© Schweizerische Gesellschaft für Finanzmarktforschung (pp. 342–370)

JÜRG TOBLER UND ROGER WALDER*

Die Modellierung von Zinsrisikofaktoren in einem Value-at-Risk-Modell

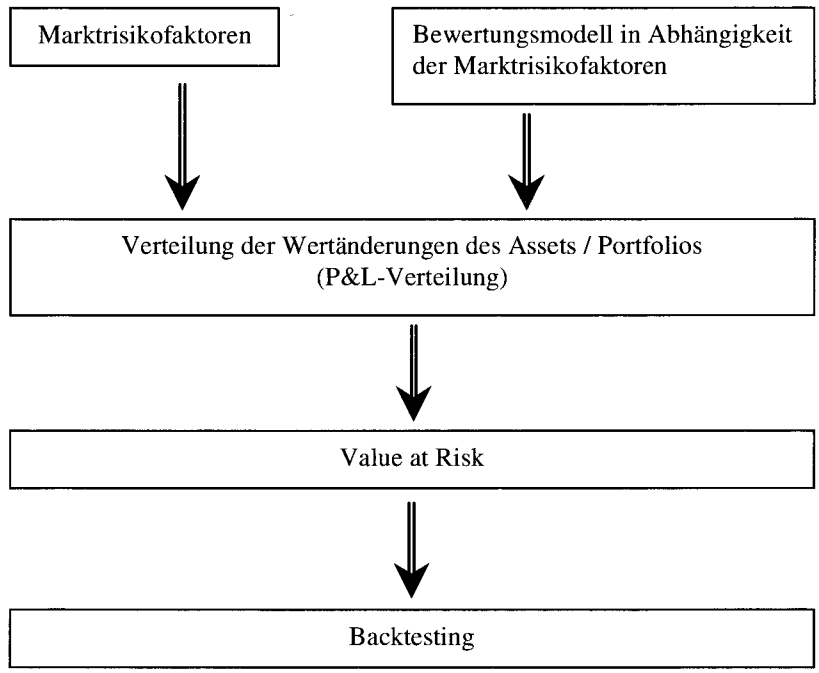
1. Einleitung

Seit dem 1. Januar 1998 müssen die Banken nicht mehr nur Kreditrisiken, sondern auch gewisse Marktrisiken mit Eigenkapital unterlegen. Diese Neuregulierung ging vom BASLER AUSSCHUSS FÜR BANKENAUFSICHT, einem Gremium der Bank für Internationalen Zahlungsausgleich, aus (BASLER AUSSCHUSS FÜR BANKENAUFSICHT (1996a,b)). In der Schweiz wurden die entsprechenden Bestimmungen in der Verordnung über die Banken und Sparkassen (BankV)[1] sowie dem Rundschreiben 97/1 der Eidgenössischen Bankenkommission (EBK-RS 97/1)[2] umgesetzt. Unter Marktrisiken versteht man die potentiellen Verluste auf Finanzanlagen aufgrund von Änderungen deren wertbestimmenden Faktoren, nämlich Zinssätzen, Aktienkursen, Wechselkursen und Rohstoffpreisen. Zins- und Aktienkursrisiken sind nur auf den Handelsbeständen der Bank (trading book) zu erfassen, wogegen Wechselkurs-, Gold- und andere Rohstoffpreisrisiken auf sämtlichen Bankpositionen (trading und banking book) ermittelt werden müssen (Art. 121, Abs. 1 BankV). Zur Bestimmung der für die Unterlegung der Marktrisiken notwendigen Eigenmittel sind zwei Verfahren zulässig, das Standard- sowie das Modellverfahren (sogenannte bankinterne Modelle). Währenddem beim Standardverfahren die Ermittlung des zu unterlegenden Eigenkapitals detailliert geregelt ist, werden für interne Modelle nur Minimalstandards aufgestellt. Im wesentlichen muss ein internes Modell täglich den Value at Risk (VaR) der relevanten Bankpositionen ermitteln und zwar für ein Konfidenzniveau von 99% und eine Halteperiode von zehn Tagen. Der so spezifizierte VaR ist der maximale Verlust, den die Bank auf ihren Positionen mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% über die nächsten zehn Handelstage nicht überschreiten wird. Basierend auf diesem maximalen Verlust werden die zu unterlegenden Eigenmittel wie folgt festgelegt (Art. 120, Abs. 2 BankV): Die erforderlichen Eigenmittel entsprechen dem höheren der zwei folgenden Beträge:

1. Dem VaR des Vortages
2. Dem Durchschnitt der täglichen VaR der vorangegangenen sechszig Handelstage, multipliziert mit dem institutsspezifischen Multiplikationsfaktor. Der Multiplikationsfaktor liegt zwischen drei und vier und hängt u.a. von der mit einem Backtesting evaluierten Prognosegenauigkeit des Modells ab.

* Die Autoren danken dem Gutachter Alfred Bühler für wertvolle Hinweise. Eine frühere Version dieses Papiers wurde unter dem Titel „Value at Risk für Zinsrisiken: Ein multivariater GARCH-Ansatz" an der 1. Tagung der Schweizerischen Gesellschaft für Finanzmarktforschung, 10./11. Oktober 1997, Universität St. Gallen, präsentiert.
Jürg Tobler und Roger Walder, Zürcher Kantonalbank, Volkswirtschaft und Risikocontrolling, Postfach, 8010 Zürich, Tel. 01 - 802 51 84 (82), Fax 01 - 802 58 07, E-mail: juerg.tobler@zkb.ch, roger.walder@zkb.ch.

Abbildung 1: Bausteine eines VaR-Modells



Ein internes Modell zur Berechnung des VaR besteht aus den in Abbildung 1 dargestellten Bausteinen. Zunächst sind die Marktrisikofaktoren sowie deren Verteilung über die Halteperiode festzulegen. Weiter ist für jede Position ein Bewertungsmodell in Abhängigkeit der Marktrisikofaktoren zu formulieren. Von diesen beiden ersten Bausteinen kann auf die Verteilung der Wertänderungen des Portfolios, die sogenannte Profit & Loss (P&L)-Verteilung, geschlossen werden. Dies ist der zentrale Baustein, denn daraus wird direkt der VaR als 99%-Quantil abgelesen. Abgeschlossen wird das VaR-Modell durch ein Backtesting-Verfahren, mit dem die Qualität der VaR-Berechnungen überprüft wird, woraus der institutsspezifische Multiplikationsfaktor abgeleitet wird. Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit ist die Modellierung der Verteilung der Risikofaktoren zinsabhängiger Positionen.

Im Gegensatz zu Aktien, Fremdwährungs- oder Rohstoffpositionen ist es nicht eine einzelne Grösse, die den Marktwert zinsabhängiger Instrumente bestimmt. Vielmehr beruht dieser auf der gesamten Zinskurve, d.h. den Zinssätzen aller Restlaufzeiten. Bei der Berechnung des VaR für Zinspositionen ist somit nicht ein einzelner, sondern eine Vielzahl von Risikofaktoren relevant. Entsprechend legt die Eidgenössische Bankenkommission (EBK) fest, dass die Zinskurve in einem internen Modell im Minimum durch sechs Laufzeitenbänder zu beschreiben ist. Zinssätze verschiedener Laufzeiten zeichnen sich dadurch aus, dass ihre Veränderungen stark korrelieren. Die EBK lässt die Berücksichtigung der Korrelationen zwischen den Zinsänderungen verschiedener Laufzeiten zu, gibt deren Modellierung jedoch in keiner Weise vor. Die Ergebnisse der empirischen Finanzmarktforschung zeigen, dass sich die Korrelationen wie auch die Varianzen der Zinsänderungen im Zeitablauf ändern; BÜHLER/ZIMMERMANN (1996) zeigen dieses Phänomen für schweizerische und deutsche Zinssätze auf. Einfa-

che Verfahren zur Modellierung zeitabhängiger Varianzen und Korrelationen beruhen auf (gewichteten) gleitenden Durchschnitten.[3] Eine Alternative dazu bildet die auf ENGLE (1982) und BOLLERSLEV (1986) zurückgehende Klasse von GARCH-Modellen. GARCH steht für Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity; eine Übersicht über verschiedene GARCH-Modelle findet sich beispielsweise bei BOLLERSLEV/ENGLE/NELSON (1994). Insbesondere für die Beschreibung zeitabhängiger Varianzen werden univariate GARCH-Modelle erfolgreich eingesetzt; z.B. schätzt WASSERFALLEN (1997) für verschiedene schweizerische Finanzmarktvariablen solche Modelle. Im hier vorliegenden Fall mehrerer Risikofaktoren ist die Dynamik einer Varianz-Kovarianz-Matrix zu modellieren, wozu multivariate GARCH-Modelle herangezogen werden (siehe z.B. ENGLE/KRONER (1995) oder ENGLE/MEZRICH (1996)). Hierbei stellt sich jedoch das Problem, dass diese bei hoher Dimension empirisch kaum schätzbar sind. Um multivariate GARCH-Modelle einsetzen zu können, muss die Anzahl der Zinsrisikofaktoren also möglichst gering gehalten werden. Dies gelingt mit Hilfe einer Faktoranalyse der Zinskurvendynamik, deren Verwendung aufgrund der EBK-Vorschriften grundsätzlich zulässig ist.

Seit der Arbeit von LITTERMAN/SCHEINKMAN (1991) hat der Einsatz von Faktoranalysen zur Reduktion der Anzahl der Zinsrisikofaktoren breite Akzeptanz gefunden; für die CHF-Zinskurve führen etwa BÜHLER/ZIMMERMANN (1996) und TOBLER (1996) Faktoranalysen durch. Dabei werden mit einem rein statistischen Verfahren Grössen, sogenannte Faktoren, bestimmt, die einen Grossteil der Zinskurvendynamik zu erklären vermögen. Die Erfahrung zeigt, dass mit zwei oder drei Faktoren anstelle von sechs oder mehr Zinssätzen die beobachtete Zinkurvendynamik gut erklärbar ist. Mit Hilfe so bestimmter Zinsrisikofaktoren kann der empirisch beobachteten Zeitabhängigkeit der Varianzen und Korrelationen der Zinsänderungen mit einem bivariaten bzw. trivariaten GARCH-Modell Rechnung getragen werden.

Im vorliegenden Papier stellen wir ein VaR-Modell für Zinsrisiken vor, das auf zwei Risikofaktoren beruht, die mit einer Faktoranalyse bestimmt werden. Die Zeitabhängigkeit der bedingten, d.h. für die nächste Halteperiode von zehn Tagen geltende Varianz-Kovarianz-Matrix dieser Risikofaktoren beschreiben wir mit einem bivariaten GARCH-Modell (Faktor-GARCH-Modell). Es zeigt sich, dass die bedingte Korrelation zwischen den beiden Zinsrisikofaktoren markant von Null verschieden ist und im Zeitablauf grossen Schwankungen unterliegt. Dies obwohl die Zinsrisikofaktoren auf lange Sicht, d.h. in ihrer unbedingten Verteilung, per Konstruktion unkorreliert sind.[4] Mit einer Monte Carlo Simulation wird untersucht, inwieweit das Faktor-GARCH-Modell in der Lage ist, die empirische Verteilung der Zinsveränderungen abzubilden. Zu Vergleichszwecken wird dem Faktor-GARCH-Modell ein einfacheres Modell gegenübergestellt, das von zeitinvariant normalverteilten, unabhängigen Zinskurvenfaktoren ausgeht (Faktor-Normal-Modell). Mit diesen beiden Modellen werden beispielhaft Backtestings gemäss den EBK-Vorschriften durchgeführt. Dabei wird insbesondere zwei Fragen nachgegegangen, nämlich wie sich die Zusammensetzung des Portfolios auf die Backtesting-Ergebnisse und damit auf den für die Ermittlung der benötigten Eigenmittel relevanten Multiplikationsfaktor niederschlagen und zweitens wie sich die Backtesting-Ergebnisse im Zeitablauf ändern können.

Der Artikel ist im weiteren wie folgt aufgebaut: Im nächsten Abschnitt wird der sogenannte Varianz-Kovarianz-Ansatz zur Ermittlung eines VaR für Zinsrisiken vorgestellt sowie das Faktor-Normal- und das Faktor-GARCH-Modell eingeführt. Im dritten Abschnitt werden die für die empirischen Untersuchungen verwendeten Daten beschrieben. In Abschnitt vier werden die Resultate der Faktoranalyse sowie der Schätzung des bivariaten GARCH-Modells präsentiert. Im fünften Abschnitt wird eine Monte Carlo Simulation des Faktor-GARCH-Modells und in Abschnitt sechs werden Backtestings der zwei VaR-Modelle

durchgeführt. In Abschnitt sieben werden Schlussfolgerungen gezogen.

2. Value at Risk für Zinspositionen

Der Value at Risk (VaR) einer Position ist gemäss BankV der maximale Verlust, der mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% über die nächsten zehn Handelstage nicht überschritten wird. Dabei kann die Position aus einem einzelnen Wertpapier oder Derivat bestehen oder ein Portfolio verschiedener Wertpapiere und Derivate sein. Da unser Augenmerk der Modellierung der Zinsrisikofaktoren gilt, beschränken wir uns auf bonitätsrisikofreie, festverzinsliche Anleihen, was uns die Verwendung eines einfachen Bewertungsmodells erlaubt. Die P&L-Verteilung kann mit verschiedenen Methoden aus der gewählten Verteilung der Risikofaktoren und dem Bewertungsmodell ermittelt werden. Wir benutzen den sogenannten Varianz-Kovarianz-Ansatz, der im folgenden vorgestellt wird; für andere Berechnungsweisen sei auf JORION (1997) verwiesen.

2.1 Value at Risk mit Varianz-Kovarianz-Ansatz

Um das VaR-Konzept einzuführen, wird in einem ersten Schritt vom einfachsten Bewertungsmodell für Anleihen, dem Durationansatz, ausgegangen. Danach ergibt sich die relative Wertänderung

$$\frac{\Delta p_{t+1}}{p_t} = \frac{p_{t+1} - p_t}{p_t}$$

einer Anleihe näherungsweise wie folgt aus ihrer Duration und Verfallrendite:

$$\frac{\Delta p_{t+1}}{p_t} \approx -D \cdot \Delta r_{t+1}. \qquad (1)$$

Dabei bezeichnet p_t den Anleihenpreis im Zeitpunkt t, D die Modified Duration und Δr_{t+1} die Veränderung der Verfallrendite über die Halteperiode $\{t, t+1\}$. Die Modified Duration gibt die prozentuale Preisänderung der Anleihe bei einer einprozentigen Veränderung ihrer Verfallrendite an. Gleichung (1) ist eine Approximation des wahren Zusammenhangs zwischen Anleihenpreis- und Zinskurven-Änderungen. Der postulierte Zusammenhang gilt nur exakt falls die Zinskurve flach ist und sich nur geringfügig parallel verschiebt; die Dynamik der Zinskurve ist in der Realität natürlich bedeutend vielfältiger. Zudem wird mit der gewählten Approximation der Zeiteffekt vernachlässigt: Die Wertänderung der Anleihe über die Halteperiode, die sich bei unveränderter Rendite aufgrund der sich verkürzenden Restlaufzeit ergibt, wird durch die Duration nicht erfasst. Der Vorteil von Gleichung (1) liegt darin, dass die Zinsrisiken auf einen Faktor, nämlich die Verfallrendite, reduziert wird.

