BERND ROLFES UND ERIC TOBIAS HENN*

Über die Bestimmung des „Teil-Value-at-Risk" eines Subportfolios

1. Das Problem der VaR-Spaltung im diversifizierten Portfolio

In den letzten Jahren ist der Value-at-Risk (VaR) ein weit verbreitetes Mass für das Marktpreisrisiko geworden. Nicht zuletzt hat J. P. Morgan durch RiskMetrics™[1] die Verbreitung gefördert und seine einfache Berechnung durch die Bereitstellung der benötigten Daten ermöglicht. Heute gilt VaR quasi als Industriestandard. Im folgenden soll unter dem VaR ein Mass für die maximal mögliche Veränderung des Vermögenswertes eines Portfolios aus Finanzinstrumenten bei gegebenem Signifikanzniveau und Haltedauer verstanden werden.[2] Eine zentrale, gegenüber früheren Konzepten neue Komponente ist die Berücksichtigung von risikovermindernden Beziehungen der Risiken untereinander, also des Diversifikationseffektes. In der Folge stellt das gemessene Risiko eines Portfolios nicht mehr die Summe der Einzelrisiken dar, und eine direkte Rückverteilung des Risikos auf die Einzelpositionen – quasi nach dem Verursacherprinzip – ist nicht ohne weiteres möglich. Für die ex-post Beurteilung einzelner Teilbereiche im Rahmen einer risikoadjustierten Erfolgsmessung wäre gerade dies jedoch wünschenswert. Die Möglichkeiten und Probleme bei einer solchen Rückverteilung des VaR, hier „Teil-Value-at-Risk"[3] genannt, sollen im folgenden diskutiert werden.

Die Nichtadditivität des Value-at-Risk ist eine zentrale Eigenschaft dieses Konzeptes. Sie trägt der Tatsache Rechnung, dass die einzelnen in einem Portfolio eingegangenen Risiken nicht unabhängig voneinander eintreten, sondern in gewissen Beziehungen untereinander stehen. Diese werden mathematisch durch Korrelationen quantifiziert.[4] In einem gut diversifizierten Portfolio ist die Risikoreduktion hierdurch erheblich. Folgendes einfache Beispiel mit drei Risikopositionen mag den Unterschied zwischen diversifiziertem und undiversifiziertem Risiko verdeutlichen.

Die im Beispielportfolio enthaltenen Positionen fallen in fünf Risikobuckets. Dies sind DM-Zins (10 J.) sowie Aktienkurs- und Devisenrisiken jeweils in Pfund und Dollar. Pro Risikobucket ergibt sich das Risiko durch Multiplikation des Marktwertes mit der entsprechenden Volatilität und durch Summation erhält man den undiversifizierten Value-at-Risk der Positionen (vgl. Tabelle 1). Sämtliche Berechnungen erfolg-

* Die Autoren danken den Gutachtern Alfred Bühler und Heinz Zimmermann für die kritische Durchsicht des Manuskripts und wertvolle Verbesserungsvorschläge. Prof. Dr. Bernd Rolfes, Lehrstuhl für Banken und Betriebliche Finanzwirtschaft, Universität-GH Duisburg, D-47048 Duisburg, E-Mail: KHoffmann@uni-duisburg.de, Dipl.-Wirt.-Math. Eric Tobias Henn, ZEB GmbH, Weseler Strasse 561, D-48163 Münster, E-Mail: EHenn@ZEB.de.

Tabelle 1: Undiversifiziertes Value-at-Risk im Beispielportfolio[5]

	Marktwert	Risikobucket	VaR undiv.	
DM-Zerobond, 10 J.	2.553.656	Zins DM, 10 J.	76.818	76.818
£-Aktie	1.050.000	Aktien £ Devisen £	49.126 34.668	83.794
US$-Aktie	900.000	Aktien US$ Devisen US$	39.755 29.343	69.098
Portfolio	4.503.656			229.710

ten auf Grundlage der RiskMetrics Daten vom 27.10.1997; als Parameter für die Risikopräferenz wurden ein Signifikanzniveau von 99% und eine Haltedauer von 10 Tagen gemäss den Vorgaben der Bank für internationalen Zahlungsverkehr (BIZ) gewählt.

