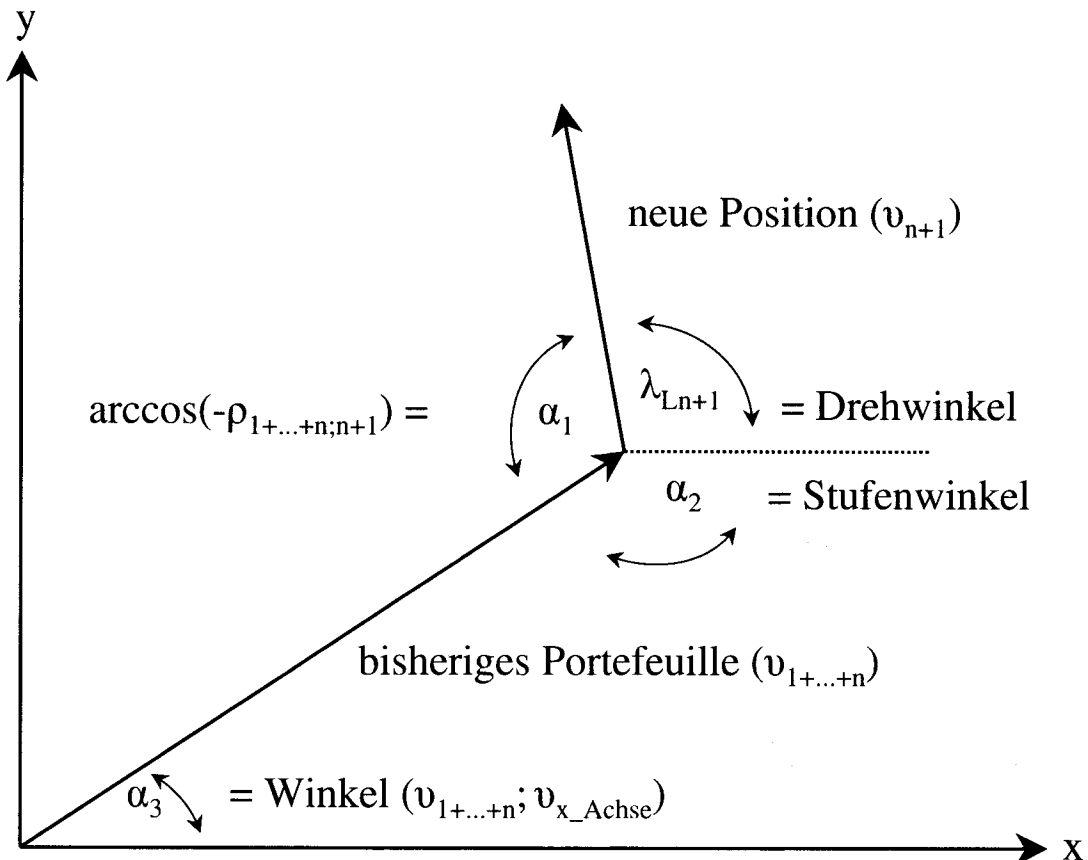
$$\alpha_1 = \arccos(-\rho_{1+\dots+n;n+1}) \tag{A1}$$

$$\alpha_2 = \pi - \alpha_3 = \pi - \text{Winkel}(v_{1+\dots+n}; v_{x_Achse})$$

Der Drehwinkel lässt sich dann wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \lambda_{Ln+1} &= 2 \cdot \pi - \alpha_1 - \alpha_2 \\ &= 2 \cdot \pi - \arccos(-\rho_{1+\dots+n;n+1}) - (\pi - \alpha_3) \\ &= \pi - \arccos(-\rho_{1+\dots+n;n+1}) \\ &\quad + \text{Winkel}(v_{1+\dots+n}; v_{x_Achse}) \end{aligned} \tag{A2}$$

