

# Berechnung und Eigenschaften von mehrperiodigen Renditen

## 1. Einleitung

Für zahlreiche finanzwirtschaftliche Problemstellungen müssen statistische Eigenschaften von Renditen über mehr als eine Periode ermittelt werden. Im Rahmen der Portfolio-Planung werden Erwartungswert, Standardabweichung und Korrelationen für den relevanten Planungshorizont benötigt. Bei der Optionsbewertung muss die Varianz für den Zeitraum bis zur Fälligkeit ermittelt werden. Bei der Berechnung von Value-at-Risk werden Quantile der Verteilung von Vermögensänderungen über einen bestimmten Zeitraum benötigt, die auf den Verteilungseigenschaften mehrperiodiger Renditen beruhen (können).

Bei der Lösung dieser Aufgabenstellungen steht man häufig vor dem Problem, dass eine Diskrepanz zwischen dem Datenerhebungsintervall und dem benötigten Intervall besteht. Wenn z.B. tägliche Daten vorliegen, aber statistische Kennzahlen für einen Planungshorizont von z.B. einem Monat benötigt werden, gibt es mehrere mögliche Vorgangsweisen.

Eine oft gewählte Vorgangsweise besteht darin, Erwartungswert und Varianz mit dem Planungs-

horizont zu multiplizieren. Diese Skalierung ist jedoch nur bei Vorliegen bestimmter Eigenschaften der Renditen unproblematisch. Für empirisch üblicherweise gefundene Eigenschaften – z.B. Autokorrelation, Heteroskedastizität, Leptokurtosis – sind mit der Skalierung Verzerrungen bei der Schätzung wichtiger statistischer Eigenschaften verbunden, die meist nicht einfach abgeschätzt werden können und möglicherweise unerwünscht sind.

Eine zweite Variante zur Lösung dieses Problems besteht darin, z.B. aus täglichen Daten zunächst monatliche Renditen zu berechnen und die benötigten Statistiken aus den monatlichen Renditen zu schätzen. Aber auch diese Vorgangsweise ist aus folgenden Gründen nicht unproblematisch. Es gibt mehrere Möglichkeiten mehrperiodige Renditen aus einperiodigen Daten zu berechnen. Die Renditen können z.B. aus überlappenden oder nicht überlappenden Zeiträumen berechnet werden.[1] Jede dieser beiden Varianten hat Konsequenzen für die statistischen Eigenschaften, die nicht immer einfach beurteilt werden können. Im Fall nicht-überlappender Daten verliert man meist sehr viele Beobachtungen und reduziert damit die Präzision der geschätzten Statistiken. Im Fall überlappender Daten verliert man zwar nur wenige Beobachtungen, es resultiert jedoch eine starke Autokorrelation der Renditen.

Das Ziel dieses Beitrags ist die Analyse der Effekte für wichtige statistische Eigenschaften, die

\* Der Autor bedankt sich bei den Gutachtern Christian Jochum und Heinz Zimmermann für wertvolle Hinweise und Anregungen. Alois L. J. Geyer, Institut für Operations Research, Wirtschaftsuniversität Wien, Augasse 2–6, A-1090 Wien, Tel. +43 - 1 - 31336 4559, Fax +43 - 1 - 31336 90 4559, E-mail: Alois.Geyer@wu-wien.ac.at

mit den soeben kurz skizzierten Möglichkeiten zur Berechnung von Renditen verbunden sind. Nach der Erläuterung der hier betrachteten Renditeberechnungen und der Schätzung von statistischen Eigenschaften mehrperiodiger Renditen (Kapitel 2) werden dazu vier mögliche stochastische Prozesse für tägliche Renditen unterschieden und simuliert[2] (Kapitel 3.1). In Kapitel 3.2 werden die wichtigsten Ergebnisse der Analyse dargestellt und in Kapitel 3.3 zusammengefasst.

## 2. Renditenberechnung

In dieser Arbeit werden drei verschiedene Arten von Renditenberechnungen untersucht. Tägliche Renditen werden aus einer Reihe von Preisen  $S_t$  wie folgt berechnet:

$$R_t^d = \ln S_t - \ln S_{t-1} \quad t = 1, 2, \dots, n-1$$

Überlappende Renditen über H Tage werden aus

$$R_t^o = \ln S_i - \ln S_{i-H} \\ t = 1, 2, \dots, n-H \quad i = H+1, H+2, \dots, n$$

berechnet. Nicht-überlappende Renditen über H Tage werden aus täglichen Preisen so gebildet, dass nur jeder H-te Wert berücksichtigt wird:

$$R_t^u = \ln S_i - \ln S_{i-H} \\ t = 1, \dots, n/H-1 \quad i = tH+1$$

Es werden folgenden Statistiken aus den Renditen geschätzt: Mittelwert, Standardabweichung, Schiefe, Kurtosis, Quantile und Autokorrelation erster Ordnung. Aus den überlappenden Renditen  $R_t^o$  bzw. nicht-überlappenden Renditen  $R_t^u$  können diese Statistiken direkt geschätzt werden. Es werden die üblichen Stichprobenschätzer verwendet. Die Quantilberechnung erfolgt für ein 5% Niveau. Dabei werden zwei Varianten unterschieden: Erstens, empirische Quantile, die direkt aus

den Daten ermittelt werden. Zweitens, Quantile auf Basis der Annahme einer Normalverteilung unter Verwendung der Schätzwerte für Mittelwert und Standardabweichung.