Der diversifizierte Value-at-Risk einer Position bzw. eines Portfolios entsteht durch Verknüpfung der Risiken in den einzelnen Risikobuckets mit der Korrelationsmatrix. Hierdurch wird auf verschiedenen Ebenen der Korrelationseffekt wirksam. Eine horizontale Korrelation – zwischen den sich in einer Position befindlichen Risikoarten – tritt beispielsweise bei der £-Aktie zwischen den Aktien- und Währungsrisiken auf. Betrachtet man nun das gesamte Portfolio, so kommt hier die Korrelationswirkung zwischen allen fünf Risikoarten zum Tragen. Durch diese vertikale Korrelation wird ein weitaus grösserer Diversifikationseffekt erreicht (siehe Tabelle 2).

Die hier durch Berücksichtigung von Korrelationen erreichte Risikoreduktion von 38,7% kann in einem komplexeren und breiter gestreuten Portfolio noch grösser ausfallen. Für den Händler eröffnen sich hier Möglichkeiten, durch ein gut diversifiziertes Portfolio sein Risiko zu reduzieren, ohne in risikoarme und meist auch ertragsarme Positionen wie inländische kurzlaufende festverzinsliche Positionen ausweichen zu müssen.

In der Praxis kann auch der undiversifizierte VaR als Risikomass insbesondere bei Stress-Szenarien Verwendung finden. Als Szenario wird dabei die negative Marktwertveränderung eines jeden Risi-

Tabelle 2: Risikoreduktion im Beispielportfolio

	Risikobucket	VaR undiv.	VaR div.	
			Einzelposition	Portfolio
DM-Zerobond, 10 J.	Zins DM, 10 J.	76.818	76.818	140.819
£-Aktie	Aktien £ Devisen £	49.126 34.668	61.522	
US$-Aktie	Aktien US$ Devisen US$	39.755 29.343	57.244	
Summe		229.710	195.584	140.819

kobuckets gemäss der Volatilität unterstellt. Es wird ein gleichzeitiges Eintreten aller Einzelrisiken angenommen, so dass der undiversifizierte VaR als Summe der Einzelrisiken gerade das Risikomass in diesem Stress-Szenario liefert. Bei der Interpretation ist zu beachten, dass die Eintrittswahrscheinlichkeit des Stress-Szenarios nicht aus dem bei der Bewegung der einzelnen Risikofaktoren unterstellten Konfidenzniveau abgeleitet werden kann; dies wäre nur bei einer perfekten Korrelation aller Faktoren möglich. Eine Interpretation des undiversifizierten VaR im probabilistischen Sinn ist nicht möglich und das bei den einzelnen Risikofaktoren herangezogene Signifikanzniveau kann nur als Untergrenze verwendet werden.

Der diversifizierte VaR hingegen kann nicht im Sinne eines Szenarios als Bewegung einzelner Risikofaktoren interpretiert werden, deren Verluste sich zu dem VaR aufsummieren. Hier kann jedoch eine Interpretation im probabilistischen Sinn erfolgen, denn das Risikomass VaR gibt bei unterstelltem Signifikanzniveau einen maximalen Verlust an.

Im folgenden soll nun untersucht werden, wie das VaR im Portfolio von 140.819 auf die drei Risikopositionen verteilt und damit der spezielle Risikobeitrag dieser Positionen zum gesamten Portfolio bestimmt werden kann.