Um basierend auf dem Bewertungsmodell (1) den VaR einer Anleihe zu bestimmen, ist für die Änderungen der Verfallrendite eine Verteilungsannahme zu treffen. Im folgenden wird davon ausgegangen, dass die Verfallrendite über die Halteperiode normalverteilt ist mit Mittelwert Null und Varianz σ^2:

$$\Delta r_{t+1} \sim N(0, \sigma^2). \qquad (2)$$

Die Varianz über die Halteperiode von 10 Handelstagen wird hier als zeitinvariant unterstellt, d.h. sie ändert sich im Zeitablauf nicht. Diese Annahme widerspricht den oben zitierten Resultaten der empirischen Finanzmarktforschung und wird im weiteren Verlauf deshalb aufgehoben werden.

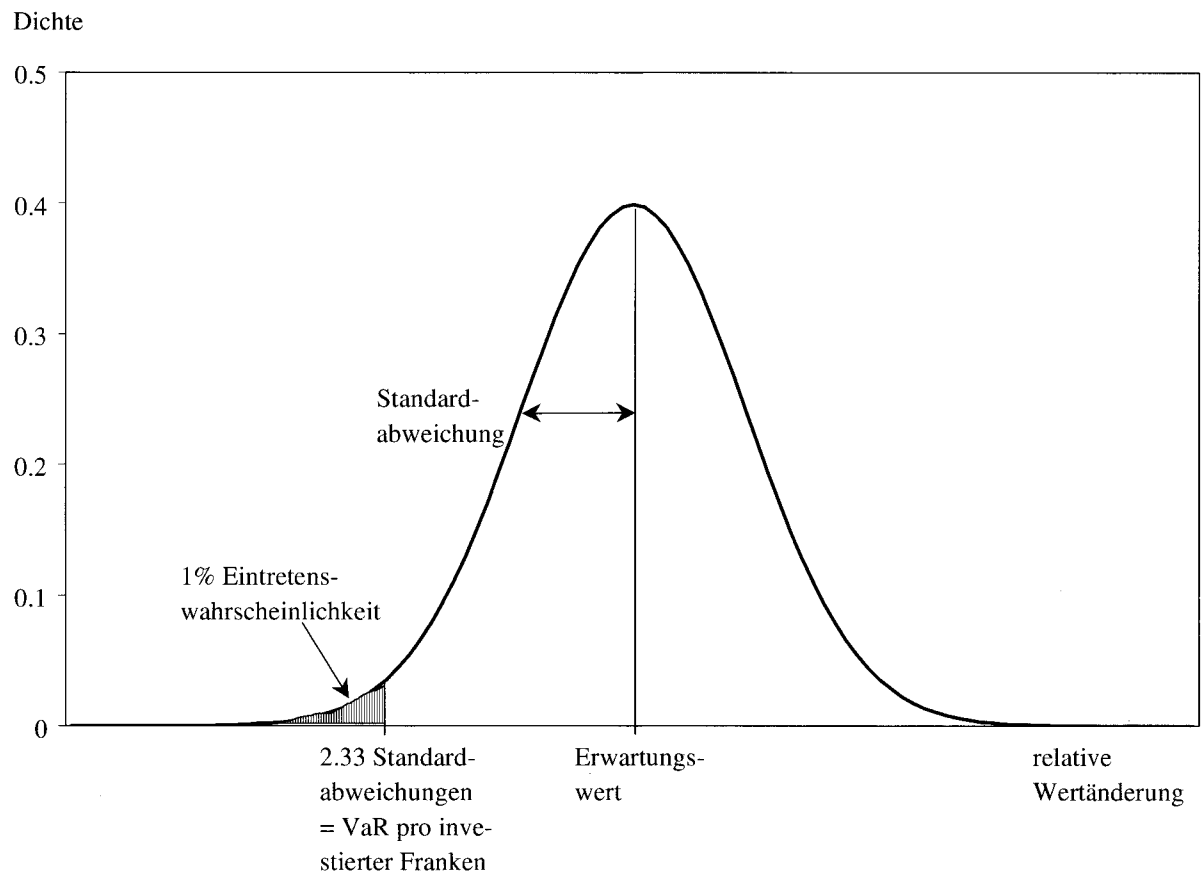
Aufgrund der in Gleichung (1) postulierten linearen Abhängigkeit der Preisänderungen vom Risikofaktor und der in (2) getroffenen Normalverteilungs-Annahme für die Verfallrendite sind die relativen Wertänderungen der Anleihe ebenfalls normalverteilt; mit anderen Worten ist die P&L-

Verteilung der Anleihe normal. In diesem Fall ergibt sich der VaR folgendermassen:

$$\mathrm{VaR}_t[p_{t+1}] = p_t\left(E_t\left[\frac{\Delta p_{t+1}}{p_t}\right] - 2.33 \cdot \mathrm{Std}_t\left[\frac{\Delta p_{t+1}}{p_t}\right]\right)$$
$$= -p_t \cdot 2.33 \cdot \mathrm{Std}_t\left[\frac{\Delta p_{t+1}}{p_t}\right]. \qquad -(3)$$

Der Erwartungwert $E_t\left[\frac{\Delta p_{t+1}}{p_t}\right]$ der relativen Wertänderungen der Anleihe ist aufgrund der bisher getroffenen Annahmen – Vernachlässigung des Zeiteffektes in Gleichung (1) sowie erwartete Änderung der Verfallrendite von Null in (2) – Null. Damit vereinfacht sich die Berechnung des VaR insofern, als er nur noch von der Standardabweichung $\mathrm{Std}_t\left[\frac{\Delta p_{t+1}}{p_t}\right]$ abhängt; diese gibt an, in welcher Bandbreite um den Erwartungswert sich die relativen Wertänderungen über die Halteperiode in 68% der Fälle bewegen.[5] Der VaR pro investiertem Franken berechnet sich nun als einseitiges Konfidenzintervall für das gewählte Sicherheitsniveau von 99% durch Multiplikation der Standardabweichung mit 2.33. Um den VaR auf dem gesamten in die Anleihe investierten Betrag zu erhalten, wird dieser Wert mit p_t multipliziert. Der Zusammenhang zwischen Standardabweichung und VaR bei normalverteilten relativen Wertänderungen ist in Abbildung 2 schematisch dargestellt.

Abbildung 2: Value at Risk bei normalverteilten Wertänderungen



Die Standardabweichung der relativen Wertänderungen der Anleihe ergibt sich aufgrund der getroffenen Annahmen aus Gleichung (1) als

$$\mathrm{Std}_t\left[\frac{\Delta p_{t+1}}{p_t}\right] = \sqrt{D^2 \cdot \sigma^2} = D \cdot \sigma .$$

Wird dieses Ergebnis in Gleichung (3) eingesetzt, so erhalten wir den VaR einer Anleihe durch folgende, einfache Formel:

$$\mathrm{VaR}_t[p_{t+1}] = -p_t \cdot 2.33 \cdot D \cdot \sigma . \qquad (4)$$

Zur Ermittlung des VaR einer Anleihe oder eines Anleihenportfolios ist in diesem einfachen Modell somit nur die Kenntnis der Modified Duration D sowie der Standardabweichung σ der entsprechenden Verfallrendite notwendig. Da der VaR bei diesem Berechungsansatz hauptsächlich von der Varianz des Risikofaktors – sowie bei einer Mehrzahl von Risikofaktoren von deren Kovarianzen – abhängt, nennt sich dieser Ansatz Varianz-Kovarianz-Ansatz.

Die getroffene Annahme, die Zinskurve sei flach und verschiebe sich über eine Halteperiode parallel, wird der Realität nicht gerecht. Die damit erzielte Reduzierung der Zinskurve auf einen Risikofaktor genügt den Anforderungen der Regulierungsbehörden deshalb nicht. In den nächsten drei Abschnitten werden auf einer Faktoranalyse basierende Modellierungen der Zinskurvendynamik vorgestellt.

2.2 Faktormodelle für die Zinskurvendynamik

Anstelle von Parallelverschiebungen wie im letzten Abschnitt wird nun für die Dynamik der Zinskurve das folgende Zweifaktormodell unterstellt:

$$\Delta r_{ta} = \mu_a + s_{a1} \cdot \Delta f_{t1} + s_{a2} \cdot \Delta f_{t2} + \eta_{ta} \qquad (5)$$

Δr_{ta} bezeichnet die Veränderung des Kassazinssatzes, d.h. der Verfallrendite einer Nullcouponanleihe der Laufzeit a, von t auf (t + 1). Die zwei Faktoren Δf_{t1} und Δf_{t2} bewegen die Kassazinssätze sämtlicher Restlaufzeiten und werden deshalb gemeinsame Faktoren genannt. Diese Faktoren sind rein statistischer Natur und keine makroökonomischen Faktoren wie Geldmenge usw. Die Kassazinssätze der verschiedenen Laufzeiten reagieren unterschiedlich stark auf Schocks in den gemeinsamen Faktoren; die unterschiedlichen Sensitivitäten der Kassazinssätze auf Faktorschocks werden durch s_{a1} und s_{a2} angegeben. Die Sensitivitäten auf Schocks in einem der Faktoren über eine Woche sind in Abbildung 3 wiedergegeben; die empirische Bestimmung der Faktoren sowie eine ausführliche Diskussion der Ergebnisse der Faktoranalyse einschliesslich einer Begründung der Beschränkung des Modells auf zwei Faktoren folgt in Abschnitt 4. Der erste Faktor bewegt sämtliche Zinssätze in dieselbe Richtung und bewirkt somit eine Veränderung des Zinsniveaus; er wird deshalb als Shift-Faktor bezeichnet. Im Gegensatz zu einer Parallelverschiebung bewirkt ein Schock im ersten Faktor jedoch je nach Laufzeit unterschiedliche Zinsveränderungen. Am kurzen Ende der Zinskurve fallen diese stärker aus als am langen Ende. Dies widerspiegelt die Beobachtung, dass kurzfristige Zinssätze stärker schwanken als langfristige. Der zweite Faktor bewegt die Zinssätze mit Laufzeiten unter zwei Jahren in die entgegengesetzte Richtung wie die längeren Zinssätze. Damit führt der zweite Faktor zu einer Drehung der Zinskurve, weshalb er üblicherweise als Twist-Faktor bezeichnet wird.

Die durch die zwei gemeinsamen Faktoren nicht erklärte Dynamik der Zinskurve wird in laufzeitenspezifischen Faktoren η_{ta} aufgefangen. Aufgrund der Bereinigung der Zinsänderungen Δr_{ta} um ihren Mittelwert μ_a weisen die beiden gemeinsamen wie die laufzeitenspezifischen Faktoren je einen Erwartungswert von Null auf.

Anstelle der Verfallrendite in Abschnitt 2.1 sind nun die beiden gemeinsamen Faktoren Shift und Twist die Zinsrisikofaktoren. Das Bewertungsmodell (1) ist damit nicht mehr zutreffend. Es kann jedoch ein analoges Bewertungsmodell in Abhän-

gigkeit der Shift- und Twist-Faktoren formuliert werden. Dieses lautet wie folgt:

$$\frac{\Delta p_{t+1}}{p_t} \approx -\varphi_1 \cdot \Delta f_{t1} - \varphi_2 \cdot \Delta f_{t2}. \qquad (6)$$

Die beiden Faktordurations φ_1 und φ_2 geben die prozentuale Änderung des Anleihenpreises bei Schocks im Shift- bzw. Twist-Faktor an. Das Bewertungsmodell (6) beruht somit wie Gleichung (1) auf dem Durationansatz, nur dass hier die Zinskurvendynamik nicht als Parallelverschiebung sondern mit einem Faktormodell beschrieben wird. Wie im letzten Abschnitt wird auch hier der Zeiteffekt vernachlässigt.

Um auf eine zur Gleichung (4) analoge VaR-Formel zu kommen, ist als nächstes für die beiden Risikofaktoren eine Verteilung anzunehmen. Wir verfolgen diesbezüglich im weiteren zwei Varianten. Ein erstes, einfaches Modell geht für beide Faktoren von einer Normalverteilung mit zeitinvarianten Varianzen aus und unterstellt, dass die Faktoren über die nächsten 10 Handelstage unkorreliert sind; wir nennen es Faktor-Normal-Modell. Im zweiten Modell wird ebenfalls von normalverteilten Faktoren ausgegangen, doch wird erstens eine bedingte Korrelation zwischen den Faktoren zugelassen und zweitens werden die Varianzen wie die Korrelation als im Zeitablauf variabel modelliert.

2.3 Das Faktor-Normal-Modell

Im Faktor-Normal-Modell werden der Shift- und Twist-Faktor als normalverteilt mit Mittelwert Null und Varianz-Kovarianz-Matrix

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

angenommen. Dabei bezeichnet σ_{11} die Varianz des Shift- und σ_{22} jene des Twist-Faktors. Die Varianz-Kovarianz-Matrix wird als zeitinvariant angenommen, d.h. sie gilt sowohl über die nächste Halteperiode von 10 Tagen wie auch über sehr lange Zeithorizonte. Die Shift- und Twist-Faktoren sind in diesem Modell unkorreliert. Dies ergibt sich aus der Eigenschaft der Zinskurvenfaktoren, über lange Zeithorizonte per Konstruktion unkorreliert zu sein (siehe Abschnitt 4.1). Da das auf den Zinskurvenfaktoren beruhende Bewertungsmodell (6) wie das einfache Durationmodell (1) linear ist, leitet sich die Formel für den VaR einer Anleihe ebenfalls aus Gleichung (3) ab. Es gilt also die Standardabweichung der relativen Wertänderungen einer Anleihe aus dem Bewertungsmodell (6) unter Berücksichtigung der eben getroffenen Verteilungsannahme für die Risikofaktoren zu bestimmen. Man erhält:

$$\mathrm{Std}_t\left[\frac{\Delta p_{t+1}}{p_t}\right] = \sqrt{\varphi_1^2 \cdot \sigma_{11} + \varphi_2^2 \cdot \sigma_{22}}\,.$$

Für den VaR folgt durch Einsetzen in Gleichung (3):

$$\mathrm{VaR}_t\left[\Delta p_{t+1}\right] = -p_t \cdot 2.33 \cdot \sqrt{\varphi_1^2 \cdot \sigma_{11} + \varphi_2^2 \cdot \sigma_{22}} \qquad (7)$$

Der VaR ergibt sich also aus den beiden Faktordurations sowie den Varianzen des Shift- und Twist-Faktors. Hinter diesen Grössen verbirgt sich eine Faktoranalyse der Zinskurvendynamik auf Basis von Gleichung (5), die in Abschnitt 4 ausführlich zur Sprache kommt. Obwohl die Formel beinahe gleich einfach ist wie die in Abschnitt 2.1 hergeleitete Gleichung (4), basiert hier der VaR auf einer wesentlich realistischeren Modellierung der Zinskurvendynamik.