Die Rendite über H Perioden ( $\ln S_t - \ln S_{t-H}$ ) kann als Summe über einperiodige Renditen dargestellt werden:

$$\ln S_t - \ln S_{t-H} = \ln(S_t / S_{t-1}) \\ + \ln(S_{t-1} / S_{t-2}) + \dots + \ln(S_{t-H+1} / S_{t-H})$$

$$R_t^o = R_t^d + R_{t-1}^d + \dots + R_{t-H}^d.$$

Sofern einperiodige Renditen unabhängig, identisch (normal)verteilt mit Mittelwert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  sind, sollte für H-periodige Renditen gelten, dass deren Mittelwert und Varianz das H-fache von  $\mu$  und  $\sigma^2$  sind:[3]  $R_t^o \sim N(H\mu, H\sigma^2)$ . Dies bildet die statistische Grundlage für die Skalierung.

Mittelwert, Standardabweichung und Quantile für H Tage können daher aus täglichen Daten durch Skalierung geschätzt werden:

$$\hat{\mu} = H\hat{\mu}^d$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{H}\hat{\sigma}^d$$

$$\hat{Q}_{emp} = \sqrt{H}\hat{Q}_{emp}^d$$

$$\hat{Q}_{NV} = \sqrt{H}[\hat{\mu}^d + \hat{\sigma}^d\Phi(\alpha)]$$

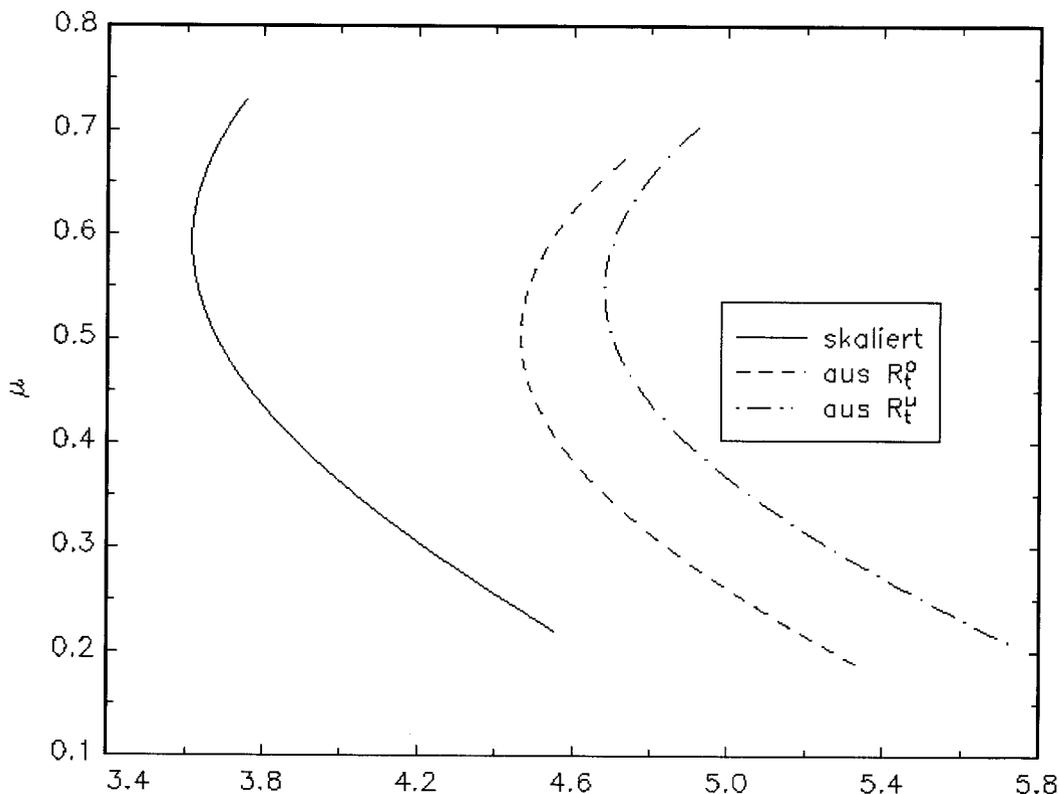
$\hat{\mu}^d$  und  $\hat{\sigma}^d$  werden aus den täglichen Renditen  $R_t^d$  geschätzt.  $\hat{Q}_{emp}^d$  ist ein empirisches Quantil von  $R_t^d$ .  $\Phi(\alpha)$  bezeichnet ein  $\alpha$ -Quantil der Standardnormalverteilung. Die Ergebnisse für diese Schätzwerte werden im nächsten Kapitel mit dem Begriff 'skaliert' gekennzeichnet. Schiefe und Kurtosis werden auch aus  $R_t^d$  geschätzt, aber nicht mit H skaliert, da sie bei Normalverteilung nicht durch den Betrachtungszeitraum verändert werden.