2. Der „Teil-Value-at-Risk" von Subportfolios

2.1 Der marginale VaR-Wirkung einzelner Positionen

Betrachtet wird ein Portfolio P, bestehend aus n Risikopositionen (oder Subportfolios, etc.) R_i mit $P = \sum_{i=1}^{n} R_i$. Unter dem „Teil-Value-at-Risk" (TVaR)[6] einer Risikopositionen versteht sich der Beitrag dieser Position zum Value-at-Risk des Portfolios. Dies bedingt zuvorderst eine Additivität des Teilrisikos, d. h. die Summe aller Teilrisiken $\mathrm{TVaR}(R_i)$ muss dem diversifiziertem Portfoliorisiko entsprechen:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{TVaR}(R_i) = \mathrm{VaR}(P) \tag{1}$$

Um die Bandbreite des Teilrisikos einzugrenzen, werden die Extremfälle einer „Null-Risikoreduktion" einerseits und des „perfect hedge" andererseits einer zugekauften Position betrachtet. Im Falle einer „Null-Risikoreduktion" – beispielsweise durch Zukauf des identischen, schon bestehenden Portfolios – wird das Risiko voll um den Value-at-Risk des Portfolios erhöht. Im anderen Fall des „perfect hedge", der beispielsweise durch das Schliessen einer long Position mit einer short Position entsteht, findet eine Risikoreduktion in gleichem Umfang statt. Das Teilrisiko bewegt sich also zwischen dem negativen und positiven Value-at-Risk der Position. Das genaue Ausmass in dieser Bandbreite wird durch die Hedgewirkung bestimmt:

$$-\mathrm{VaR}(R) \le \mathrm{TVaR}(R) \le \mathrm{VaR}(R) \tag{2}$$

Zur genauen Bestimmung der Hedgewirkung soll eine Grenzbetrachtung vorgenommen werden. Die Veränderung des Portfolios durch Hinzufügen einer in Bezug auf das Gesamtrisiko marginalen Position verändert die Gewichtung der einzelnen Risikopositionen (etwa Laufzeitbänder, Währungs-, Aktien- oder Edelmetallpositionen) im Portfolio nicht und hat somit auch keinen Einfluss auf das Diversifikationsprofil. Damit sollte sich das Portfoliorisiko durch das Hinzufügen der marginalen Position gerade um das Teilrisiko dieser Position im Portfolio verändern:

$$\mathrm{VaR}(P+R) \cong \mathrm{VaR}(P) + \mathrm{TVaR}(R), \quad \text{falls R marginal in Bezug auf P.} \tag{3}$$

Hieran lässt sich auch der oben angedeutete Zusammenhang zwischen Hedgewirkung und der Höhe des Teilrisikos untersuchen. Hat die hinzugefügte Position eine Hedgewirkung, so wird sie das Portfoliorisiko reduzieren und besitzt damit ein negatives Teilrisiko. Führt sie jedoch zu einer Risikoerhöhung, so wird auch ihr Teilrisiko positiv ausfallen:

$$\mathrm{VaR}(R_i)\begin{cases}<0, & \text{falls } R_i \text{ Hedgewirkung hat}\\ \geq 0, & \text{sonst}\end{cases} \qquad (4)$$

Nun gilt es, eine Kennzahl zu konstruieren, die den formulierten Bedingungen (1) bis (4) genügt. Zusätzlich wäre es wünschenswert, dass diese Kennzahl auch operational einfach bestimmt werden kann, d. h. ohne aufwendige Verfahren wie beispielsweise iterative Prozesse berechenbar ist. Dazu wird in einem ersten Schritt die Kennzahl Volatilität betrachtet.