2.4 Das Faktor-GARCH-Modell

In den Abschnitten 2.1 und 2.3 wurde von zeitinvarianten oder unbedingten Verteilungen für die Zinsrisikofaktoren ausgegangen. Mit anderen Worten wird für Veränderungen der Risikofaktoren über kurze und lange Zeithorizonte von derselben Verteilung ausgegangen. Dem steht jedoch

die empirische Beobachtung entgegen, dass sich die Eigenschaften der Zinskurvendynamik über eine kurze Zeitperiode, wie etwa die hier interessierende zehntägige Halteperiode, von jenen über lange Zeithorizonte unterscheiden. Insbesondere ändern sich die Varianzen und Korrelationen der Zinsänderungen bzw. der Zinskurvenfaktoren im Zeitablauf. Um diese Zeitvariabilität der Zinskurvendynamik im VaR-Modell zu erfassen, wird im folgenden mit bedingten Verteilungen gearbeitet. Diese beruhen auf sämtlichen Informationen, die bis zum aktuellen Zeitpunkt t vorliegen. Am Ende einer Halteperiode von zehn Tagen liegen neue Informationen vor, weshalb die bedingte Verteilung der Faktoren für die darauffolgende Halteperiode eine andere sein wird.

Für die beiden Zinskurvenfaktoren wird eine bedingte Normalverteilung mit Erwartungswert Null angenommen. Es wird also davon ausgegangen, dass die beiden gemeinsamen Faktoren nicht prognostizierbar sind. Dagegen wird unterstellt, dass die bedingten zweiten Momente teilweise vorhersagbar sind. Konkret wird die Entwicklung der Varianzen des Shift- und Twist-Faktors sowie der Kovarianz zwischen den beiden Faktoren über die Zeit mit einem bivariaten GARCH(1,1)-Modell beschrieben. Dabei ist sicherzustellen, dass die sich aus der gewählten Spezifikation ergebenden Varianz-Kovarianz-Matrizen positiv definit sind oder gleichbedeutend, dass die Korrelationen zwischen den beiden Faktoren immer zwischen minus und plus Eins liegen. Wir benutzen die auf BABA/ENGLE/KRAFT/KRONER (BEKK) zurückgehende Spezifikation, die für die bedingten Varianzen sowie die Kovarianz folgende Dynamik unterstellt:[6]

$$\begin{pmatrix} \Delta f_{(t+1),1} \\ \Delta f_{(t+1),2} \end{pmatrix} \Phi_t \sim N\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{(t+1),11} & \sigma_{(t+1),12} \\ \sigma_{(t+1),12} & \sigma_{(t+1),22} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{(t+1),11} = \gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2 + \alpha_{11,2}^2 \Delta f_{t1}^2 + \beta_{11,2}^2 \sigma_{t,11}$$

$$\sigma_{(t+1),12} = \gamma_{21}\gamma_{22} + \alpha_{11,2}\alpha_{22,2}\Delta f_{t1}\Delta f_{t2} + \beta_{11,2}\beta_{22,2}\sigma_{t,12}$$

$$\sigma_{(t+1),22} = \gamma_{22}^2 + \alpha_{22,2}^2 \Delta f_{t2}^2 + \beta_{22,2}^2 \sigma_{t,22} \qquad (8)$$

Der Zeitindex (t + 1) gibt an, dass sich die jeweilige Grösse auf die Halteperiode von t bis (t + 1) bezieht; dabei stehen die im Zeitpunkt t vorliegenden Informationen – bezeichnet durch das Informationsset Φ_t – zur Verfügung. Die beiden Varianzgleichungen sind analog zu univariaten GARCH(1,1)-Modellen formuliert und beruhen auf vergangenen, quadrierten Faktorschocks Δf_{t1}^2 bzw. Δf_{t2}^2 sowie den verzögerten, bedingten Varianzen $\sigma_{t,11}$ bzw. $\sigma_{t,22}$. Die bedingte Kovarianz wird ebenfalls durch eine autoregressive Komponente – $\beta_{11,2}\beta_{22,2}\sigma_{t,12}$ – sowie vergangene Faktorschocks beschrieben. Mit der Quadrierung der Koeffizienten in den beiden Varianz-Gleichungen und deren Verknüpfung in der Kovarianz-Gleichung wird unter schwachen Bedingungen sichergestellt, dass die resultierenden Varianz-Kovarianz-Matrizen positiv-definit sind.[7] Die Parameter des bivariaten GARCH(1,1)-Modells (8) können mit einem Maximum Likelihood-Verfahren geschätzt werden.

Wie im Faktor-Normal-Modell kommt auch hier das Bewertungsmodell (6) zum Einsatz, womit sich der VaR einer Anleihe wiederum aus Gleichung (3) ergibt. Aufgrund der getroffenen Verteilungsannahme für die Risikofaktoren ist jedoch die Standardabweichung der relativen Wertänderungen der Anleihe eine andere als in Abschnitt 2.3. Insbesonere ist sie aufgrund des bivariaten GARCH-Prozesses (8) zeitvariabel und wird nicht nur durch die Varianzen der Zinskurvenfaktoren beeinflusst, sondern auch durch die Kovarianz zwischen den gemeinsamen Faktoren. Sie lautet:

$$\mathrm{Std}_t\left[\frac{\Delta p_{t+1}}{p_t}\right] = \sqrt{\varphi_1^2\sigma_{(t+1),11} + \varphi_2^2\sigma_{(t+1),22} + 2\varphi_1\varphi_2\sigma_{(t+1),12}}\,.$$

Durch Einsetzen in Gleichung (3) erhält man für den VaR einer Anleihe

$$\mathrm{VaR}_t[p_{t+1}] = -p_t \cdot 2.33 \cdot \sqrt{\varphi_1^2\sigma_{(t+1),11} + \varphi_2^2\sigma_{(t+1),22} + 2\varphi_1\varphi_2\sigma_{(t+1),12}} \qquad (9)$$

Der VaR hängt also von den für die nächste Halteperiode erwarteten Varianzen und der Kovarianz ab; diese ergeben sich aufgrund der GARCH-Spezifikation in (8). Im Gegensatz dazu beruht der mit dem Faktor-Normal-Modell bestimmte VaR in Gleichung (7) auf zeitinvarianten Varianzen und die Kovarianz zwischen den gemeinsamen Faktoren wird auf Null restringiert. Wie aus Gleichung (9) hervorgeht, wird dadurch bei einer positiven bedingten Kovarianz $\sigma_{(t+1),12}$ der VaR unterschätzt und im gegenteiligen Fall überschätzt.

3. Daten

Für die empirischen Untersuchungen benutzen wir Zinssätze des Euro- und Swapmarktes vom 8. Januar 1988 bis zum 25. April 1997 mit folgenden Laufzeiten:[8]

Eurosätze: 1 Tag, 7 Tage, 1 Monat, 3, 6 und 12 Monate

Swapsätze: 2, 3, 4, 5, 7 und 10 Jahre

Bei den Eurosätzen handelt es sich um Verzinsungen von CHF-Euro-Festgeldern. Da Festgelder mit Laufzeiten bis ein Jahr Nullcoupongeschäfte sind, handelt es sich bei den Eurosätzen um Kassazinssätze, d.h. um Renditen von Nullcouponanleihen. Die Swapsätze sind dagegen mit einem Couponeffekt überlagert. Um diese in eine aus Kassazinssätzen gebildete Zinskurve einzubeziehen, müssen sie couponbereinigt werden. Dies kann mit einem Bootstrapping-Verfahren oder anhand expliziter Formeln getan werden (GRUBER/OVERBECK (1998)). Kassazinssätze für Laufzeiten, die nicht in der Stichprobe enthalten sind, werden mittels Interpolation mit einer kubischen Basissplinefunktion ermittelt.

In den nachfolgenden empirischen Untersuchungen wird mit unterschiedlichen Datenfrequenzen gearbeitet. Es wird deshalb in den entsprechenden Abschnitten auf die jeweils verwendete Frequenz hingewiesen.

4. Schätzung der Parameter der Value at Risk-Modelle

In den folgenden beiden Abschnitten werden das Faktormodell (5) sowie das bivariate GARCH(1,1)-Modell geschätzt und die empirischen Ergebnisse diskutiert. Die Schätzmethoden werden bloss kurz skizziert; für eine ausführliche Darstellung wird auf TOBLER/WALDER (1997) verwiesen.

4.1 Faktoranalyse der Zinskurvendynamik

Ziel dieses Abschnitts ist erstens, die Sensitivitäten s_{a1} und s_{a2} sowie die Faktorwerte Δf_{t1} und Δf_{t2} des Faktormodells (5)

$$\Delta r_{ta} = \mu_a + s_{a1} \cdot \Delta f_{t1} + s_{a2} \cdot \Delta f_{t2} + \eta_{ta}$$

zu ermitteln, zweitens die vorgenommene Beschränkung auf zwei Faktoren zu begründen und drittens die empirische Verteilung der Zinskurvenfaktoren zu analysieren. Von den im letzten Abschnitt beschriebenen Daten verwenden wir für die Faktoranalyse nur die zehn Laufzeiten ab einem Monat, da es sich zeigte, dass der Tages- und Wochensatz die Resultate verzerren. Es werden wöchentliche Zinsveränderungen der Periode vom 15. Januar 1988 bis 25. April 1997 verwendet. Damit stehen für jede Laufzeit 482 Zinsdifferenzen zur Verfügung.

Die Sensitivitäten und Faktorwerte werden mit einer sogenannten Hauptkomponentenanalyse ermittelt. Aus den Zinsdifferenzen der zehn in die Analyse eingehenden Laufzeiten können insgesamt zehn Hauptkomponenten oder gemeinsame Faktoren gebildet werden; in diesem Fall erklären die gemeinsamen Faktoren die beobachteten Zinsveränderungen vollständig und die spezifischen Faktoren η_{ta} sind Null. Um die Dimensionalität des Modells zu reduzieren, wird jedoch nur mit den ersten beiden gemeinsamen Faktoren gearbeitet, welche einen Grossteil der Varianz der Zinsveränderungen zu erklären vermögen (siehe weiter un-

ten). Die restlichen acht Hauptkomponenten, die einen vernachlässigbar geringen Erklärungsgehalt aufweisen, werden in den laufzeitenspezifischen Faktoren η_{ta} zusammengefasst.

Die Hauptkomponentenanalyse geht von der Korrelationsmatrix der Zinsveränderungen Δr_{ta} der verwendeten Laufzeiten a = 1,...,10 aus und zerlegt diese in Eigenvektoren und Eigenwerte. Die insgesamt zehn resultierenden Eigenvektoren sind gerade die gesuchten Sensitivitäten s_{aa}. Die Faktorwerte oder Hauptkomponenten Δf_{ta} ergeben sich als Linearkombination aus den Sensitivitäten und Zinsveränderungen:

$$\Delta f_{ta} = \sum_{b=1}^{10} \Delta r_{tb} s_{ab} \qquad a = 1,...,10;\ \forall t$$

Die Hauptkomponenten sind also eine lineare Transformation der Eigenvektoren. Da diese per Definition orthogonal zueinander stehen, sind die Hauptkomponenten in der unbedingten Verteilung unkorreliert. Diese Eigenschaft der Hauptkomponenten wird im Faktor-Normal-Modell ausgenutzt (siehe Abschnitt 2.3). Die ebenfalls anfallenden Eigenwerte geben die unbedingten Varianzen der Hauptkomponenten an. Wie angetönt werden zwecks Reduzierung der Dimensionalität nur jene Hauptkomponenten als gemeinsame Faktoren ins Modell übernommen, die einen hohen Erklärungsgehalt aufweisen; es handelt sich dabei um jene, die eine vergleichsweise hohe Varianz (bzw. Eigenwert) aufweisen. Je stärker nun die Zinsveränderungen untereinander korreliert sind, desto weniger Hauptkomponenten sind notwendig, um einen Grossteil der Gesamtvarianz der Zinsveränderungen zu erklären; letztere ist definiert als die Summe der Varianzen der einzelnen Zinsveränderungen.

Die Korrelationen zwischen den Zinsveränderungen der betrachteten Laufzeiten sind in Tabelle 1 aufgeführt. Daraus ist folgendes ersichtlich:

- Die Kassazinssätze der Laufzeiten 1 Monat bis 12 Monate (Eurosätze) weisen untereinander sehr hohe Korrelationen auf (zwischen 0.72 und 0.89).
- Die aus Swapsätzen berechneten Kassazinssätze der Laufzeiten 2 bis 10 Jahre bewegen sich noch stärker miteinander als die Eurosätze, was in Korrelationen zwischen 0.79 und 0.97 zum Ausdruck kommt.
- Die Korrelationen zwischen den Eurosätzen und den aus Swapsätzen bestimmten Kassazinssätzen sind mit Werten von 0.38 bis 0.75 deutlich tiefer.

Der Zusammenhang zwischen den Zinsveränderungen der betrachteten Laufzeiten ist also relativ hoch mit der Einschränkung, dass der Euro- und Swapmarkt je über eine gewisse Eigendynamik verfügen. Damit sollte eine geringe Anzahl von Hauptkomponenten genügen, um einen Grossteil der Gesamtvarianz der Zinsveränderungen zu erklären. Wie aus Tabelle 2 ersichtlich ist, werden rund 75% der Gesamtvarianz der Zinskurve durch den ersten Faktor erklärt. Dieser hohe Erklärungsgehalt des ersten Faktors widerspiegelt den engen Zusammenhang zwischen den einzelnen Zinsdifferenzen. Der zweite Faktor trägt gut 16% zur Erklärung der Zinskurvenvarianz bei, so dass mit den ersten beiden Faktoren ein Erklärungsanteil von 91% erzielt wird. Die Erklärungsanteile der weiteren Faktoren sind relativ gering.