In der Literatur werden die Effekte der Summierung täglicher Daten unter dem Begriff 'temporal aggregation' analysiert. Dies entspricht dem Fall überlappender Renditen. Die Konstruktion von Daten, die nicht-überlappenden Renditen entsprechen, wird als 'selective sampling' bezeichnet. WEISS (1984) untersucht die Auswirkungen dieser beiden Varianten auf ARIMA Zeitreihenmodelle in theoretischer Form. ROSSANA und SEATER (1995) analysieren Aggregationseffekte empirisch im Kontext von Regressionsmodellen. Die Wirkung auf finanzwirtschaftlich relevante statistische Eigenschaften wird in diesen beiden Arbeiten nicht behandelt. Ausschliesslich dem Aspekt der Schätzung des Erwartungswerts

mehrperiodiger Renditen widmen sich KARSON und CHENG (1985).

Um die Motivation für die vorliegende Problemstellung zu illustrieren und die Problematik zu verdeutlichen, werden die drei Renditeberechnungen für die an der Wiener Börse gehandelten Aktien von EVN und ÖMV durchgeführt (tägliche Daten von 1.1.1992 bis 31.12.1996). In Tabelle 1 sind die statistischen Eigenschaften der zehntägigen Renditen ( $H = 10$ ) zusammengefasst. In Abbildung 1 sind die  $\mu - \sigma$  Kombinationen der möglichen Portfolios dieser beiden Aktien für eine Korrelation[4] von 0.6 dargestellt. Sowohl aus Tabelle 1 als auch aus Abbildung 1 wird deutlich, dass je nach gewählter Definition beträchtliche Unter-

Abbildung 1:  $\mu - \sigma$  Kombinationen der möglichen Portfolios aus EVN und ÖMV. Planungshorizont: 10 Tage,  $\mu$  und  $\sigma$  sind mit 100 multipliziert.



**Tabelle 1: Statistische Eigenschaften der zehntägigen Renditen von EVN und ÖMV**

	EVN			ÖMV		
	skaliert	aus $R_t^o$	aus $R_t^u$	skaliert	$R_t^o$	$R_t^u$
n	1304	1295	130	1304	1295	130
Mittelwert	0.729	0.679	0.703	0.220	0.189	0.209
Std.Abw.	3.755	4.752	4.921	4.552	5.327	5.722
Schiefe	0.237	-0.077	-0.114	-0.327	-0.565	-0.707
Kurtosis	6.602	3.769	4.073	8.384	5.366	5.542
5%-Quantil emp	-5.706	-6.831	-6.552	-6.926	-8.797	-10.129
5%-Quantil NV	-5.946	-7.137	-7.390	-7.419	-8.573	-9.203
Autokorrelation erster Ordnung	0.229	0.941	0.124	0.215	0.930	0.040

Mittelwert, Standardabweichung und Quantile sind mit dem Faktor 100 multipliziert.

schiede resultieren können. Ein zusätzlicher Aspekt, der dabei nicht zum Ausdruck kommt, betrifft die stark reduzierte Genauigkeit bei Verwendung nicht-überlappender Renditen, aufgrund der geringen Anzahl von Beobachtungen. Dieser Nachteil kommt bei Aggregation über längere Zeiträume noch stärker zum Tragen.

Die festgestellten Unterschiede werfen die Frage auf, welche Renditeberechnung den 'tatsächlichen' Eigenschaften am nächsten kommt. Dies kann allerdings bei empirischen Daten niemals mit Sicherheit festgestellt werden. Aus diesem Grund werden im folgenden Kapitel die tatsächlichen Eigenschaften der Renditen vorgegeben und im Rahmen einer Simulationsstudie exemplarisch untersucht, welche Ergebnisse mit den drei Varianten der Renditeberechnung erzielt werden.

### 3. Analyse

#### 3.1 Stochastische Prozesse für Preise und Renditen

Im Rahmen der Analyse wird davon ausgegangen, dass tägliche Preise zur Verfügung stehen. Aus

diesen werden Renditen berechnet, deren statistische Eigenschaften für einen Planungshorizont von  $H = 10$  Tagen geschätzt werden. Die Preise  $S_t$  beruhen auf folgender Definition

$$S_t = S_{t-1} \exp(Y_t + \mu).$$

Dies entspricht der Annahme einer Lognormalverteilung für Preise, wenn  $Y_t$  normalverteilt ist. Es werden  $m = 1000$  Zeitpfade mit je  $n = 1001$  Beobachtungen simuliert. Der Mittelwert  $\mu$  wird so gewählt, dass er einer jährlichen Rendite von 5% entspricht, d.h.  $\mu = 0.0002$ .

Für  $Y_t$  werden vier mögliche stochastische Prozesse unterschieden und simuliert. Als Referenzprozess, bei dem keine Aggregationseffekte zu erwarten sind, wird der White-Noise Prozess (WN)

$$Y_t = \sigma z_t \quad z_t \sim N(0,1)$$

verwendet.  $\sigma$  wird so gewählt, dass eine jährliche Standardabweichung der Renditen von 30% resultiert, d.h.  $\sigma \approx 0.019$ . Dies entspricht einer Standardabweichung von 0.06 über  $H = 10$  Tage. Sowohl die Wahl von  $\mu$  als auch von  $\sigma$  orientiert sich an den Renditen von EVN und ÖMV.