2.2 Von der „marginale Volatilität“ zum „Teil-Value-at-Risk“

Unter der Volatilität einer Risikoposition versteht sich die – gemäss der getroffenen Prämissen für Haltedauer und Sicherheitsniveau prognostizierte – Schwankungsbreite des Positionswertes in Prozent. Das Risiko dieser Position ergibt sich durch Multiplikation des Positionswertes mit der entsprechenden Volatilität. Eine Position vom Marktwert 100 mit einer Volatilität von 5% hätte demnach ein Wertminderungspotential von fünf.
Betrachtet man nun diese Position im Kontext eines Portfolios, so würde sich durch Hinzufügen dieser Position zum Portfolio der VaR des Portfolios beispielsweise nur um drei erhöhen. Diese 3% wird als „marginale Volatilität“ bezeichnen. Wird zu einem Portfolio eine in Bezug auf das Portfoliovolumen marginal kleine Position hinzugefügt, dann versteht man unter der „marginalen Volatilität“ dieser Position die relative Risikoveränderung (bezogen auf den Marktwert der Position), welche durch das Hinzufügen der Position verursacht wurde.[7] Der Vektor der Risikopositionen wird mit p, der Vektor der Volatilitäten mit v und die Korrelationsmatrix mit C bezeichnet, für eine Position p ist dann der Vektor der Positionsrisiken mit $r = p \cdot v$ bezeichnet und das diversifizierte Value-at-Risk ergibt sich insgesamt als:

$$\mathrm{VaR}(p) = \sqrt{r^t C r} \qquad (5)$$

Der Vektor der „marginalen Volatilitäten“ lässt sich nun mathematisch durch Differentiation des VaR nach den einzelnen Risikovertices bestimmen:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vola}_{marg}(p) &= \nabla \mathrm{VaR}(p) = \nabla\sqrt{r^t C r}\\ &= \frac{Cr}{\sqrt{r^t C r}} = \frac{Cr}{\mathrm{VaR}(p)}\end{aligned} \qquad (6)$$

Die „marginale Volatilität“ einer Position, welche nur aus einem Risikovertex besteht, lässt sich nun direkt aus dem in (6) entwickelten Vektor ablesen. Um die „marginale Volatilität“ einer Position, welche sich aus mehreren Risikovertices zusammensetzt, zu bestimmen, sind die Volatilitäten der einzelnen Vertices entsprechend zu gewichten.
Betrachtet man nun die in 2.1 aufgestellte Bedingung (3), dann bestimmt sich der „Teil-Value-at-Risk“ durch Multiplikation der betreffenden Position mit dem Vektor der „marginalen Volatilitäten“.[8]

$$\mathrm{TVaR}(p_i) = p_i^t \cdot \mathrm{Vola}_{marg}(p) \qquad (7)$$

Damit ist man in der Lage, der Teil-VaR existierender und potentieller Geschäfte in Bezug auf das Gesamtportfolio zu bestimmen. Im Beispiel ergibt sich folgender Teil-VaR für die einzelnen Geschäfte, wie in Tabelle 3 dargestellt.
Als erstes Ergebnis für das Beispielportfolio lässt sich festhalten, dass bei der vorliegenden Struktur der grösste Diversifikationseffekt von der Positions- auf die Portfolioebene von der DM-Zerobond Position ausgeht. Das Positionsrisiko

Tabelle 3: „Teil-Value-at-Risk“

	Marktwert	VaR div.		Teil-VaR
		Einzelposition	Portfolio	
DM-Zerobond, 10 J.	2.553.656	76.818	140.819	47.254
£-Aktie	1.050.000	61.522	↑	48.053
US$-Aktie	900.000	57.244		45.512
Portfolio	4.503.656	195.584	140.819	140.819

von 76.818 reduziert sich hierdurch auf ein Teil-VaR von 47.254 um 38,5%.