Der Entscheid, mit wievielen gemeinsamen Faktoren gearbeitet werden soll, kann anhand verschiedener Kriterien gefällt werden. Nach dem KAISER-DICKMANN-Kriterium sollten nur jene Faktoren als gemeinsam betrachtet werden, die einen Eigenwert von mehr als Eins aufweisen, da diese Faktoren einen überdurchschnittlichen Anteil der Gesamtvarianz erklären. Die Eigenwerte der Faktoren sind ebenfalls in Tabelle 2 aufgeführt. Daraus ist ersichtlich, dass das angeführte Kriterium nur von den ersten beiden Faktoren erfüllt wird. Weil die Höhe der Eigenwerte von der Variablenzahl ist, werden bei geringen Variablenzahlen tendenziell zu wenige gemeinsame Faktoren gewählt, bei grossen Variablenzahlen dagegen eher zuviele.[9] Ein weiterer Test, der die Abhängigkeit von der Variablenzahl beseitigt, geht auf HORN (1965) zurück. Die von ihm vorge schlagene Vorgehensweise ist fol-

Tabelle 1: Korrelationsmatrix der Zinsveränderungen

Laufzeit	1 Monat	3 Monate	6 Monate	12 Monate	2 Jahre
1 Monat	1.00	0.87	0.79	0.72	0.57
3 Monate	0.87	1.00	0.89	0.84	0.67
6 Monate	0.79	0.89	1.00	0.88	0.74
12 Monate	0.72	0.84	0.88	1.00	0.75
2 Jahre	0.57	0.67	0.74	0.75	1.00
3 Jahre	0.49	0.59	0.67	0.68	0.95
4 Jahre	0.46	0.56	0.63	0.64	0.91
5 Jahre	0.44	0.53	0.59	0.61	0.89
7 Jahre	0.40	0.48	0.54	0.55	0.82
10 Jahre	0.38	0.47	0.52	0.53	0.79

Laufzeit	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre	7 Jahre	10 Jahre
1 Monat	0.49	0.46	0.44	0.40	0.38
3 Monate	0.59	0.56	0.53	0.48	0.47
6 Monate	0.67	0.63	0.59	0.54	0.52
12 Monate	0.68	0.64	0.61	0.55	0.53
2 Jahre	0.95	0.91	0.89	0.82	0.79
3 Jahre	1.00	0.96	0.94	0.88	0.85
4 Jahre	0.96	1.00	0.97	0.91	0.88
5 Jahre	0.94	0.97	1.00	0.93	0.91
7 Jahre	0.88	0.91	0.93	1.00	0.95
10 Jahre	0.85	0.88	0.91	0.95	1.00

gende: Man generiert eine Anzahl Matrizen von normalverteilten Zufallszahlen, welche die gleiche Dimension aufweisen, wie die in die Faktoranalyse einfliessende Datenmatrix. In unserem Fall weist die Matrix der Zinsdifferenzen 482 Zeilen (Anzahl Beobachtungen) und 10 Spalten (Anzahl Laufzeiten) auf. Wir erstellen 1000 solche Matrizen von normalverteilten Zufallszahlen und berechnen je die Korrelationsmatrix sowie die Eigenwerte. Die Durchschnitte über die nach ihrer Grösse geordneten Eigenwerte stellen eine Schätzung der Eigenwerte dar, wenn zwischen den einzelnen Variablen nur Zufallskorrelationen bestehen. Daraus ergibt sich folgendes Kriterium für die Anzahl gemeinsamer Faktoren: Es sollten nur jene Faktoren als gemeinsam betrachtet werden, deren Eigenwerte grösser als die entsprechenden Mittelwerte der Eigenwerte der Zufallszahlen sind; denn nur diese repräsentieren eine gemeinsame Dynamik der Zinssätze, die über eine reine Zufallskorrelation hinausgeht. Weil beim HORN-Test von normalverteilten Faktoren ausgegangen wird, die wahre Verteilung der Faktoren jedoch nicht bekannt ist, handelt es sich wie beim KAISER-

Tabelle 2: Erklärungsanteile und Eigenwerte der Zinskurvenfaktoren

	Anteil der erklärten Gesamtvarianz	Eigenwerte	Simulierte mittlere Eigenwerte
Faktor 1	74.56%	7.46	1.26
Faktor 2	16.47%	1.65	1.18
Faktor 3	3.15%	0.31	1.12
Faktor 4	1.99%	0.20	1.07
Faktor 5	1.16%	0.12	1.02
Faktor 6	0.82%	0.08	0.97
Faktor 7	0.71%	0.07	0.93
Faktor 8	0.51%	0.05	0.88
Faktor 9	0.38%	0.04	0.83
Faktor 10	0.26%	0.03	0.77

Die Gesamtvarianz ist definiert als die Summe der Varianzen der einzelnen Zinsveränderungen.

DICKMANN-Kriterium nur um eine Indikation. In Tabelle 2 sind die simulierten mittleren Eigenwerte der Zufallszahlen aufgeführt. Daraus geht hervor, dass auch gemäss dem HORN-Kriterium nur die ersten zwei Faktoren als gemeinsam zu betrachten sind. Aufgrund dieser beiden Kriterien beschränken wird das Faktormodell auf zwei gemeinsame Faktoren.

Die Sensitivitäten der ersten beiden Faktoren sind in Abbildung 3 wiedergegeben und wurden bereits in Abschnitt 2.2 besprochen. In Ergänzung dazu sei darauf hingewiesen, dass der Drehpunkt des Twist-Faktors gerade zwischen dem Euro- und Swapmarkt liegt. D.h. der zweite Faktor bewegt die Euro- und Swapsätze in die entgegengesetzte Richtung und widerspiegelt damit das aus der Korrelationsmatrix ersichtliche Eigenleben der beiden Segmente.

Abbildung 3: Sensitivitäten der Zinsveränderungen auf die Zinskurvenfaktoren

Im Faktor-Normal-Modell wird für die unbedingte Verteilung der beiden gemeinsamen Faktoren eine Normalverteilung angenommen. Diese Annahme lässt sich aufgrund der empirisch ermittelten Werte für die beiden Zinskurvenfaktoren überprüfen. Deren Verlauf über die 482 Wochen vom 15. Januar 1988 bis zum 25. April 1997 ist in Abbildung 4 wiedergegeben. Zur Überprüfung der Normalitätsannahme wurden verschiedene Kennziffern berechnet, die in Tabelle 3 aufgeführt sind. Die empirisch bestimmten dritten und vierten Momente der unbedingten Verteilung der beiden Zinskurvenfaktoren weichen von den für eine Normalverteilung erwarteten Werten ab: Die Schiefe ist nicht Null wie bei einer Normalverteilung, sondern für den ersten Faktor leicht negativ (–0.05) und für den Twist-Faktor positiv (0.12). Die Kurtosis liegt für beide Faktoren bei vier und ist damit deutlich grösser als drei, wie dies bei einer Normalverteilung der Fall ist. Die hohe Kurtosis wird auch durch die Sigma-Quantile unterstrichen: Innerhalb von plus/minus einer Standardabweichung liegen mit rund 71% bzw. 76% deutlich mehr Realisationen als bei einer normalverteilten Zufallsvariablen (68%). Demgegenüber liegen zwischen einer und zwei Standardabweichungen weniger Realisationen (23% bzw. 19% für den ersten bzw. zweiten Faktor) als bei einer Normalverteilung (27%); über zwei Standardabweichungen liegen wiederum mehr Realisationen (bei beiden Faktoren 5.8%) als bei einer normalverteilten Zufallsvariablen (4.5%). Diese Verschiebung von Wahrscheinlichkeitsmasse vom Bereich zwischen einer und zwei Standardabweichungen in die Mitte und in die beiden Enden ist typisch für leptokurtische Verteilungen, d.h. Verteilungen mit Überschuss-Kurtosis. Der BERA-JARQUE-Test auf Normalität einer Zufallsvariablen, der auf den dritten und vierten Momenten beruht, lässt mit Testwerten von 21.2 bzw. 21.8 für die beiden Faktoren eine Ablehnung der Normalitätsannahme auf dem 1%-Signifikanzniveau zu.

Tabelle 3: Empirische Verteilung der Zinskurvenfaktoren

		Standard-Normal-verteilung	Shift-Faktor	Twist-Faktor
Mittelwert		0	0	0
Standardabweichung		1	2.73	1.28
Schiefe		0	–0.05	0.12
Kurtosis		3	4.02	4.02
Bera-Jarque-Testwert		–	*21.20*	*21.82*
Anteil Realisationen	innerhalb plus / minus 1 Sigma	68.26%	71.16%	75.52%
	zwischen 1 und 2 Sigma	27.18%	23.03%	18.67%
	über 2 Sigma	4.56%	5.81%	5.81%

kursiv: auf dem 1%-Niveau signifikant

Aufgrund der angeführten Tests ist also davon auszugehen, dass die unbedingte Verteilung der beiden Zinskurvenfaktoren nicht normal ist. Das Faktor-Normal-Modell, das sowohl für die bedingte wie die unbedingte Verteilung von einer Normalverteilung ausgeht, vermag somit die empirische Verteilung der Zinskurvenfaktoren nur unzureichend abzubilden. Demgegenüber geht das Faktor-GARCH-Modell nur für die bedingte Verteilung der Zinskurvenfaktoren von einer Normalverteilung aus. Die zeitlichen Abhängigkeiten der zweiten Momente generieren jedoch in der unbedingten Verteilung eine gewisse Überschuss-Kurtosis. Abgesehen von der Modellierung der Zeitabhängigkeit der bedingten Varianz-Kovarianz-Matrix der Zinskurvenfaktoren zeigt sich hier ein weiterer Vorteil des Faktor-GARCH-Modells. In Abschnitt 5 wird mit einer Monte Carlo Simulation überprüft werden, ob das GARCH-Modell genügend Überschuss-Kurtosis zu generieren vermag oder nicht.

4.2 Schätzung des bivariaten GARCH(1,1)-Modells

Basierend auf den im letzten Abschnitt bestimmten Zeitreihen der beiden gemeinsamen Faktoren Δf_{t1} und Δf_{t2} (siehe Abbildung 4) werden die Parameter des bivariaten GARCH(1,1)-Modells (8)

$$\begin{pmatrix} \Delta f_{(t+1),1} \\ \Delta f_{(t+1),2} \end{pmatrix} \Big| \Phi_t \sim N\begin{pmatrix} 0 & \sigma_{(t+1),11} & \sigma_{(t+1),12} \\ 0' & \sigma_{(t+1),12} & \sigma_{(t+1),22} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{(t+1),11} = \gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2 + \alpha_{11,2}^2 \Delta f_{t1}^2 + \beta_{11,2}^2 \sigma_{t,11}$$

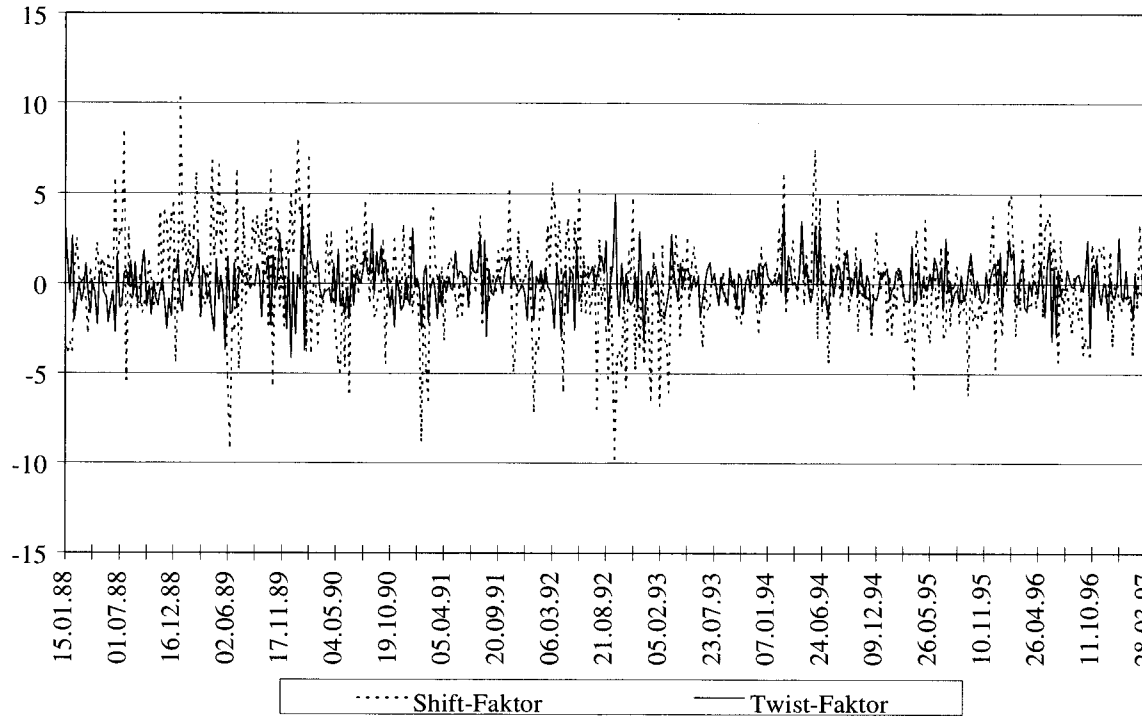
$$\sigma_{(t+1),12} = \gamma_{21}\gamma_{22} + \alpha_{11,2}\alpha_{22,2}\Delta f_{t1}\Delta f_{t2} + \beta_{11,2}\beta_{22,2}\sigma_{t,12}$$

$$\sigma_{(t+1),22} = \gamma_{22}^2 + \alpha_{22,2}^2 \Delta f_{t2}^2 + \beta_{22,2}^2 \sigma_{t,22}$$

mit einem Maximum Likelihood-Verfahren geschätzt. Die geschätzten Parameter, deren Standardfehler sowie die dazugehörigen *t*-Statistiken sind in Tabelle 4 zusammengefasst. Daraus geht hervor, dass abgesehen von zwei Parametern aus den Absolutgliedern alle geschätzten Parameter statistisch signifikant von Null verschieden sind. Um zu überprüfen, ob die Modellierung einer zeitabhängigen Varianz-Kovarianz-Matrix der Zinskurvenfaktoren den Erklärungsgehalt statistisch signifikant erhöht, wird ein Likelihood-Ratio-Test durchgeführt. Dabei wird das bivariate GARCH-Modell mit einem restringierten Modell verglichen, wobei in letzterem die GARCH-Parameter $\alpha_{11,2}$, $\alpha_{22,2}$, $\beta_{11,2}$ und $\beta_{22,2}$ auf Null gesetzt werden. Die Varianz-Kovarianz-Matrix der Zinskurvenfaktoren im restringierten Modell ist somit zeitinvariant und abgesehen von einer möglicherweise von Null verschiedenen Kovarianz identisch mit jener des Faktor-Normal-Modells. Die aus den Schätzresultaten des unrestringierten und restringierten Modells gebildete Likelihood-Ratio beträgt 48.27 und übersteigt den für das 1%-Signifikanzniveau geltenden kritischen Wert von 13.27 deutlich.[10] Die Modellierung einer zeitabhängigen Varianz-Kovarianz-Matrix mit einem bivariaten GARCH(1,1)-Prozess erhöht somit den Erklärungsgehalt des Faktormodells signifikant. Mit anderen Worten vermag das Faktor-GARCH-Modell die Dynamik der Zinskurve besser zu beschreiben als das Faktor-Normal-Modell.

Hinweise auf die Stabilität des geschätzten GARCH-Prozesses erhält man durch die Bestimmung der unbedingten Varianz-Kovarianz-Matrix der Zinskurvenfaktoren, die durch das bivariate GARCH(1,1)-Modell impliziert wird.[11] Führt die aus den geschätzten GARCH-Parametern ermittelte unbedingte Varianz-Kovarianz-Matrix auf Werte, die mit der empirisch ermittelten Varianz-Kovarianz-Matrix vergleichbar sind, so lässt sich daraus schliessen, dass das geschätzte GARCH-Modell eine zeitlich stabile Dynamik der bedingten Varianz-Kovarianz-Matrix darstellt. Die aus dem geschätzten GARCH-Prozess berechnete unbedingte Varianz des ersten Zinskurvenfaktors ist mit 7.44 praktisch identisch mit dem empirisch ermittelten Wert von 7.46. Die durch den GARCH-Prozess implizierte unbedingte Varianz des zweiten Faktors ist mit 1.49 etwas tiefer als die empirisch bestimmte (1.65). Die unbedingte Korrelation zwischen den beiden Zinskurven-

Abbildung 4: Faktorwerte der Zinskurvenfaktoren



faktoren beträgt per Konstruktion Null; sie wird vom GARCH-Modell mit 0.17 überschätzt. Insgesamt weisen diese Resultate jedoch auf eine weitgehend stabile Schätzung des GARCH-Modells hin.