## Der Autoregressive Prozess (AR)

$$Y_t = 0.2Y_{t-1} + \sigma z_t \quad z_t \sim N(0,1)$$

repräsentiert den Fall, dass tägliche Renditen autokorreliert sind. Die Annahme des Werts 0.2 für den autoregressiven Koeffizienten entspricht der Autokorrelation, die bei den oben analysierten Renditezeitreihen von EVN und ÖMV, aber auch in anderen Renditezeitreihen empirisch festgestellt werden kann.

Um Abweichungen von der Normalverteilung und Heteroskedastizität zu analysieren wird der GARCH Prozess

$$Y_t = \sigma_t z_t \quad z_t \sim N(0,1) \quad (1)$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + 0.2Y_{t-1}^2 + 0.7\sigma_{t-1}^2$$

verwendet. Die Annahme der Werte 0.2 und 0.7 für die GARCH Parameter ist repräsentativ für empirisch geschätzte Parameter von Aktienrenditen und Wechselkursen.[5] Die Konstante  $a_0$  wird so gewählt, dass die unbedingte Standardabweichung 30% p.a. beträgt:

$$a_0 = \frac{250 \cdot 0.3^2}{1 - 0.2 - 0.7}$$

Wenn ein GARCH-Prozess vorliegt, sind Renditen bedingt normalverteilt, d.h. die Varianz der (Normal)Verteilung hängt auch von der realisierten Rendite der Vorperiode ab. Dies beruht auf dem Term  $0.2Y_{t-1}^2$  in Gleichung (1). Wird eine Summe derart verteilter Renditen gebildet, kann die Dichtefunktion der Summe nicht analytisch bestimmt werden. Man kann allenfalls einige tendenzielle Aussagen über die Form der Dichte machen. Aus der Arbeit von DROST und NIJMAN (1993) kann man ableiten, dass eine leptokurtische Verteilung vorliegt, d.h. die Dichte weist breitere Enden und eine höhere Konzentration um den Mittelwert auf als eine Normaldichte. Mittelwert

und Schiefe werden durch die Aggregation nicht beeinträchtigt. Zur Ergänzung und Klarstellung sei festgehalten, dass die Dichte eines GARCH-Prozesses bereits ohne Aggregation diese typische Form aufweist und dass durch Aggregation die Abweichung von der Normalverteilung noch verstärkt[6] wird.

Schliesslich wird der AR-GARCH Prozess

$$Y_t = 0.2Y_{t-1} + \sigma_t z_t \quad z_t \sim N(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + 0.2Y_{t-1}^2 + 0.7\sigma_{t-1}^2$$

verwendet, um das gemeinsame Auftreten von Autokorrelation und Heteroskedastizität untersuchen zu können. In allen vier Fällen wird angenommen, dass eine bedingte (oder unbedingte) Normalverteilung des zugrundeliegenden Zufallsprozesses  $z_t$  vorliegt.

### 3.2 Ergebnisse

Die gewählte Vorgangsweise kann wie folgt zusammengefasst werden: Zunächst werden Renditen aus simulierten Preiszeitreihen mit  $n = 1001$  Beobachtungen berechnet. Man erhält 1000 tägliche Renditen, 991 überlappende und 100 nicht-überlappende Renditen. Dann wird jede der genannten Statistiken geschätzt. Dieser Vorgang wird  $m = 1000$  Mal wiederholt. Danach werden Mittelwerte und Standardabweichungen über alle Schätzwerte aus den  $m$  Wiederholungen gebildet. Diese Werte werden in den Tabellen 2–5 zusammengefasst. In allen Tabellen sind Mittelwert, Standardabweichung und Quantile mit dem Faktor 100 multipliziert. In den Tabellen 3–5 sind die Ergebnisse nur für jene Statistiken angeführt, für die deutliche Abweichungen von den theoretisch zu erwartenden Werten auftreten. Bei Mittelwert und Schiefe ist die Identität von vorgegebenen und geschätzten Werten zu erwarten, wenn die simulierten Zufallszahlen unverzerrt und symmetrisch verteilt sind.

**Tabelle 2: Mittelwert und Standardabweichung (in runden Klammern) über 1000 Schätzwerte, wenn Renditen einem White-Noise Prozess entsprechen.**

	theoretisch*	skaliert	aus $R_t^o$	aus $R_t^u$
n		1000	991	100
Mittelwert	0.200	0.200 (0.000)	0.201 (0.046)	0.200 (0.000)
Std.Abw.	6.000	5.997 (0.000)	5.904 (0.447)	5.919 (0.570)
Schiefe	0.000	0.000 (0.000)	0.000 (0.014)	0.000 (0.000)
Kurtosis	3.000	2.988 (0.218)	2.917 (0.388)	2.823 (0.585)
5%-Quantil emp	-9.669	-9.832 (0.233)	-9.535 (0.797)	-9.786 (1.213)
5%-Quantil NV	-9.669	-9.801 (0.000)	-9.509 (0.739)	-9.536 (0.937)
Autokorrelation erster Ordnung	0.000	-0.004 (0.045)	0.895 (0.017)	-0.020 (0.140)

\*... entsprechen den der Simulation zugrundegelegten Werten.