3. Risikosteuerung mit Hilfe des „Teil-Value-at-Risk“

3.1 Dynamische Limitierung

Es wurde dargestellt, wie sich der Value-at-Risk eines Portfolios in einzelne Teile zerlegen lässt. Mit dem Teil-VaR lässt sich die Frage beantworten, in welchem Masse einzelne Trades, Händler oder Abteilungen zum VaR des Gesamtportfolios beigetragen. Dadurch werden die Entscheidungen eines Händlers nicht nur lokal, sondern auch im globalen Kontext der Gesamtbank bewertet. Im folgenden soll untersucht werden, in welchen Fällen eine solche Betrachtung sinnvoll sein kann.
Baut beispielsweise ein Händler Hedgepositionen gegen eine nicht in seinem Portfolio befindliche Position auf, so vergrössert er damit den VaR seines Portfolios, obwohl er eigentlich eine Massnahme zur Risikoreduktion auf Gesamtbankebene getroffen hat. Durch die Kennzahl Teil-VaR wird dieses Verhalten positiv bewertet. Zweitens kann die Risiko-Limitierung der Händler bzw. Abteilungen auf einer Risikomessung mittels Teil-VaR aufbauen; ein exemplarischer Limitreport ist in Tabelle 4 dargestellt. Das Konzept des Teil-VaR bietet hier den entscheidenden Vorteil, dass das Gesamtlimit sich additiv aus den Einzellimiten zusammensetzen kann.
Allerdings ist eine derartige Risikomessung und -limitierung nicht unproblematisch, da einerseits die getroffene Annahme, ein Händler bzw. eine Abteilung sei bei ihrem Handeln auf das Gesamtinstitut focussiert, hinterfragt werden muss. Denn oft ist die Aufgabe des Händlers explizit auf ein Marktsegment beschränkt, und sein Bestreben segment beschränkt, und sein Bestreben muss es sein, dort ein maximalen Handelserfolg zu erzie-

Tabelle 4: Limitierung auf Basis „Teil-Value-at-Risk“

	Marktwert	Teil-VaR	Limit
Händler A	32.038.168	592.848	1.000.000
Händler B	8.241.030	377.148	600.000
Händler C	11.291.810	570.993	900.000
Portfolio	51.571.008	1.540.989	2.500.000

Tabelle 5: Limitauslastungen auf Basis „Teil-Value-at-Risk"

	Teil-VaR	Limit	Auslastung
Händler A	592.848	1.000.000	59,3%
Händler B	377.148	600.000	62,9%
Händler C	570.993	900.000	63,4%
Portfolio	1.540.989	2.500.000	61,6%

len. Andererseits ist kritisch zu beurteilen, dass das Risiko und damit auch die Limitauslastung eines Händlers durch Aktionen der anderen Händler beeinflusst wird und zu aus Portfoliosicht ungewünschten Handelsaktivitäten führt, weil er unter seinem TVaR-Limit bleiben muss.

Hat etwa Händler A – bewusst oder unbewusst – eine Hedgeposition gegen eine Position aus dem Portfolio von Händler B aufgebaut und damit ein relativ niedriges Teil-VaR erreicht, so wird der Verkauf der entsprechenden Gegenposition durch Händler B die ehemalige Hedgeposition von Händler A in eine offene Position verwandeln und damit dessen Teil-VaR beträchtlich erhöhen. Nicht nur in diesem extremen Beispiel, sondern bei jeder Veränderung der Risikostruktur des Portfolios tritt das Problem auf, dass die Teil-VaR der einzelnen Händler sich in einer gegenseitigen Abhängigkeit befinden. Aus Sicht eines einzelnen Händlers wird sein Teil-VaR also durch externe Faktoren, die er nicht steuern kann, beeinflusst. Dies ist insbesondere dann kritisch, wenn nicht nur das Limit, sondern auch sein Handelserfolg hierauf bezogen wird.