Abbildung A1: Drehwinkel der neu hinzukommenden Positionen



A 2: Korrelation der neu hinzukommenden Position

Betrachtet man beliebige Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$ und möchte den Korrelationskoeffizienten $\rho(X_1 + X_2 + \dots + X_n; X_{n+1})$ zwischen der Summe der ersten n Variablen und der $(n + 1)$ -ten berechnen, wobei alle Varianzen $\sigma^2(X_i)$ und alle Korrelationskoeffizienten $\rho(X_i; X_j)$ bekannt sind, so gilt

$$\begin{aligned} \rho(X_1 + X_2 + \dots + X_n; X_{n+1}) \\ = \frac{\text{Cov}(X_1 + X_2 + \dots + X_n; X_{n+1})}{\sigma(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \cdot \sigma(X_{n+1})} \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

Berücksichtigt man die zwei Beziehungen

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1 + X_2 + \dots + X_n; X_{n+1}) \\ = \sum_{i=1}^n \text{Cov}(X_i; X_{n+1}) \\ = \sum_{i=1}^n \sigma(X_i) \cdot \sigma(X_{n+1}) \cdot \rho(X_i; X_{n+1}) \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

und

$$\begin{aligned} \sigma(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \\ = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma(X_i) \cdot \sigma(X_j) \cdot \rho(X_i; X_j)} \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

in der Gleichung A3 und kürzt den Term $\sigma(X_{n+1})$, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \rho(X_1 + X_2 + \dots + X_n; X_{n+1}) \\ = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma(X_i) \cdot \rho(X_i; X_{n+1})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma(X_i) \cdot \sigma(X_j) \cdot \rho(X_i; X_j)}} \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

Nun gilt es zu beachten, dass in unserem Falle Value-at-Risk-Beträge VaR_i der zugrunde liegenden Long- und Short-Positionen $(+a_i, -a_i)$ mit $\text{VaR}_i = 22 \cdot a_i \cdot \sigma_i$ betrachtet werden. Der Korrelationskoeffizient $\rho_{1+\dots+n;n+1}$ zwischen den bisher zusammengefassten Positionen $i = 1$ bis n und der neu hinzukommenden Position $n + 1$ lässt sich dann wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \rho_{1+\dots+n;n+1} &= \frac{\sum_{i=1}^n 22 \cdot a_i \cdot \sigma_i \cdot \rho_{i;n+1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 22^2 \cdot a_i \cdot a_j \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \rho_{ij}}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \text{VaR}_i \cdot \rho_{i;n+1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{VaR}_i \cdot \text{VaR}_j \cdot \rho_{ij}}} \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

Im Nenner steht das Gesamtrisiko des bestehenden Portefeuilles bevor eine neue Position hinzukommt. Somit kann der Ausdruck unter der Wurzel auch nicht negativ werden. Überdies nimmt der Nenner genau dann den Wert Null an, wenn das bisherige Portefeuille keinerlei Risiko aufweist. In diesem Fall ergibt sich das Gesamtrisiko des um eine Position erweiterten Portefeuilles nur aus dem Risiko der hinzukommenden Position, so dass in diesem Falle die Gleichung A7 keine Anwendung findet. Der Zähler gibt das Risiko der neu hinzukommenden Position in Prozent an, die das Gesamtrisiko des neu entstehenden Portefeuilles minimiert.

Einfacher für die Berechnung ist die Schreibweise der Gleichung A7 in Matrizenform:

$$\begin{aligned} \rho_{1+\dots+n;n+1} &= \frac{(\rho_{1;n+1} \dots \rho_{n;n+1}) \cdot \begin{pmatrix} \text{VaR}_1 \\ \dots \\ \text{VaR}_n \end{pmatrix}}{\sqrt{(\text{VaR}_1 \dots \text{VaR}_n) \cdot \begin{pmatrix} \rho_{11} & \dots & \rho_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \dots & \rho_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{VaR}_1 \\ \dots \\ \text{VaR}_n \end{pmatrix}}} \\ &= \frac{\mathbf{r}_{1 \times n} \cdot \mathbf{var}_{n \times 1}^T}{\sqrt{\mathbf{var}_{1 \times n} \cdot \mathbf{R}_{n \times n} \cdot \mathbf{var}_{n \times 1}^T}} \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

r ist ein $1 \times n$ -Spaltenvektor mit den Korrelationskoeffizienten der Positionen, die sich bereits im Portefeuille befinden, mit der neu hinzukommenden Position. Da alle Werte bekannt sind, lassen sich die gesuchten Koeffizienten bestimmen.