In den Abbildungen 5 bis 7 sind die geschätzten bedingten zweiten Momente der beiden Zinskurvenfaktoren zusammen mit einem kurz- und einem langfristigen Zinssatz dargestellt. Die annualisierte, bedingte Volatilität des Shift-Faktors nimmt in Zeiten ausgeprägter Änderungen des Zinsniveaus stark zu (Abbildung 5). Die bedingte Volatilität des Twist-Faktors erhöht sich bei starken Drehungen der Zinskurve, wie beispielsweise um den

Tabelle 4: Schätzresultate für das bivariate GARCH(1,1)-Modell (8)

	γ_{11}	γ_{21}	γ_{22}	$\alpha_{11,2}$	$\alpha_{22,2}$	$\beta_{11,2}$	$\beta_{22,2}$
Schätzwert	0.67	0.14	0.32	0.33	0.17	0.91	0.95
Standardfehler	0.14	0.06	0.17	0.05	0.05	0.03	0.04
t-Wert	4.71***	2.25**	1.91*	7.24***	3.53***	36.33***	22.93***

* signifikant auf dem 10%-Niveau
** signifikant auf dem 5%-Niveau
*** signifikant auf dem 1%-Niveau

Abbildung 5: Bedingte Volatilität des Shift-Faktors

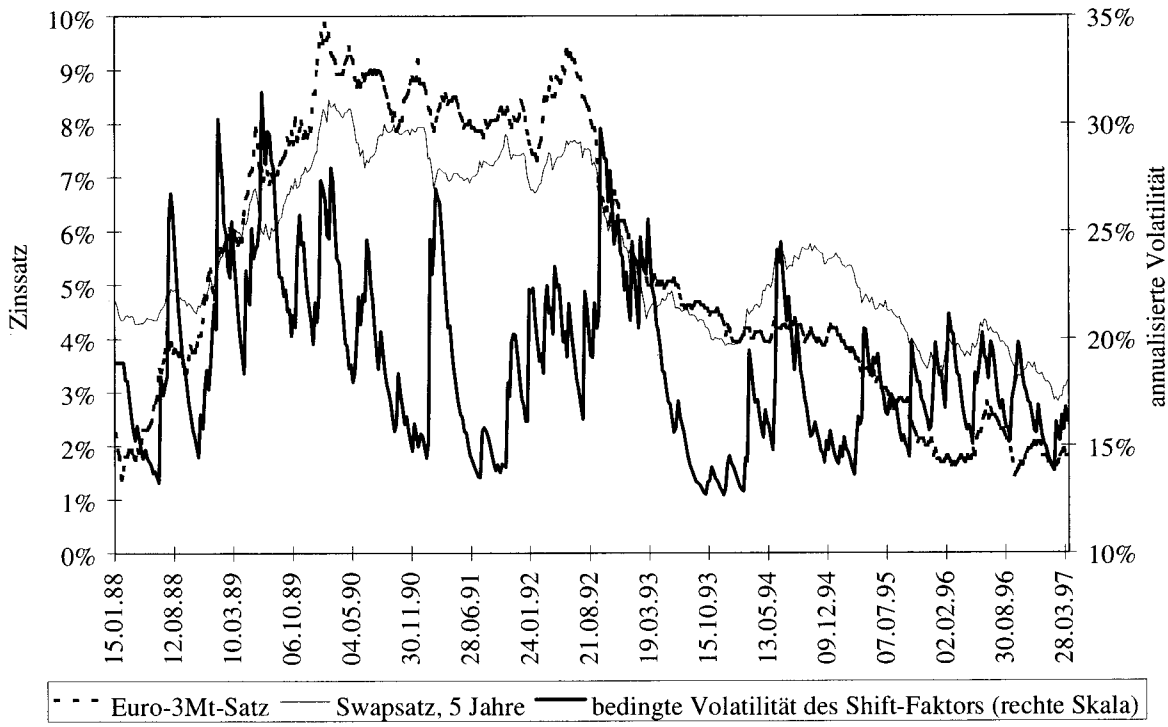


Abbildung 6: Bedingte Volatilität des Twist-Faktors

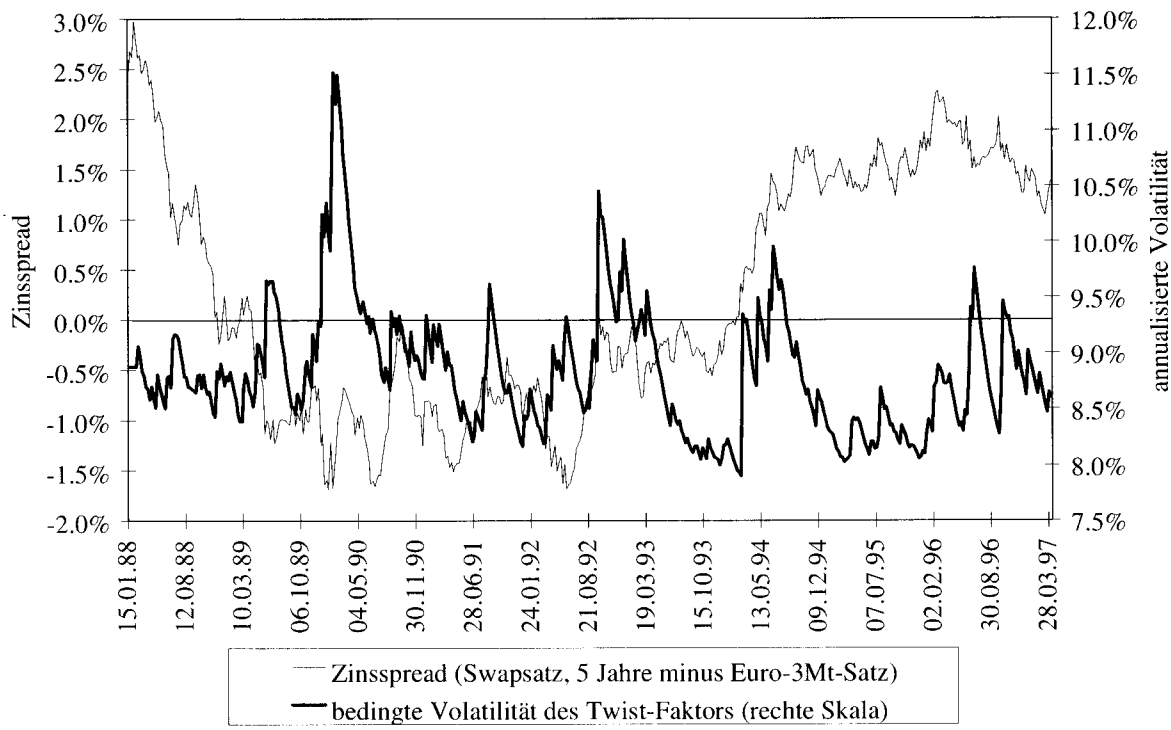
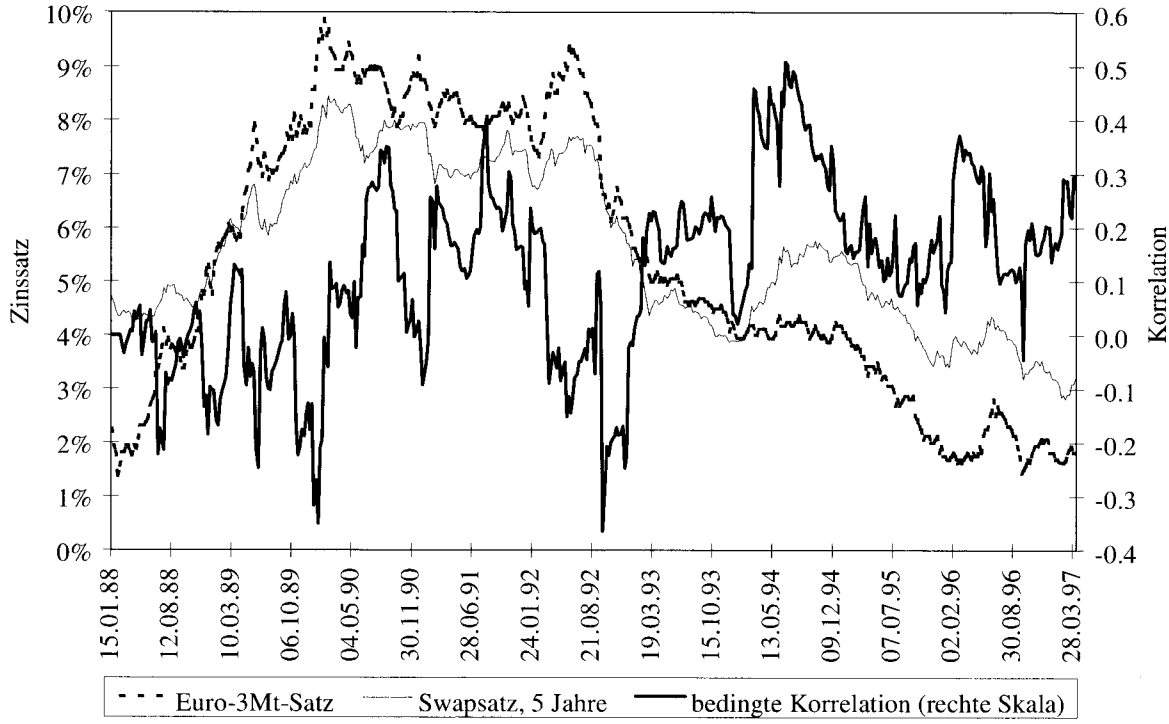


Abbildung 7: Bedingte Korrelation zwischen dem Shift- und Twist-Faktor



Jahreswechsel 1989/1990 (Abbildung 6). Der Spread zwischen dem fünfjährigen Swapsatz und dem Dreimonatssatz sank im Dezember 1989 von –0.7% auf –1.6%, d.h. die Zinskurve wurde deutlich inverser. Im Verlauf des Februars 1990 verflachte sich die Zinskurve wieder, was sich im Anstieg des Spreads auf das ursprüngliche Niveau von –0.7% ausdrückt. Mit diesen ausgeprägten Drehungen der Zinskurve einher ging eine vergleichsweise markante Zunahme der bedingten Volatilität des Twist-Faktors von 9% auf 11.5%. Die bedingte Korrelation zwischen den Zinskurvenfaktoren variiert zwischen –0.36 und +0.51 und ist somit deutlich von Null verschieden und im Zeitablauf starken Schwankungen unterworfen (Abbildung 7). Ausgehend von einer normal geneigten Zinskurve (d.h. die Langfristzinsen sind höher als die Kurzfristzinsen) bedeutet eine negative Korrelation, dass ein steigendes Zinsniveau mit einer sich verflachenden Zinskurve einhergeht; bei einer positiven Korrelation ist dagegen eine Erhöhung des Zinsniveaus mit einer steiler werdenden Zinskurve verbunden. Letzteres ist z.B. im Jahre 1994 klar erkennbar. Die Kapitalmarktsätze – in der Abbildung repräsentiert durch den fünfjährigen Swapsatz – stiegen bei praktisch konstant tief bleibenden Geldmarktsätzen kräftig an, was sich in hohen positiven Korrelationen zwischen den Zinskurvenfaktoren widerspiegelt.

5. Simulation des Faktor-GARCH-Modells

In den letzten Abschnitten wurden zwei Modelle zur Beschreibung der Zinskurvendynamik auf der Basis einer Faktoranalyse vorgestellt. Das erste – wir nennen es Faktor-Normal-Modell – geht von zeitinvariant, unabhängig normalverteilten Zins-

kurvenfaktoren aus. Im zweiten Modell wird die bedingte Varianz-Kovarianzmatrix der zwei Zinskurvenfaktoren mit einem bivariaten GARCH-Modell beschrieben, weshalb es Faktor-GARCH-Modell genannt wird. Die vom Faktor-Normal-Modell generierten Zinsveränderungen sind sowohl über eine Halteperiode wie auch über lange Zeitperioden normalverteilt. Demgegenüber sind die vom Faktor-GARCH-Modell erzeugten Zinsveränderungen nur über die nächste Halteperiode normalverteilt; über längere Zeithorizonte dagegen sind die Zinsveränderungen leptokurtisch, d.h. grosse Zinsveränderungen sind wahrscheinlicher als bei einer Normalverteilung zu erwarten wäre. Die empirisch, d.h. über eine längere Zeitperiode ermittelte Verteilung der Zinsveränderungen ist tatsächlich leptokurtisch (siehe BÜHLER/ZIMMERMANN (1996)). Entsprechend weist auch die empirische Verteilung der Zinskurvenfaktoren eine gewisse Überschuss-Kurtosis auf (siehe Abschnitt 4.1). Aus diesem Grund bildet das Faktor-GARCH-Modell die Zinskurvendynamik besser ab als das Faktor-Normal-Modell. Es stellt sich jedoch die Frage, ob das Faktor-GARCH-Modell genügend Überschuss-Kurtosis generiert oder nicht. Diese Frage wird im folgenden mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation beantwortet.[12]

Das Faktor-GARCH-Modell für die Veränderung Δr_{ta} des Zinssatzes der Laufzeit a über die Zeitperiode (t – 1) bis t lautet gemäss Gleichung (5):

$$\Delta r_{ta} \approx \mu_a + s_{a1}\Delta f_{t1} + s_{a2}\Delta f_{t2}\,.$$

Die beiden Zinskurvenfaktoren Δf_{t1} und Δf_{t2} werden dabei als bedingt normalverteilt mit Mittelwert Null und der Varianz-Kovarianz-Matrix

$$\begin{pmatrix} \sigma_{t11} & \sigma_{t12} \\ \sigma_{t12} & \sigma_{t22} \end{pmatrix}$$

angenommen, die dem in (8) beschriebenen bivariaten GARCH-Prozess folgt. Wir untersuchen mit einer Monte Carlo Simulation, inwiefern dieses Modell in der Lage ist, die empirische Verteilung der historisch beobachteten Zinsveränderungen zu replizieren. Dabei gehen wir von derselben Stichprobe aus, wie wir sie in Abschnitt 4.1 für die Faktoranalyse benutzt haben. Diese besteht aus je 482 Zinsveränderungen für die Laufzeiten 1 Monat, 3 Monate, 6 Monate, 12 Monate, 2 bis 5 Jahre, sowie 7 und 10 Jahre.