Als Lösung bietet sich eine dynamische Limitierung an, die von einer zentralen Instanz laufend gesteuert wird. Diese Limite beziehen sich jeweils auf den Value-at-Risk der Händlerportfolios und werden gemäss der Risikostruktur im Gesamtportfolio angepasst. Hierzu wird der Teil-VaR der einzelnen Händler beobachtet. Bei einem niedrigen Teil-VaR können durch die Erhöhung der Limite die – sich durch die Korrelationswirkung ergebenden – Risikospielräume ausgenutzt werden. Denkbar wäre, die sich bei einer Teil-VaR-Limitierung ergebenden Limitauslastungen festzuschreiben und dementsprechend die VaR-Limite festzulegen. In obigem Beispiel ergeben sich folgende Limitauslastungen (vgl. Tabelle 5). Diese Auswertung würde von der zentralen Instanz vorgenommen und die hier festgelegte Limitstruktur nicht notwendigerweise dem Händler kommuniziert werden.

In einem zweiten Schritt werden die VaR Limite gemäss der festgestellten Auslastung bestimmt (vgl. Tabelle 6). Auf eine Rundung der Ergebnisse, die in der praktischen Anwendung notwendig ist, wird hier verzichtet.

Tabelle 6: Limitauslastungen auf Basis Value-at-Risk

	(1)	(2)	(3) = (1)/(2)
	VaR	Auslastung	Limit
Portfolio	1.540.989	61,6%	2.500.000
Händler A	963.758	59,3%	1.625.640
Händler B	482.861	62,9%	768.177
Händler C	718.183	63,4%	1.132.000

Tabelle 7: „marginale Volatilität“

	Marktwert	Teil-VaR	marg. Vola
DM-Zerobond, 10 J.	2.553.656	47.254	1,850%
£-Aktie	1.050.000	48.053	4,576%
US$-Aktie	900.000	45.512	5,056%
Portfolio	4.503.656	140.819	

3.2 Portfolio-Hedging

Anhand des eingangs betrachteten Portfolios soll untersucht werden, in welchen der bestehenden Positionen eine Investition am wenigsten Risikoerhöhung im Portfolio bewirken würde. Dazu wird noch einmal die „marginale Volatilität“ dieser Geschäfte und damit ihr Teil-VaR betrachtet.

Bei ausschliesslicher Risikobetrachtung würde sich hier eine Erhöhung der DM-Zerobond Position empfehlen, da hier die „marginale Volatilität“ mit 1,850% am niedrigsten ist (vgl. Tabelle 7). Umgekehrt lässt sich so auch die wirksamste Hedgeposition identifizieren; dies wäre hier eine short Position auf die US$-Aktie, bei der mit 5,056% die höchste „marginale Volatilität“ vorliegt. Für ein grösseres Portfolio lässt sich dies zu einer Liste von Hedgemassnahmen ausbauen, die zur Umsetzung einer risikovermindernden Handelsstrategie ideal einsetzbar ist.[9]

Die Interpretation des Teil-VaR stösst an Grenzen. Befinden sich in einem Portfolio zwei annähernd symmetrische Positionen, die sich gegenseitig fast völlig abhedgen, so ist es schwer festzustellen, welche der beiden Positionen das Risiko aufgebaut hat und welche dieses nun wieder weghedgt. Der Teil-VaR der (leicht) grösseren Position fällt positiv aus, während der Teil-VaR der kleineren Position negativ ist (vgl. Tabelle 8). Diese wird somit als Hedge bestimmt.

Das Phänomen ist nicht verwunderlich, denn investiert man weiter in die grössere Position, die nicht vollständig abgehedgt ist, vergrössert sich der VaR. Investiert man jedoch in die kleinere Position, so vergrössert man weiter deren Hedgewirkung – jedenfalls solange bis diese die andere Position völlig weggehedgt hat. Bei einer derart geschlossenen Position ist es in der Tat schwer zu entscheiden, welcher Teil des Portfolios nun das Risiko aufgebaut hat und welcher es wieder weggehedgt hat. Eine isolierte Betrachtung der Positionen in diesem Portfolio ergibt hier wenig Sinn.