Wenn ein WN Prozess vorliegt, sind die oben genannten Annahmen für die Zulässigkeit der Skalierung – unabhängig, identisch (normal)verteilte Renditen – erfüllt. Die Ergebnisse in Tabelle 2 bestätigen die Erwartung, dass skalierte Statistiken und jene aus (nicht) überlappenden Renditen ein sehr hohes Mass an Übereinstimmung untereinander und mit den theoretischen Werten aufweisen. Im Fall nicht-überlappender Renditen steht nur etwa ein Zehntel der Beobachtungen zur Verfügung. Dies resultiert in einigen Fällen in einer geringeren Präzision (grösseren Standardabweichung) der Schätzwerte. Überlappenden Renditen sind extrem hoch autokorreliert. Dies bedeutet im vorliegenden Fall keinen Nachteil, muss jedoch bei Signifikanztests oder in Regressionsmodellen be-

rücksichtigt werden (siehe z.B. GRANGER und NEWBOLD 1974).

Tabelle 3 zeigt, dass Standardabweichung und Quantile bei Skalierung deutlich unterschätzt werden, wenn ein AR Prozess vorliegt. In diesem Fall ist die der Skalierung zugrundeliegende Annahme der Unabhängigkeit nicht gegeben. Auf Basis überlappender Renditen erhält man unverzerrte oder wenig verzerrte Schätzwerte mit etwas höherer Präzision als mit nicht-überlappenden Renditen, die gering verzerrt sind.

Die Verzerrung bei Skalierung kann durch die theoretisch bekannte Tatsache erklärt werden, dass bei Autokorrelation die Varianz über zwei Perioden mit

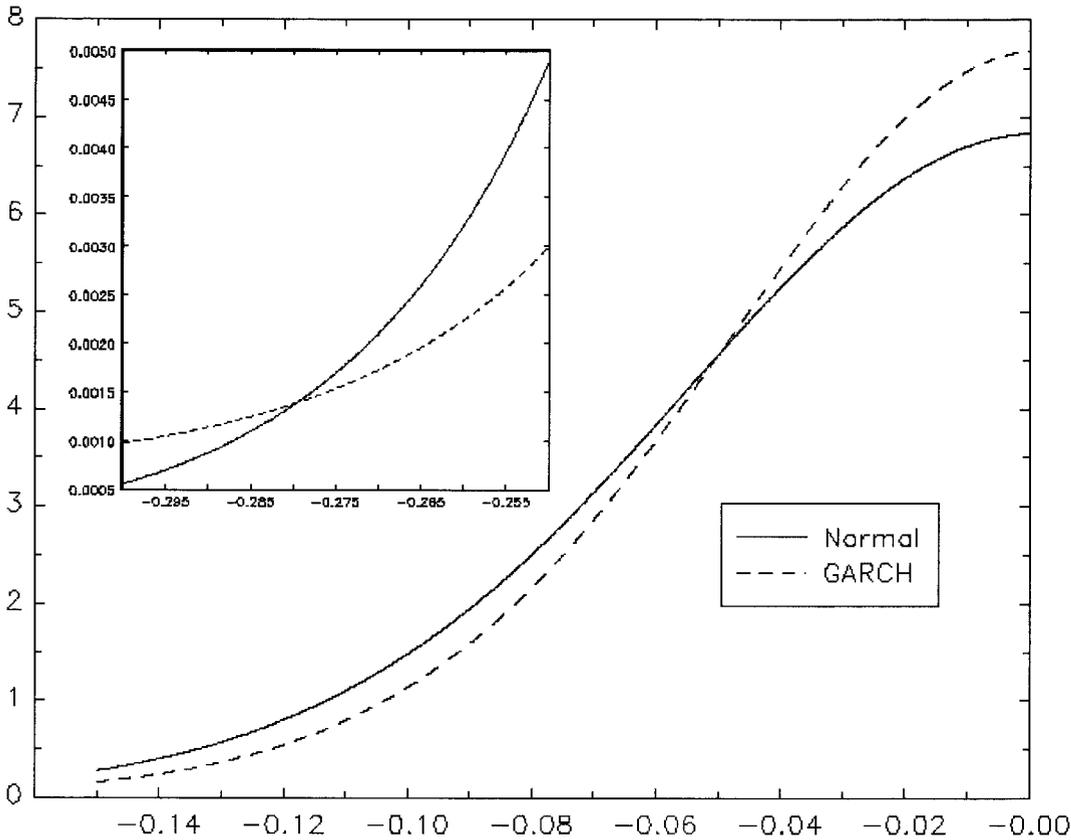
$$2[1 + \rho_1],$$

**Tabelle 3: Mittelwert und Standardabweichung (in runden Klammern) über 1000 Schätzwerte, wenn Renditen einem GARCH Prozess entsprechen.**

	theoretisch*	skaliert	AC-korr	aus $R_t^o$	aus $R_t^u$
Std.Abw.	7.194	6.114 (0.056)	7.219 (0.569)	7.219 (0.569)	7.237 (0.696)
5%-Quantil emp	-11.813	-10.036 (0.258)		-11.705 (1.020)	-12.018 (1.496)
5%-Quantil NV	-11.813	-9.994 (0.091)	-11.810 (0.935)	-11.672 (0.941)	-11.704 (1.145)

\*... entsprechen den der Simulation zugrundegelegten Werten.