A 3: Winkel zwischen dem VaR des bisherigen Portefeuilles und der x-Achse

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass wir den Winkel zwischen zwei Vektoren

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

berechnen können mittels

$$\arccos\left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}\right) \quad (\text{A9})$$

Da in unserem Fall einer der beiden Vektoren auf der x-Achse liegen soll, können wir also der Einfachheit halber

$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wählen und erhalten

als Winkel zwischen einem Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und der x-Achse den Ausdruck

$$\arccos\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}\right) \quad (\text{A10})$$

Bei der Berechnung des Winkels des Portefeuilles mit der x-Achse, also $\text{Winkel}(v_{1+\dots+n}; v_{x\text{-Achse}})$, liefert der arccos als eigentlich mehrdeutige Funktion immer den Hauptwert zwischen 0 und π , das heisst einen Winkel zwischen 0^0 und 180^0 . Wenn man das Verfahren stabil programmieren möchte, muss in ein entsprechendes Programm noch die

Abfrage herein, ob der tatsächliche Winkel zwischen 0^0 und 180^0 liegt (das heisst, $y_1 \geq 0$). Ansonsten muss man nämlich

$$2 \cdot \pi - \arccos\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}\right) \quad (\text{A11})$$

rechnen. Dies ist aber programmiertechnisch kein Problem.

Fussnoten

- [1] Vgl. SCHULTE-MATTLER/TYSIAK (1999). Siehe auch LITTERMANN (1996) und BESSIS (1998). Beide Autoren benutzen Dreiecke als geometrische Darstellung der Volatilität (Standardabweichung) – nicht des VaR eines Portefeuilles mit zwei Aktiva.
- [2] In Anlehnung an die berühmte „Route 66“ in den USA. Den exakten Wert in Höhe von 68,26 Prozent merkt der erste Autor sich mit seiner „Triple-6-Regel“, wobei sich die mittlere Zahl 6 als Differenz der Zahlen 8 und 2 ergibt. Zugegeben, diese Regel ist nicht so elegant wie die zuerst genannte.
- [3] Vgl. zum Eigenkapitalgrundsatz I SCHULTE-MATTLER (1998, 1999), SCHULTE-MATTLER/TRABER (1997) und BOOS/SCHULTE-MATTLER (1997).
- [4] Zwar treten in diesem Fall insbesondere bei Optionspositionen Fehler auf, die jedoch bis auf weiteres, das heisst bis zu einem Zeitpunkt, an dem nach Einschätzung des Baseler Ausschusses die meisten Institute entsprechend genaue Risikomodelle entwickelt haben, hingenommen werden. Dies wurde auf der offiziellen Anhörung zum Grundsatz I vom Bundesaufsichtsamt für das Kreditwesen konzidiert.
- [5] Der exakte Wert ist 22,06962.
- [6] Die Grundvoraussetzung für das Funktionieren des Verfahrens ist die unterstellte Subadditivität des Value-at-Risk. Diese gilt nach ARTZNER/DELBAEN/EBER und HEATH (1999), pp. 216 ff., jedoch nur, wenn „... quantiles are computed under the distribution for which all prices are jointly normally distributed, then the quantiles do satisfy subadditivity as long as probabilities of excedence are smaller then 0,5.“ (Remarks für Definition 3.3). Da das dargestellte Risikomodelle mit der Annahme der Normalverteilung arbeitet, gilt demnach auch die Subadditivität.
- [7] Vgl. beispielsweise BRONSTEIN/SEMENDJAJEW/MUSIOL und MÜHLIG (1995), pp. 116. Der Satz des Pythagoras im schiefwinkligen Dreieck wird auch „Kosinussatz“ genannt.
- [8] Vgl. SCHULTE-MATTLER/TYSIAK (1999).
- [9] Das auf dem Portfoliomodell von Markowitz basierende Varianz-Kovarianz-Modell leitet die Höhe des Risikos eines Portefeuilles, also den Value-at-Risk, grundsätzlich aus den historischen Volatilitäten der den Positionen zugrunde liegenden Risikofaktoren (Standardabweichungen der logarithmierten Veränderungen der Risikofaktoren) und aus dem Zusammenhang ihrer Veränderungen (ihren Korrelationen) ab.
- [10] Üblicherweise wird der Korrelationskoeffizient nach Bravais-Pearson verwendet. Es liegen hierbei reale Korrelationen der Aktienmärkte von zehn Ländern zugrunde.
- [11] Vgl. LITTERMANN (1996), pp. 26 ff. Er nennt diese Analyse „Incremental Impact“.
- [12] Vgl. LITTERMANN (1996), pp. 26 ff. Er nennt diese Analyse „Marginal Decomposition“.
- [13] Nur diese Proportionalität erlaubt es uns, die marginale Positionsanalyse durchzuführen. Anderen Autoren schlagen zum VaR alternative Risikomasszahlen insbesondere die „Probability of Shortfall“ vor. Diese ist aufgrund der mangelnden Proportionalität hier aber unbrauchbar.
- [14] Die Beziehung ergibt sich unmittelbar aus der Definition des Kosinus als Verhältnis der Ankathete und Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck.
- [15] Es scheint als sei der Aufwand zur Berechnung der Höhe einer risikominimierenden Position sehr hoch, da man erst das ganze Portefeuille neu berechnen muss, um für jede Position die risikominimierende Höhe zu berechnen. Mit einfachen Programmen (z. B. in C++) lässt sich diese Aufgabe auch für grössere Portefeuilles aber relativ schnell lösen.