Für die angeführten Laufzeiten simulieren wir je 1'000 Pfade von Zinsveränderungen mit jeweils 482 Realisationen. Dabei ist der durch das GARCH-Modell vorgegebenen Zeitvariabilität der Varianzen sowie der im Zeitablauf schwankenden Korrelation Rechnung zu tragen.[13] Für jeden simulierten Pfad von Zinsveränderungen wurden die folgenden Kennziffern berechnet, die in Tabelle 5 zusammengestellt sind: Die ersten vier Verteilungsmomente, d.h. Mittelwert, Standardabweichung, Schiefe und Kurtosis, sowie der Anteil der Realisationen innerhalb von plus/minus einer Standardabweichung, der Anteil Realisationen zwischen einer und zwei Standardabweichungen und der Anteil Realisationen über zwei Standardabweichungen. Für jede dieser Kennziffern wurde der Durchschnitt über die 1'000 Simulationspfade gebildet, woraus Schätzwerte für die unbedingte Verteilung der simulierten Zinsveränderungen resultieren. Diese Werte können mit den entsprechenden Kennziffern für die historische Stichprobe von Zinsänderungen verglichen werden. Dabei zeigt sich, inwiefern das unterstellte Faktormodell in der Lage ist, die beobachtete unbedingte Verteilung der Zinsänderungen wiederzugeben. Weiter wurde für jede Kennziffer die Standardabweichung über die 1'000 Simulationspfade bestimmt. Eine hohe Standardabweichung bedeutet einerseits, dass der Durchschnittswert einen hohen Schätzfehler aufweist. Andererseits bedeutet eine hohe Standardabweichung eine hohe Wahrscheinlichkeit, dass das Modell in der Lage ist, die historischen Verteilungsmomente zu generieren, auch wenn der simulierte Durchschnittswert sich deutlich vom historischen Mittel unterscheidet (VETZAL (1997), S. 182).

Tabelle 5: Simulationsresultate für das Faktor-GARCH-Modell

		1-Monats-satz	3-Monats-satz	6-Monats-satz	12-Monats-satz	2-Jahres-satz	3-Jahres-satz	4-Jahres-satz	5-Jahres-satz	7-Jahres-satz	10-Jahres-satz
Mittelwert	Mittel	–0.0009%	–0.0021%	–0.0028%	–0.0031%	–0.0039%	–0.0040%	–0.0038%	–0.0035%	–0.0029%	–0.0022%
	Stabw.	0.0080%	0.0067%	0.0062%	0.0056%	0.0061%	0.0062%	0.0059%	0.0056%	0.0052%	0.0050%
	hist. beob.	–0.0010%	–0.0020%	–0.0027%	–0.0030%	–0.0036%	–0.0036%	–0.0034%	–0.0031%	–0.0026%	–0.0019%
Standardabweichung	Mittel	0.1845%	0.1525%	0.1420%	0.1271%	0.1356%	0.1365%	0.1303%	0.1238%	0.1134%	0.1091%
	Stabw.	0.0063%	0.0053%	0.0050%	0.0046%	0.0051%	0.0050%	0.0048%	0.0045%	0.0041%	0.0039%
	hist. beob.	0.2158%	0.1676%	0.1563%	0.1435%	0.1356%	0.1308%	0.1231%	0.1163%	0.1080%	0.1056%
Schiefe	Mittel	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
	Stabw.	0.15	0.16	0.17	0.17	0.18	0.17	0.17	0.17	0.16	0.16
	hist. beob.	0.14	0.15	–0.09	0.05	–0.08	–0.05	0.01	–0.09	0.06	–0.03
Kurtosis	Mittel	3.32	3.41	3.50	3.54	3.62	3.55	3.51	3.48	3.44	3.43
	Stabw.	0.42	0.47	0.53	0.56	0.59	0.54	0.51	0.50	0.47	0.46
	hist. beob.	4.12	5.01	5.08	5.37	4.02	4.61	4.49	4.25	4.81	4.73
Anteil Realisationen innerhalb plus / minus 1 Sigma	Mittel	69.32	69.53	69.71	69.83	70.00	69.87	69.81	69.75	69.66	69.63
	Stabw.	1.50	1.50	1.54	1.56	1.58	1.55	1.53	1.50	1.49	1.50
	hist. beob.	73.03	69.71	72.61	75.10	72.82	74.69	75.31	73.86	74.07	75.73
Anteil Realisationen zwischen 1 und 2 Sigma	Mittel	25.99	25.75	25.57	25.42	25.24	25.38	25.46	25.54	25.65	25.68
	Stabw.	1.84	1.84	1.85	1.86	1.86	1.87	1.85	1.83	1.83	1.83
	hist. beob.	21.37	24.07	21.99	17.43	20.95	19.09	18.88	20.33	19.92	18.26
Anteil Realisationen über 2 Sigma	Mittel	4.70	4.72	4.72	4.75	4.76	4.75	4.73	4.72	4.70	4.69
	Stabw.	0.63	0.64	0.64	0.64	0.64	0.66	0.65	0.64	0.65	0.65
	hist. beob.	5.60	6.22	5.39	7.47	6.22	6.22	5.81	5.81	6.02	6.02

Mittel: Durchschnitt über 1'000 Simulationen mit je 482 Beobachtungen
Stabw.: Standardabweichung des Mittels über die Simulationen
hist. beob.: Kennziffer für die historische Stichprobe

Die Mittelwerte der Zinsveränderungen werden vom Faktor-GARCH-Modell für alle Laufzeiten sehr gut repliziert; die Standardabweichung der simulierten Mittelwerte ist jedoch relativ hoch. Das zweite Moment wird nicht nur im Durchschnitt über die 1'000 Simulationspfade vom Modell gut wiedergegeben, sondern hier ist auch die Standardabweichung gering. Die bei allen Laufzeiten empirisch beobachtete Schiefe vermag das Faktor-GARCH-Modell nicht zu generieren; dies kann aufgrund des gewählten, symmetrischen GARCH-Modells, das Zinserhöhungen und -senkungen mit gleicher Wahrscheinlichkeit generiert, auch nicht erwartet werden. Die empirisch beobachtete Schiefe liegt jedoch bei allen Laufzeiten innerhalb einer Standardabweichung der simulierten Werte. Wie erwartet generiert das Faktor-GARCH-Modell eine gewisse Überschuss-Kurtosis. Diese liegt im Schnitt über die 1'000 Simulationen je nach Laufzeit zwischen 0.3 und 0.6 und ist damit deutlich geringer als die in der Realität beobachtete. Die empirisch beobachtete Kurtosis liegt nur bei drei Laufzeiten (dem 2-, 7- und 10-Jahressatz) innerhalb einer Standardabweichung der simulierten Werte. In der Realität treten grosse Zinsschocks somit häufiger auf, als dies das Faktor-GARCH-Modell annimmt. Dies wird durch die Resultate bezüglich der Quantile bestätigt. Das Faktor-GARCH-Modell generiert zwar wie erwartet mehr Realisationen innerhalb plus/minus einer Standardabweichung sowie über zwei Standardabweichungen als dies bei normalverteilten Zinsveränderungen der Fall wäre. Die empirisch beobachteten Werte liegen jedoch noch deutlich weiter von jenen einer Normalverteilung weg.

Insgesamt kann festgehalten werden, dass das Faktor-GARCH-Modell die Nicht-Normalität der empirischen Verteilung der Zinskurvenfaktoren teilweise zu widerspiegeln vermag. Es ist in dieser Hinsicht dem Faktor-Normal-Modell überlegen, welches per Konstruktion normalverteilte Zinsveränderungen generiert. Das Faktor-GARCH-Modell generiert jedoch insbesondere zu wenig Überschuss-Kurtosis. Eine Möglichkeit, die vom Faktor-GARCH-Modell erzeugte Überschuss-Kurtosis zu erhöhen besteht darin, anstatt in der bedingten Verteilung der Zinskurvenfaktoren von einer Normalverteilung auszugehen, mit einer Verteilung zu arbeiten, die dickere Enden aufweist als eine Normalverteilung. Dazu kommen etwa die t-Verteilung oder die GED-Verteilung in Frage. In univariaten Anwendungen wurden solche Verteilungen etwa von HSIEH (1989) eingesetzt.

6. VaR-Backtesting mit fiktiven Anleihenportfolios

Das Backtesting des VaR-Modells ist integraler Bestandteil eines bankinternen Modells zur Bestimmung der den Marktrisiken zugrundezulegenden Eigenmittel. Im folgenden werden beispielhaft Backtestings mit dem Faktor-Normal- und Faktor-GARCH-Modell durchgeführt. Dabei wird insbesondere untersucht, wie stark die Backtesting-Ergebnisse von der Portfoliozusammensetzung abhängen und wie sich die Ergebnisse im Zeitablauf ändern. Zunächst wird jedoch der aufsichtsrechtliche Rahmen des Backtesting-Verfahrens aufgezeigt.

6.1 Das Backtesting-Konzept der EBK

Der VaR eines Portfolios ist, wie ausgeführt wurde, für ein Konfidenzniveau von 99% zu ermitteln. Dies impliziert, dass das tatsächliche Handelsergebnis des Portfolios in einem von Hundert Fälle ein grösserer Verlust als der ex-ante berechnete VaR ist bzw. sein sollte. Mit einem Backtesting-Verfahren soll nun festgestellt werden, ob das VaR-Modell tatsächlich 99% der Handelsergebnisse abdeckt. Dazu werden für eine historische Stichprobe die auf dem Portfolio tatsächlich erzielten Gewinne und Verluste mit den zu Beginn der jeweiligen Halteperiode ermittelten VaRs verglichen. Übersteigt der tatsächliche Verlust den VaR, so wird dies als Ausnahme bezeichnet. Dem VaR-Modell wird eine hohe Messgenauigkeit at-

Tabelle 6: Multiplikationsfaktoren gemäss EBK

Anzahl Ausnahmen	Multiplikationsfaktor
4 und weniger	3
5	3.4
6	3.5
7	3,65
8	3.75
9	3.85
10 und mehr	4

testiert, wenn die Anzahl Ausnahmen im Backtesting nahe am erwarteten Wert von 1% der Fälle liegt.[14]

Die Bedeutung des Backtesting-Verfahrens ergibt sich daraus, dass sich die Ergebnisse direkt in den notwendigen Eigenmitteln niederschlagen. Wie in Abschnitt 1 ausgeführt wurde, fliesst ein institutsspezifischer Multiplikationsfaktor in die Ermittlung der notwendigen Eigenmittel ein. Dieser Faktor beträgt mindestens 3 und steigt in Abhängigkeit der Anzahl Ausnahmen, die mit einem Backtesting über die 250 vorangegangenen Handelstage ausgewiesen werden, auf 4 an (siehe Tabelle 6). Obwohl bei einer Stichprobe von 250 Halteperioden 2 bis 3 Ausnahmen zu erwarten sind, kommt der kleinste Multiplikationsfaktor zur Anwendung, falls maximal vier Ausnahmen zu registrieren sind. Dies hat damit zu tun, dass die Backtesting-Ergebnisse mit einer gewissen Unsicherheit behaftet sind; aufgrund der begrenzten Stichprobe ist es nicht möglich, dass das VaR-Modell in jedem Fall das vorgegebene Konfidenzniveau erreicht (BASLER AUSSCHUSS FÜR BANKENAUFSICHT (1996b), S. 6f.).

Die wichtigsten Vorschriften der EBK zur Durchführung von Backtestings sind (EBK-RS 97/1, RZ 154):

1. Das Backtesting muss auf einem VaR-Modell beruhen, das den Anforderungen an ein internes Modell genügt. Der einzige Unterschied ist, dass nicht eine Halteperiode von zehn Tagen, sondern eine eintägige Halteperiode zu unterstellen ist.
2. Das tatsächliche Handelsergebnis kann durch eine Neubewertung des am Vortag gehaltenen Portfolios berechnet werden; bei diesem Vorgehen werden die Gewinne und Verluste aus dem Intraday-Handel vernachlässigt.
3. Die zu verwendende Stichprobe setzt sich aus den 250 vorangehenden, eintägigen Halteperioden zusammen.

Im folgenden werden für zwei fiktive Anleihenportfolios beispielhaft Backtestings gemäss diesen EBK-Vorgaben durchgeführt.

6.2 Aufbau des Backtesting

Wir führen das Backtesting beispielhaft für zwei Portfolios durch, die aus fiktiven Nullcouponanleihen zusammengesetzt sind. Die Bewertung der Anleihen wird mit den in Abschnitt 3 beschriebenen Zinskurven durchgeführt, die auf Daten des Euro- und Swapmarktes beruhen. Die Ausgangssituation ist für beide Portfolios gleich: Es werden CHF 100 Mio gleichgewichtet in zwölf fiktive Nullcouponanleihen investiert, d.h. je CHF 8.33 Mio. Die Laufzeiten dieser Anleihen sind beim Start der ersten Halteperiode folgende: 1 Tag, 1 Woche, 1 Monat, 3 Monate, 6 Monate, 12 Monate, 2 bis 5 Jahre, sowie 7 und 10 Jahre. Nach der ersten Halteperiode werden die zwei Portfolios folgendermassen zusammengesetzt:

- Portfolio 1 (Tägliche Reinvestition): Das Portfolio wird täglich, d.h. am Ende jeder Halteperiode verkauft. Der Erlös wird gleichgewichtet in zwölf fiktive Nullcouponanleihen mit den obgenannten Laufzeiten reinvestiert.
- Portfolio 2 (Reinvestition bei Verfall): Die fiktiven Nullcouponanleihen werden bis Verfall gehalten. Der bei Verfall zurückbezahlte Nennwert wird in die fiktive Nullcouponanleihe der ursprünglichen Laufzeit reinvestiert.

Aufgrund der täglichen Reinvestition weist das erste Portfolio eine im Zeitablauf konstante Duration auf, d.h. die Risikostruktur des Portfolios ist immer dieselbe. In der Realität ändert sich die

Portfoliozusammensetzung und damit die Risikostruktur natürlich permanent. Dies wird beispielhaft in Portfolio 2 mit einer einfachen buy-and-hold-Strategie abgebildet. Ein Vergleich dieser beiden Portfolios wird Rückschlüsse auf die Auswirkungen unterschiedlicher Portfoliozusammensetzungen auf die Backtesting-Resultate und damit auf den zu erwartenden Multiplikationsfaktor, der in die Berechnung der Eigenmittel einfliesst, zulassen.

Das Backtesting durchläuft nun für jede Halteperiode die drei folgenden Schritte:

1. Zu Beginn der Halteperiode wird mit dem Faktor-Normal- und mit dem Faktor-GARCH-Modell je ein VaR für die beiden Portfolios bestimmt.
2. Am Ende der Halteperiode werden die Portfolios bewertet und die tatsächlichen Gewinne und Verluste festgestellt.
3. Die tatsächlichen Gewinne bzw. Verluste werden mit den VaRs verglichen um festzustellen, ob Ausnahmen vorliegen oder nicht.

Die Parameter der beiden VaR-Modelle werden wöchentlich auf Basis von Wochendaten neu geschätzt. Mit anderen Worten bleiben die Modellparameter über fünf Halteperioden hinweg konstant. Für das erstmalige Schätzen der Modellparameter werden die 135 Zinskurvenveränderungen der Periode 8.1.1988 bis 10.8.1990 verwendet. Anschliessend wird die Stichprobe für die Schätzung der Modellparameter wöchentlich um eine Beobachtung verlängert.