Abbildung 2: Vergleich des linken Asts von Normaldichte und GARCH Dichte



über drei Perioden mit

$$3 \left[ 1 + 2 \left( \frac{2}{3} \rho_1 + \frac{1}{3} \rho_2 \right) \right]$$

und über H Perioden mit

$$H \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{H-1} \frac{H-i}{H} \rho_i \right]$$

skaliert werden muss, wobei  $\rho_i$  der Autokorrelationskoeffizient zum Lag  $i$  ist. Die Varianz wächst daher nicht mit  $H$ , sondern ist – je nach Vorzeichen und Ausmass der Autokorrelation – grösser

oder kleiner als  $H\sigma^2$ . Eine entsprechende Korrektur der Fehlschätzung im Fall skalierten Renditen ist daher im Prinzip möglich. Im vorliegenden Fall ( $\rho_i = 0.2$ ) beträgt der Korrekturfaktor 1.4375. In der Praxis muss zur Durchführung der Korrektur eine Schätzung der Autokorrelation erfolgen, wodurch die Präzision der Schätzung reduziert wird.

Wenn diese Korrektur auf Basis der geschätzten Autokorrelationen bis Lag  $H$  durchgeführt wird, erhält man die in Tabelle 3 unter 'AC-korr' angegebenen Schätzwerte. Die korrigierten Werte sind den aus  $R_i^o$  bzw.  $R_i^u$  geschätzten Werten sehr ähnlich. Die Präzision von korrigierten und

Schätzwerten aus überlappenden Renditen ist fast identisch.

Aus diesem Ergebnis kann abgeleitet werden, dass die skalierte Standardabweichung der Aktienrenditen von EVN und ÖMV in Tabelle 1 aufgrund der Autokorrelation in den täglichen Renditen unterschätzt wird. Führt man eine Autokorrelationskorrektur durch erhält man eine Standardabweichung von 4.76 für EVN und von 5.32 für ÖMV. Diese beiden Werte unterscheiden sich kaum von den Standardabweichungen, die aus  $R_t^0$  geschätzt werden (siehe Tabelle 1). Der Verlauf der  $\mu$ - $\sigma$  Kombinationen in Abbildung 1 deckt sich nach der Korrektur fast mit jener auf Basis von überlappenden Renditen und ist daher nicht gesondert eingezeichnet.

Wenn ein GARCH-Prozess vorliegt, muss die GARCH Verteilung simuliert werden, um einen Vergleich mit 'theoretischen' Werten zu ermöglichen. Dazu wurden 100000 Zeitpfade der Länge  $H = 10$  von GARCH Renditen simuliert und mehrperiodige Renditen aus der Summe über  $H$  Werte gebildet. In Tabelle 4 sind in der Spalte 'theoretisch' Standardabweichung, Kurtosis und empirische Quantile dieser 100000 Renditen angegeben. Man erkennt, dass die Kurtosis von dem Wert 3.0 bei Normalverteilung auf nunmehr 4.945 angestiegen ist, was auf die erwähnte leptokurtische Form der Dichte zurückzuführen ist. Der Rückgang der Standardabweichung von 6.0 auf 5.436 'kompensiert' den Anstieg der Kurtosis. In

Abbildung 2 wird dieser Sachverhalt illustriert, indem der linke Ast der simulierten GARCH Dichte mit der Normaldichte verglichen wird. In der Nähe des Mittelwerts und am extremen Rand (kleiner Ausschnitt) liegt die GARCH Dichte über der Normaldichte.

In Tabelle 4 erkennt man, dass in allen Varianten die Standardabweichung überschätzt und Kurtosis sowie 5%-Quantil[7] unterschätzt werden, wobei mit überlappenden Renditen die geringsten Verzerrungen resultieren. Unabhängig von der Art der Renditenberechnung wird daher die typische Form einer GARCH Verteilung – breite Enden und starke Konzentration um den Mittelwert – mit diesen Statistiken nicht ausreichend abgebildet. Es ist unklar, welche Ursache für dieses Ergebnis verantwortlich ist. Man könnte jedoch vermuten, dass die im GARCH Fall vorliegende Abhängigkeit in der Varianz einen Beitrag dazu leistet. Ähnlich wie die Autokorrelation der Renditen bei Aggregation Verzerrungen der geschätzten Standardabweichung bewirkt (siehe oben), könnte die Abhängigkeit in der Varianz auch zu Verzerrungen von Standardabweichung und Kurtosis führen.