Literatur

- ARTZNER, P., F. DELBAEN, J.-M. EBER und D. HEATH (1999): „Coherent Measures of Risk“, *Mathematical Finance* 9, No. 3, July 1999, pp. 203–228.
- BESSIS, J. (1998): *Risk Management in Banking*, Wiley, pp. 294–297.
- BOOS, K.-H.; H. SCHULTE-MATTLER (1997): „Der neue Grundsatz I: Interne Risikomessmodelle“, *Die Bank*, 11/97, pp. 684–687.
- BRONSTEIN, I. N., K. A. SEMENDJAJEW, G. MUSIOL und H. MÜHLIG (1995): *Taschenbuch der Mathematik*, Frankfurt am Main: Harri Deutsch.
- LITTERMAN, R. (1996): „Hot Spots™ and Hedges“, in: Goldman Sachs, *Risk Management Series*, pp. 19–28.
- SCHULTE-MATTLER, H. (1998): „Regulatory Framework for the Risk Management of German Credit Institutions“, in: Bol, G., G. Nakhaeizadeh und K.-H. Volmer (Hrsg.): *Risk Measurement, Econometrics and Neutral Networks*, Heidelberg (physika), pp. 245–257.
- SCHULTE-MATTLER, H. (1999): „Drei Generationen bankaufsichtlicher Strukturnormen im neuen Eigenkapitalgrundsatz I“, in: Pfingsten, A. (Hrsg.): *Münsteraner Bankentage 1997, Wandel als Chance – Perspektiven für die Kreditwirtschaft*, ifk Edition Sonderband 1, Münster (Lit), pp. 19–36.
- SCHULTE-MATTLER, H. und U. TRABER (1997): *Marktrisiko und Eigenkapital, Veränderte bankaufsichtliche Normen für Kredit- und Marktrisiken (2. Aufl.)*, Wiesbaden: Gabler.
- SCHULTE-MATTLER, H. und W. TYSIAK (1999): „Tri-Risk: Was Pythagoras und Markowitz gemeinsam haben“, *Die Bank*, 2/1999, pp. 84–88.