Die Backtesting-Stichprobe umfasst die Zinskurven vom 10.8.1990 bis zum 25.4.1997. Daraus lassen sich insgesamt 1'750 eintägige Halteperioden bilden. Diese können wiederum in sieben nicht-überlappende Backtesting-Stichproben mit einem von der EBK geforderten Umfang von 250 Beobachtungen unterteilt werden. Damit liegen sieben unabhängige Backtesting-Ergebnisse vor, die exemplarisch zeigen, wie sich die Resultate von Backtestings im Zeitablauf verändern können.

6.3 Backtesting-Ergebnisse

Die für die 1'750 Halteperioden mit dem Faktor-Normal- und dem Faktor-GARCH-Modell berechneten VaRs und die tatsächlichen Handelsergebnisse der beiden Portfolios sind in den Abbildungen 8 und 9 wiedergegeben. Die tatsächlichen Wertänderungen der Portfolios schwanken in beiden Fällen relativ stark um ihren Mittelwert von nahe bei Null. Wie nicht anders zu erwarten, liegt der bei einem Konfidenzniveau von 99% zu erwartende maximale Verlust (VaR) in der Regel deutlich unter der tatsächlichen Wertänderung der Portfolios. Der mit dem Faktor-Normal-Modell für Portfolio 1 berechnete VaR ist über die ganze Stichprobe von August 1990 bis April 1997 weitgehend stabil, wobei ein leicht fallender Trend zu beobachten ist (Abbildung 8). Der Wertebereich der VaRs liegt zwischen CHF 282'678 und CHF 383'101 (Tabelle 7). Im Fall von Portfolio 2 weist der mit dem Faktor-Normal-Modell bestimmte

Tabelle 7: Wertebereiche der Value at Risks

	Value at Risk in CHF			
	Portfolio 1 (tägliche Reinvestition)		Portfolio 2 (Reinvestition bei Verfall)	
	Faktor-Normal-Modell	Faktor-GARCH-Modell	Faktor-Normal-Modell	Faktor-GARCH-Modell
Minimum	383'101	667'700	291'759	594'549
Mittelwert	339'486	322'280	204'106	193'568
Maximum	282'678	196'558	137'891	121'490

Abbildung 8: Backtesting-Ergebnisse für Portfolio 1 (tägliche Reinvestition)

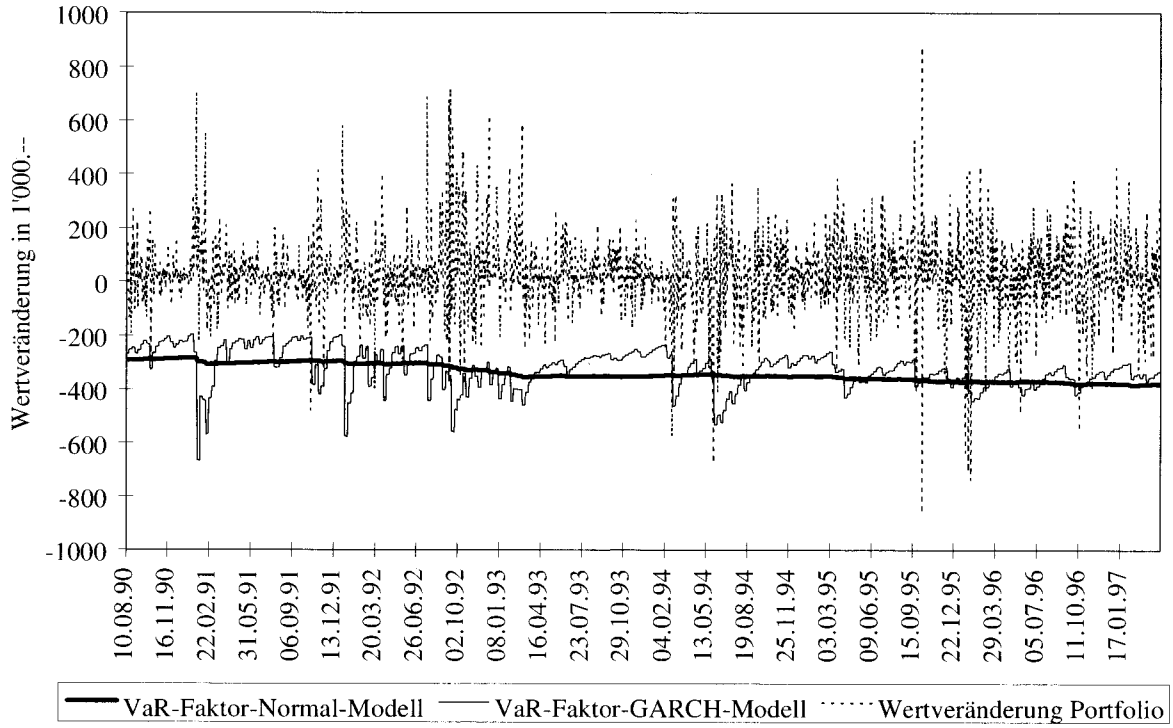
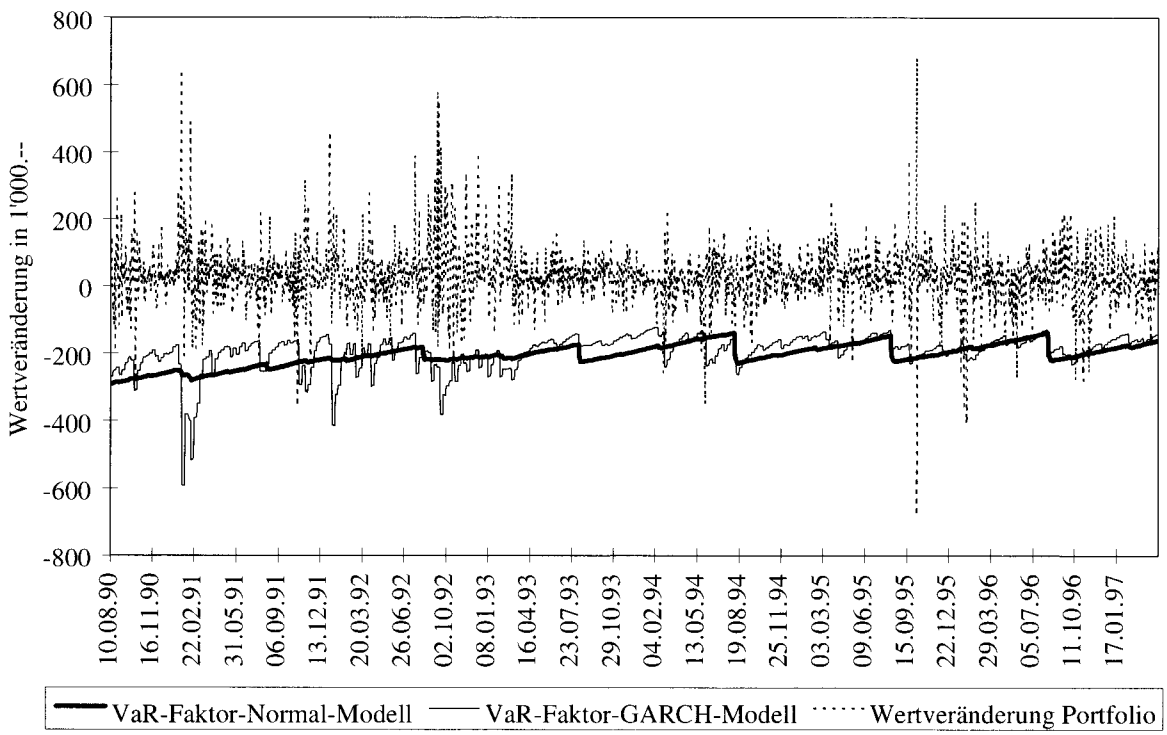


Abbildung 9: Backtesting-Ergebnisse für Portfolio 2 (Reinvestition bei Verfall)



VaR einen zackenförmigen Verlauf auf (Abbildung 9). Dieser rührt daher, dass die im Portfolio gehaltenen Anleihen erst bei Verfall reinvestiert werden. Dies hat zur Folge, dass die Zinssensitivität (Duration) des Portfolios laufend abnimmt; wenn jedoch eine ausgelaufende Anleihe wieder in die ursprüngliche Laufzeit investiert wird, steigt die Duration sprunghaft an. Als Folge davon erhöht sich der VaR von Portfolio 2 ebenfalls sprunghaft. Im Schnitt ist jedoch die Duration von Portfolio 2 tiefer als jene von Portfolio 1, weshalb die ermittelten VaR's in einem tieferen Wertebereich liegen als bei Portfolio 1, nämlich zwischen CHF 137'891 und CHF 291'759 (Tabelle 7). Das Faktor-GARCH-Modell liefert VaRs, die im Zeitablauf deutlichen Schwankungen unterliegen. Darin widerspiegelt sich die Zeitvariabilität der bedingten Volatilitäten der Zinskurvenfaktoren sowie der bedingten Korrelation zwischen den beiden Risikofaktoren. Entsprechend ist auch der Wertebereich der VaRs grösser als beim Faktor-Normal-Modell; bei Portfolio 1 nehmen die VaRs Werte zwischen CHF 196'558 und CHF 667'700 ein und bei Portfolio 2 zwischen CHF 121'490 und CHF 594'549 (Tabelle 7).

Auffallend ist, dass sich die mit dem Faktor-GARCH-Modell bestimmten VaRs um jene des Faktor-Normal-Modells bewegen. Entsprechend führen beide Modelle zu ähnlichen durchschnittlichen VaRs; mit dem Faktor-Normal-Modell beträgt dieser für Portfolio 1 (Portfolio 2) CHF 339'486 (CHF 204'106) und mit dem Faktor-GARCH-Modell CHF 322'280 (CHF 193'568). Diese bloss geringen Abweichungen dürften auf zwei sich gegenseitig weitgehend neutralisierende Effekte zurückzuführen sein. Einerseits erhöhte die Berücksichtigung der bedingten Korrelation zwischen den Faktoren im Faktor-GARCH-Modell im Mittel den VaR, da die bedingte Korrelation in der Stichprobe mehrheitlich positiv war (Abbildung 7). Andererseits wurden mit dem Faktor-Normal-Modell im Schnitt höhere Volatilitäten geschätzt als mit dem Faktor-GARCH-Modell, was zu höheren VaRs mit dem Faktor-Normal-Modell führte.

Aus den Abbildungen 8 und 9 sind die im Backtesting aufgetretenen Ausnahmen ersichtlich, d.h. die Fälle, in denen der tatsächliche Verlust des Portfolios den zu Beginn der Halteperiode berechneten VaR übersteigt.[15] Genauere Informationen zu den aufgetretenen Ausnahmen finden sich in Tabelle 8. Über alle 1'750 eintägigen Halteperioden führen das Faktor-Normal- wie auch das Faktor-GARCH-Modell bei beiden Portfolios zu mehr als den zu erwartenden 17 bis 18 Ausnahmen (1% der Fälle). Dies bedeutet, dass beide Modelle den VaR tendenziell unterschätzen. Die Backtesting-Resultate unterscheiden sich sowohl hinsichtlich der Portfolios wie auch der VaR-Modelle. So treten bei Portfolio 1 mit beiden Modellen deutlich mehr Ausnahmen auf als bei Portfolio 2. Die Portfoliozusammensetzung kann somit einen spürbaren Einfluss auf die Backtesting-Ergebnisse haben. Das Faktor-GARCH-Modell führt insbesondere bei Portfolio 1 zu mehr Ausnahmen als das Faktor-Normal-Modell. Dies ist insofern erstaunlich, als das Faktor-GARCH-Modell die Zinskurvendynamik besser abzubilden vermag als das Faktor-Normal-Modell (Abschnitte 4.2 und 5). Ein möglicher Grund dafür ist folgender: Mit dem Faktor-GARCH-Modell werden in Phasen ohne grosse Zinsänderungen tiefe Volatilitäten für die Zinskurvenfaktoren geschätzt. Da diese nicht nur auf lange Sicht, sondern vermutlich auch bedingt leptokurtisch verteilt sind, unterschätzt das Faktor-GARCH-Modell in solchen Phasen die Wahrscheinlichkeit eines grossen Zinsschocks und des damit verbundenen Portfolioverlusts, da es von bedingt normalverteilten Zinskurvenfaktoren ausgeht. Das Faktor-Normal-Modell geht dagegen immer von durchschnittlichen Volatilitäten der Zinskurvenfaktoren aus und liefert damit VaRs, die auch nach einer ruhigen Phase bei grösseren Zinsschocks den Wertverlust des Portfolios in der Regel übersteigen. Die Backtesting-Ergebnisse des Faktor-GARCH-Modells könnten somit allenfalls verbessert werden, wenn anstelle der bivariaten Normalverteilung von einer bivariaten t-Verteilung für die Faktorschocks über die nächste Halteperiode ausgegangen würde.

Tabelle 8: Entwicklung der Backtesting-Ergebnisse im Zeitablauf

Backtesting-Periode	Anzahl Ausnahmen			
	Portfolio 1 (tägliche Reinvestition)		Portfolio 2 (Reinvestition bei Verfall)	
	Faktor-Normal-Modell	Faktor-GARCH-Modell	Faktor-Normal-Modell	Faktor-GARCH-Modell
10.8.90 – 26.7.91	1	1	0	1
26.7.91 – 10.7.92	3	4	3	3
10.7.92 – 25.6.93	3	2	1	0
25.6.93 – 10.6.94	5	8	4	4
10.6.94 – 26.5.95	1	0	2	2
26.5.95 – 10.5.96	8	11	5	5
10.5.96 – 25.4.97	3	3	5	6
Total	24	29	20	21

Erwartete Anzahl Ausnahmen:
- pro Subperiode: 2–3 Ausnahmen
- über Gesamtperiode: 17–18 Ausnahmen

In Tabelle 8 sind weiter die Ergebnisse für die sieben Subperioden à je 250 Halteperioden aufgeführt. Insbesondere bei Portfolio 1 unterscheiden sich die Backtesting-Ergebnisse in den Subperioden zum Teil deutlich. Bei fünf der sieben Subperioden würde für Portfolio 1 ein Multiplikationsfaktor von 3 zur Anwendung kommen, den die EBK bei dieser Stichprobengrösse für bis zu vier Ausnahmen zubilligt (Tabelle 6). In der Periode vom 25.6.93 bis 10.6.94 fallen mit dem Faktor-Normal-Modell 5 Ausnahmen an, was einen Multiplikationsfaktor von 3.4 nach sich ziehen würde; das Faktor-GARCH-Modell generiert in dieser Periode sogar 8 Ausnahmen, was zu einem Multiplikationsfaktor von 3.75 führen würde. Ebenfalls erhöhte Multiplikationsfaktoren kämen in der Periode vom 26.5.95 bis 10.5.96 zur Anwendung: Den 8 mit dem Faktor-Normal-Modell generierten Ausnahmen entspräche der Faktor 3.75 und den 11 mit dem Faktor-GARCH-Modell generierten Ausnahmen der höchste Faktor 4. Bei Portfolio 2 käme in den ersten fünf Zeitperioden mit beiden VaR-Modellen ein Multiplikationsfaktor von 3 zur Anwendung. In den letzten beiden Stichproben wäre aufgrund der jeweils fünf aufgetretenen Ausnahmen (bzw. 6 Ausnahmen mit dem Faktor-GARCH-Modell in der letzten Zeitperiode) mit einem Multiplikationsfaktor von 3.4 (bzw. 3.5) zu rechnen. Ein Vergleich der beiden Portfolios in den verschiedenen Zeitperioden zeigt, dass eine erhöhte Anzahl Ausnahmen u.a. auch von der Portfoliozusammensetzung abhängen kann. So übersteigt z.B. in der Periode vom 25.6.93 bis 10.6.94 nur Portfolio 1 und in der Zeitperiode vom 10.5.96 bis 25.4.97 nur Portfolio 2 die tolerierten vier Ausnahmen.