Wenn ein AR-GARCH Prozess vorliegt, werden ähnliche Ergebnisse erzielt (siehe Tabelle 5). In allen Varianten wird die Standardabweichung überschätzt und Kurtosis sowie 5%-Quantil unterschätzt. Da auch im AR-GARCH Fall die Dichtefunktion nicht bekannt ist, werden auch hier simu-

**Tabelle 4: Mittelwert und Standardabweichung (in runden Klammern) über 1000 Schätzwerte, wenn Renditen einem AR Prozess entsprechen.**

	theoretisch*	skaliert	aus $R_t^0$	aus $R_t^1$
Std.Abw.	5.436*	5.901 (0.312)	5.806 (0.631)	5.817 (0.763)
Kurtosis	4.945*	4.076 (1.208)	4.314 (1.732)	4.026 (1.942)
5%-Quantil emp	-8.525*	-9.479 (0.440)	-9.185 (0.994)	-9.482 (1.503)
5%-Quantil NV	-8.525*	-9.643 (0.513)	-9.350 (1.039)	-9.368 (1.255)

\*... simuliert; siehe Erläuterungen im Text

**Tabelle 5: Mittelwert und Standardabweichung (in runden Klammern) über 1000 Schätzwerte, wenn Renditen einem AR-GARCH Prozess entsprechen.**

	theoretisch*	skaliert	AC-korr	aus $R_t^o$	aus $R_t^u$
Std.Abw.	6.638*	6.016 (0.312)	7.100 (0.796)	7.100 (0.631)	7.112 (0.763)
Kurtosis	4.909*	4.140 (1.208)		4.301 (1.732)	4.036 (1.942)
5%-Quantil emp	-10.465*	-9.656 (0.450)		-11.277 (1.265)	-11.623 (1.835)
5%-Quantil NV	-10.465*	-9.832 (0.532)	-11.615 (1.309)	-11.477 (1.314)	-11.499 (1.536)

\*... simuliert; siehe Erläuterungen im Text

lierte Werte zum Vergleich herangezogen. Die Korrektur der Skalierung auf Basis der geschätzten Autokorrelation ist auch hier notwendig. Das Resultat entspricht der Standardabweichung aus  $R_t^o$ , hat aber geringere Präzision.

### 3.3 Implikationen

Welche Schlussfolgerungen können aus diesen Ergebnissen gezogen werden? Nimmt man als Ausgangspunkt die beiden Renditezeitreihen von EVN und ÖMV, die autokorreliert sind und durch ein GARCH Modell beschrieben werden können, ist mit Verzerrungen bei der Schätzung von Standardabweichung, Kurtosis und Quantilen zu rechnen, egal welche Art der Renditeberechnung verwendet wird. Am ehesten ist die Verwendung von überlappenden Renditen zu empfehlen, da sie einerseits die geringsten Verzerrungen implizieren und andererseits keine Überprüfung und Korrektur von Autokorrelation erfordern.

Für den empirisch seltener anzutreffenden Fall normalverteilter und unkorrelierter Renditen (WN) ist die Skalierung von täglichen Schätzwerten aufgrund deren hoher Präzision eindeutig vorzuziehen. Wenn Grund zur Annahme besteht, dass Autokorrelation – auch in geringem Umfang, wie im hier untersuchten Fall – vorliegt, ist es am einfachsten, wenn überlappende Renditen verwendet

werden. Eine Autokorrelationskorrektur bei der Skalierung ist aufwendiger und hat keine Vorteile im Hinblick auf die erzielbare Präzision.

Ein nochmaliger Blick auf Tabelle 1 zeigt, dass im Fall der Renditen von EVN und ÖMV auch erhebliche Unterschiede in der geschätzten Schiefe und Kurtosis auftreten, je nachdem welche Renditeberechnung verwendet wird. Mit dem Untersuchungsdesign dieser Arbeit sind diese Unterschiede nicht erklärbar. Es ist unklar, welche stochastischen Eigenschaften tägliche Renditen aufweisen müssen, dass bei Aggregation derartige Effekte auftreten können. Dies zeigt die Notwendigkeit weiterführender Analysen auf.

Vorläufig kann man jedoch festhalten, dass die Berechnung mehrperiodiger Renditen vor allem dann problematisch ist, wenn Abhängigkeiten in der Varianz (d.h. Heteroskedastizität und Lep tokurtosis) vorliegen. In diesem Fall erweitert sich die Fragestellung jedoch grundsätzlich: Es stellt sich das zusätzliche Problem, welche Konsequenzen mit der unzutreffenden Annahme der Normalverteilung in den Standardansätzen der Portfolio-Planung oder Optionsbewertung verbunden sind. Umgelegt auf das Beispiel von EVN und ÖMV (siehe Abbildung 1) könnte man zwar überlappende Renditen verwenden, um eine vergleichsweise gering verzerrte Standardabweichung zu erhalten, ohne dadurch jedoch das Problem der Abweichung von der Normalverteilung gelöst zu haben.

Aus dieser Inkonsistenz zwischen empirischen Eigenschaften und Annahmen der Entscheidungskalküle kann die Überlegung abgeleitet werden, dass die typische Form der GARCH Dichte direkt im Rahmen der jeweiligen Problemstellung berücksichtigt werden sollte. Im Kontext von Portfolioentscheidungen hat dies z.B. GEYER (1995) untersucht und festgestellt, dass nur marginale Vorteile mit der aufwendigen Berücksichtigung der GARCH Verteilung gegenüber der Annahme einer Normalverteilung verbunden sind. Im Kontext der Optionsbewertung sind jedoch deutliche Unterschiede festgestellt worden (siehe z.B. GEYER und SCHWAIGER 1994).

#### 4. Zusammenfassung

Ausgangspunkt dieser Arbeit war die Notwendigkeit zur Ermittlung der statistischen Eigenschaften mehrperiodiger Renditen in finanzwirtschaftlichen Problemstellungen. Es gibt zwar verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung mehrperiodiger Renditen, über die Qualität der daraus abgeleiteten Statistiken besteht jedoch Unklarheit. Das Ziel dieser Arbeit war festzustellen, wie sich drei mögliche Berechnungsvarianten unter verschiedenen Bedingungen verhalten.

Die in der Praxis häufig anzutreffende Skalierung von Mittelwert und Varianz durch Multiplikation mit dem Planungshorizont erweist sich nur dann als geeignet, wenn die Renditen normalverteilt und unkorreliert sind. Wenn Autokorrelation vorliegt, müsste eine Korrektur bei der Skalierung der Varianz vorgenommen werden. In diesem Fall ist die Verwendung überlappender Renditen einfacher und daher vorzuziehen.

Der empirisch am häufigsten anzutreffende Fall nicht-normalverteilter sondern leptokurtisch verteilter Renditen verursacht unabhängig von der Art der Renditeberechnung verzerrte Schätzwerte für Standardabweichung, Kurtosis und Quantile. Richtung und Ausmass der Verzerrungen sind unterschiedlich und deren Ursachen sind unklar. Um diesen Sachverhalt näher zu untersuchen

müssten weitere Analysen durchgeführt werden. Dabei können auch andere Aspekte behandelt werden, wie z.B. die Bedingungen unter denen die Schiefe der Renditeverteilung durch Aggregation beeinflusst wird. Weitere Aspekte sind der Einfluss der Länge des Aggregationszeitraums  $H$  sowie die Schätzung von Korrelationen und Regressionsmodellen auf Basis verschiedener Varianten der Renditenberechnung.

**Fussnoten**

- [1] Dabei können Preise am Ende der Periode oder Durchschnitt über die Preise einer Periode verwendet werden.
- [2] Die Analyse beruht auf Simulationen, da viele Effekte nicht oder sehr schwer analytisch beschrieben werden können.
- [3] Für unabhängig, identisch verteilte Renditen ist die Summe asymptotisch normalverteilt, wenn  $H \rightarrow \infty$ .
- [4] Die empirisch aus  $R_t^d, R_t^o$  und  $R_t^u$  ermittelten Korrelationen betragen 0.6, 0.58 und 0.62. Die Effekte der unterschiedlichen Renditeberechnungen auf die Korrelation werden in dieser Arbeit nicht untersucht.
- [5] Die Schätzung von GARCH Modellen für EVN und ÖMV ergibt Werte von ca. 0.1 und 0.85.
- [6] Das Ausmass des Aggregationseffekts hängt nichtlinear von  $H$  ab (siehe DROST und NIJMAN 1993). Der Effekt nimmt zunächst bis etwa  $H=5$  zu und klingt danach langsam ab.
- [7] Ohne weitere Details zu präsentieren sei jedoch darauf hingewiesen, dass Ergebnisse der Quantilsbestimmung stark vom gewählten Niveau  $\alpha$  abhängen können, wenn  $\alpha$  klein ist.

**Literatur**

- DROST, F. C. und T. E. NIJMAN (1993): „Temporal aggregation of GARCH processes“, *Econometrica* 61, pp. 909–927.
- GEYER, A. L. J. (1995): „Anlageentscheidungen bei Abhängigkeiten in Aktienrenditen“, *Finanzmarkt und Portfolio Management* 9, pp. 482–494.
- GEYER, A. L. J. und W. S. A. SCHWAIGER (1994): „Zeitveränderliche Volatilität in der Optionsbewertung – Ein Vergleich von Black/Scholes und GARCH Preisen“, *Finanzmarkt und Portfolio Management* 8, pp. 242–248.
- GRANGER, C. W. J. und P. NEWBOLD (1974): „Spurious regressions in econometrics“, *Journal of Econometrics* 2, pp. 111–120.
- KARSON, M. J. und D. C. CHENG (1985): „Estimation of Multiperiod Expected Rates of Return When Investment Relatives Are Lognormally Distributed“, *Journal of Business and Economic Statistics* 3, pp. 104–148.
- ROSSANA, R. J. und J. J. SEATER (1995): „Temporal Aggregation and Economic Time Series“, *Journal of Business and Economic Statistics* 13, pp. 441–451.
- WEISS, A. A. (1984): „Systematic Sampling and Temporal Aggregation in Time Series Models“, *Journal of Econometrics* 26, pp. 271–281.