Aufgrund der hier vorgenommenen, beispielhaften Backtestings können insgesamt folgende Punkte festgehalten werden. Zunächst kann die Portfoliozusammensetzung die Backtesting-Ergebnisse mitunter spürbar beeinflussen und es ist möglich, dass sich die Backtesting-Ergebnisse im Zeitablauf massiv verändern. Dies gilt es beim Aufbau eines internen Modells zur Ermittlung der notwendigen Eigenmittel für die Unterlegung von Marktrisiken zu beachten. Zweitens schneidet das Faktor-GARCH-Modell beim Backtesting schlechter ab als das Faktor-Normal-Modell. VaR-Modelle

dürfen jedoch nicht allein aufgrund solcher Backtestings beurteilt werden. Dagegen spricht schon allein, dass die Unterschiede zwischen den Modellen durch die Portfolioabhängigkeit der Backtesting-Resultate überlagert werden. Zudem ist nicht nur die Anzahl Ausnahmen wichtig, sondern auch Höhe und Verlauf der VaRs im Zeitablauf. So führt das Faktor-GARCH-Modell in Phasen geringer Volatilität zu tieferen VaRs und entsprechend tieferen Eigenmittelanforderungen; bei hohen Volatilitäten zeigt es dagegen mit nur geringer Verzögerung die gestiegenen Risiken in Form höherer VaRs an. Im allgemeinen weist das Faktor-GARCH-Modell somit Eigenschaften auf, die jenen des Faktor-Normal-Modells überlegen sind; diese Aussage deckt sich mit der in den Abschnitten 4.2 und 5 gewonnenen Erkenntnis, dass das Faktor-GARCH-Modell die Zinskurvendynamik besser abzubilden vermag. Es scheint somit lohnenswert, die beim Übergang von tiefen zu hohen Volatilitäten auftretenden Probleme des Faktor-GARCH-Modells, die sich negativ auf die Backtesting-Ergebnisse niederschlagen, in der angesprochenen Richtung zu lösen zu versuchen. Abschliessend sei darauf hingewiesen, dass es unklar ist, inwieweit die Verwendung eines einfachen Bewertungsmodells, nämlich des Durationansatzes, die Backtesting-Resultate beeinflusst.

7. Schlussfolgerungen

Der Messung von Zinsrisiken kommt eine besondere Bedeutung zu: Erstens hat die in den letzten Jahren zeitweise hohe Zinsvolatilität auch die auf festverzinslichen Anlagen bestehenden Risiken bewusst werden lassen. Zweitens zeichnen sich Zinsrisiken dadurch aus, dass sie nicht aus einem Risikofaktor, sondern aus einer Vielzahl von Zinssätzen verschiedener Laufzeiten herrühren. Um ein handhabbares Modell zu erhalten, muss die Anzahl der in die Analyse einbezogenen Zinssätze – mit möglichst wenig Informationsverlust – eingeschränkt werden. Wir zeigen, dass mit einer Faktoranalyse die Anzahl der Zinsrisikofaktoren auf zwei reduziert werden kann.

Basierend auf den zwei Zinskurvenfaktoren haben wir zwei Modellvarianten zur Bestimmung des VaR auf Anleihen betrachtet. In der ersten Variante, dem Faktor-Normal-Modell, wird von zeitinvariant, unabhängig normalverteilten Faktoren ausgegangen. Mit diesem einfachen Modell sind verschiedene Probleme verbunden: Erstens ist die unbedingte Verteilung der empirisch bestimmten Faktoren nicht normal; diese weisen insbesondere eine höhere Kurtosis auf als normalverteilte Zufallsvariablen. Zweitens wird für die bedingte Verteilung von einer Korrelation von Null ausgegangen, was eine grobe Vereinfachung darstellt. Drittens wird dem empirisch beobachtbaren Umstand nicht Rechnung getragen, dass sich sowohl die Volatilitäten wie die Korrelationen der Zinsdifferenzen und damit auch der Faktoren im Zeitablauf ändern. Als Alternative wird deshalb ein Faktor-GARCH-Modell vorgeschlagen, welches für die bedingte Verteilung der beiden Zinskurvenfaktoren von einem bivariaten GARCH(1,1)-Prozess mit normalverteilten Faktor-Schocks ausgeht. In der unbedingten Verteilung der Faktoren führt dies zu einer gewissen Überschuss-Kurtosis. Diese ist jedoch gemessen an der beobachteten Kurtosis der Zinsdifferenzen zu gering, wie die Ergebnisse einer Monte Carlo Simulation zeigen. Weiter wird die bedingte Korrelation im Faktor-GARCH-Modell nicht auf Null restringiert, sondern wie die Volatilitäten als zeitabhängig modelliert. Die empirische Schätzung dieses Modells zeigt, dass die bedingten Volatilitäten und Korrelationen im Zeitablauf tatsächlich erheblichen Schwankungen unterworfen sind und dass das Faktor-GARCH-Modell bezüglich der Zinskurvendynamik einen höheren Erklärungsgehalt aufweist als das Faktor-Normal-Modell.

Die beispielhaft durchgeführten Backtestings mit zwei fiktiven, aus Nullcouponanleihen gebildeten Portfolios zeigen folgendes: Erstens kann die Zusammensetzung des Portfolios einen Einfluss auf die Backtesting-Ergebnisse haben. Zweitens kön-

nen die Backtesting-Ergebnisse im Zeitablauf deutlichen Schwankungen unterliegen. Drittens stellen sich für das Faktor-GARCH-Modell die Übergänge von tiefen zu hohen Volatilitäten als problematisch dar, weil dann die Wahrscheinlichkeit grosser Portfolioverluste unterschätzt wird. Dieses Problem kann möglicherweise durch die Verwendung einer leptokurtischen bedingten Verteilung wie z.B. der *t*-Verteilung entschärft werden. Im allgemeinen fährt das Faktor-GARCH-Modell den Zinsrisiken jedoch besser nach als das Faktor-Normal-Modell, als es in Phasen hoher Volatilität zu grösseren und bei tiefen Volatilitäten zu geringeren Eigenmittelanforderungen führt.

Fussnoten

[1] Veröffentlicht als Verordnung über die Banken und Sparkassen, Änderung vom 8. Dezember 1997, SR952.02.

[2] Rundschreiben der Eidg. Bankenkommission: Richtlinien zur Eigenmittelunterlegung von Marktrisiken, Art. 12l–12p BankV (REM-EBK), vom 22. Oktober 1997.

[3] Riskmetrics setzt z.B. exponentiell gewichtete, gleitende Durchschnitte ein. Bei diesem Verfahren kommt den jüngsten Daten das grösste Gewicht zu, währenddem älteren Daten ein exponentiell abnehmendes Gewicht zugewiesen wird. Für eine Diskussion gleitender Durchschnitte siehe etwa ALEXANDER (1997) oder ENGLE/MEZRICH (1996).

[4] Die Modellierung der Zeitabhängigkeit der bedingten Korrelation ist nur möglich, weil wir uns auf die Zinsrisiken in einer Währung beschränken. Bei der Bestimmung eines unternehmensweiten VaR ist die Anzahl der Risikofaktoren dagegen zu gross, um ein multivariates GARCH-Modell zu schätzen. In diesem Fall kann jedoch eine bedingte Korrelation von Null zwischen den mit einer Faktoranalyse bestimmten Risikofaktoren unterstellt werden, was die Verwendung univariater GARCH-Modelle zur Beschreibung der Zeitabhängigkeit der Varianzen der Risikofaktoren erlaubt. Eine solche Vorgehensweise schlagen ALEXANDER/CHIBUMBA (1996) vor.

[5] Die Vernachlässigung der erwarteten Wertänderung der Anleihe erscheint vertretbar, als diese in der Regel wesentlich kleiner als deren Standardabweichung ist. Wir berechneten für die zwei in Abschnitt 6 betrachteten Anleihenportfolios deren erwarteten Wertänderungen mit einem um den Zeiteffekt sowie die erwartete Renditeänderung erweiterten VaR-Modell. Im Schnitt betrug die erwartete Wertänderung der Portfolios nur 10%–15% der Standardabweichung, die mit einem Faktor 2.33 in den VaR eingeht.

[6] Zitiert nach ENGLE/KRONER (1995), S. 127, woran sich auch die Notation für die Schätzparameter anlehnt.

[7] ENGLE/KRONER (1995), S. 131. Im weiteren ist der bivariate GARCH(1,1)-Prozess in (8) stationär, wenn die Bedingungen

$$\alpha_{11,2}^2 + \beta_{11,2}^2 < 1$$

$$\alpha_{22,2}^2 + \beta_{22,2}^2 < 1$$

erfüllt sind. Eine Verletzung dieser Bedingungen bedeutete, dass die bedingten Varianzen explodieren, d.h. zu einem unendlichen Wert konvergieren. Die in Abschnitt 4.2 geschätzten Parameter erfüllen diese Bedingungen.

[8] Quelle: Datastream

[9] ÜBERLA (1971), S. 125

[10] Die Likelihood-Ratio wird als doppelte Differenz der Loglikelihood-Funktionswerte der beiden Modelle gebildet. Diese betragen –1044.11 für das unrestringierte und –1068.25 für das restringierte Modell. Die Likelihood-Ratio folgt einer Chiquadratverteilung mit vier Freiheitsgraden, da vier Parameter des Faktor-GARCH-Modells auf Null restringiert werden.

[11] Die durch das bivariate GARCH(1,1)-Modell implizierte unbedingte Varianz-Kovarianz-Matrix der Zinskurvenfaktoren lässt sich analytisch aus den geschätzten Parametern berechnen. Die entsprechenden Formeln lauten:

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2}{1 - \alpha_{11,2}^2 - \beta_{11,2}^2}$$

$$\bar{\sigma}_{12} = \frac{\gamma_{21}\gamma_{22}}{1 - \alpha_{11,2}\alpha_{22,2} - \beta_{11,2}\beta_{22,2}}$$

$$\bar{\sigma}_{22} = \frac{\gamma_{22}^2}{1 - \alpha_{22,2}^2 - \beta_{22,2}^2}$$

Dabei bezeichnen $\bar{\sigma}_{11}$ bzw. $\bar{\sigma}_{22}$ die unbedingten Varianzen des ersten bzw. zweiten Zinskurvenfaktors und $\bar{\sigma}_{12}$ die unbedingte Kovarianz zwischen den beiden Zinskurvenfaktoren.

[12] Eine ähnliche Simulation wurde etwa von VETZAL (1997) für den Kurzfristzinssatz durchgeführt.

[13] Zur Simulation korrelierter Zufallsvariablen siehe z.B. RIPLEY (1987), S. 98.

[14] Die EBK-Vorschriften über das Backtesting finden sich in EBK-RS 97/1, RZ 150ff.

[15] Die VaRs sind in den Abbildungen 8 und 9 als negative Werte wiedergegeben, da sie mit den erzielten Portfolioverlusten verglichen werden. Üblicherweise wird ein VaR dagegen als positive Zahl ausgewiesen, weshalb dies auch in den Tabellen und im Text so gemacht wird.

Literatur

ALEXANDER, C. (1997): „On the Variance-Covariance Matrices Used in VaR Models", Journal of Derivatives, Spring, pp. 50–62.

ALEXANDER, C. und A. M. CHIBUMBA (1996): „Multivariate Orthogonal Factor GARCH", Working Paper, School of Mathematical Sciences, University of Sussex.

BASLER AUSSCHUSS FÜR BANKENAUFSICHT (1996a): „Änderung der Eigenkapitalvereinbarung zur Einbeziehung der Marktrisiken", Basel.

BASLER AUSSCHUSS FÜR BANKENAUFSICHT (1996b): „Aufsichtliches Rahmenkonzept für Backtesting (Rückvergleiche) bei der Berechnung des Eigenkapitalbedarfs zur Unterlegung des Marktrisikos mit bankeigenen Modellen", Basel.

BOLLERSLEV, T. (1986): „Generalized Autoregressiv Conditional Heteroskedasticity", Journal of Econometrics 31, pp. 307–327.

BOLLERSLEV, T., R. ENGLE und D. NELSON (1994): „ARCH Models", in: R. Engle und McFadden (Hrsg.): Handbook of Econometrics, Volume IV, North Holland: Elsevier Science B.V., pp. 2959–3038.

BÜHLER, A. und H. ZIMMERMANN (1996): „A Statistical Analysis of the Term Structure of Interest Rates in Switzerland and Germany", Journal of Fixed Income 6, pp. 55–67.

ENGLE, R. (1982): „Autoregressiv Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation", Econometrica 50, pp. 987–1008.

ENGLE, R. und K. KRONER (1995): „Multivariate Simultaneous Generalized ARCH", Econometric Theory 11, pp. 122–150.

ENGLE, R. und J. MEZRICH (1996): „GARCH for Groups", Risk 9, pp. 36–40.

GRUBER, W. und L. OVERBECK (1998): „Nie mehr Bootstrapping", Finanzmarkt und Portfolio Management 12, pp. 59–73.

HORN, J. (1965): „A Rational and Test for the Number of Factors in Factor Analysis", Psychometrica 30, pp. 179–185.

HSIEH, D. (1989): „Modeling Heteroskedasticity in Daily Foreign-Exchange Rates", Journal of Business & Economic Statistics 7, pp. 307–317.

JORION, PH. (1997): Value at Risk, The New Benchmark for Controlling Market Risk, Chicago: Irwin.

LITTERMAN, R. und J. SCHEINKMAN (1991): „Common Factors Affecting Bond Returns", Journal of Fixed Income, June, pp. 54–61.

RIPLEY, B. D. (1987): Stochastic Simulation, New York: John Wiley & Sons.

TOBLER, J. (1996): Schätzung von Zinsstrukturen für den SFr.-Kapitalmarkt unter Berücksichtigung von Friktionen, Bern: Verlag Paul Haupt.

TOBLER, J. und R. WALDER (1997): „Value at Risk für Zinsrisiken: Ein multivariater GARCH-Ansatz", Arbeitspapier, Zürcher Kantonalbank.

ÜBERLA, K. (1971): Faktorenanalyse, Berlin: Springer-Verlag.

VETZAL, K. (1997): „Stochastic Volatility, Movement in Short Term Interest Rates, and Bond Option Values", Journal of Banking and Finance 21, pp. 169–196.

WASSERFALLEN, W. (1997): „Forecasting Volatility in Swiss Financial Markets", Finanzmarkt und Portfolio Management 11, pp. 62–76.