Tabelle 8: Teil-VaR bei fast vollkommener Hedgeposition[10]

	Marktwert	Teil-VaR	marg. Vola
DAX-Position	400.000	–24.755	–6,189%
Short Call	–45.036	26.483	–6,189%
Portfolio	354.964	1.728	

4. Zusammenfassung

Mit dem „Teil-Value-at-Risk“ ist eine Kennzahl entwickelt worden, welche es erlaubt, das Value-at-Risk eines Portfolios auf Positionen oder Teilportfolios zu verteilen und damit deren Anteil am VaR des Portfolios zu messen. Diese stellt eine sinnvolle und aussagekräftige Ergänzung des VaR dar. Auf Händlerportfolios angewendet können zwar keine direkten Steuerungsimpulse abgeleitet werden, jedoch im Rahmen eines dynamischen Limitsystems kann der Teil-VaR einen guten Beitrag zur effizienten Risikoallokation liefern. Ebenso kann der Teil-VaR bei der Analyse eines Portfolios hinsichtlich Hedgepotential überaus hilfreich sein und liefert gute Hinweise für potentielle Investitionsmassnahmen.

Anhang

Zu einer ersten Plausibilitätskontrolle wird der Teil-VaR des ganzen Portfolios bestimmt:

$$\begin{aligned} \mathrm{TVaR}(p) &= r^t \cdot \mathrm{Vola}_{marg}(p) = r^t \cdot \frac{Cr}{\sqrt{r^t Cr}} \\ &= \sqrt{r^t Cr} = \mathrm{VaR}(p) \end{aligned} \tag{8}$$

Wie gefordert, ergibt der Teil-VaR des gesamten Portfolios gerade das diversifizierte VaR. Betrachtet wird ein Portfolio P, bestehend aus n Risikopositionen (oder Subportfolios, etc.) R_i mit $P = \sum_{i=1}^{n} R_i$. Die geforderte Additivität (1) des Teil-VaR ergibt sich aus seiner Definition:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{TVaR}(R_i) &= \sum_{i=1}^{n} R_i \cdot \mathrm{Vola}_{marg}(P) \\ &= \mathrm{Vola}_{marg}(P) \cdot \sum_{i=1}^{n} R_i \\ &= \mathrm{Vola}_{marg}(P) \cdot P = \mathrm{TVaR}(P) \end{aligned} \tag{9}$$

Die Grenzbetrachtung (3) wird durch Entwicklung des VaR in eine Taylorreihe verifiziert. Bricht man diese nach den Ableitungen 1. Grades ab, so ergibt sich eine Näherung 1. Grades und gerade:

$$\begin{aligned} \mathrm{VaR}(P+R) &\cong (P+R) \cdot \nabla \mathrm{VaR}(P+R) \\ &= \mathrm{TVaR}(P) + \mathrm{TVaR}(R) \\ &= \mathrm{VaR}(P) + \mathrm{TVaR}(R) \end{aligned} \tag{10}$$

Aus dieser Grenzbetrachtung lässt sich sofort die Bedingung (4) folgern. Das Hinzufügen einer Risikoposition mit Hedgewirkung verringert den VaR des Portfolios und mit (3) besitzt sie dann einen negativen Teil-VaR.

Wie schon anfangs festgestellt, gilt stets $\mathrm{VaR}(P+R) \leq \mathrm{VaR}(P) + \mathrm{VaR}(R)$ und in Verbindung mit (3) ist der Teil-VaR einer Position immer kleiner gleich dem VaR dieser Position. Betrachtet man die entgegengesetzte Position –R, so erhält man als untere Schranke für den Teil-VaR das negative VaR dieser Position und damit (2):

$$-\mathrm{VaR}(R) \leq \mathrm{TVaR}(R) \leq \mathrm{VaR}(R) \tag{11}$$

Fussnoten

[1] RiskMetrics ist eingetragenes Warenzeichen von J. P. Morgan.
[2] Vgl. J.P. MORGAN/REUTERS (1996, p. 6). Alternativ könnte der VaR auch als negative Veränderung definiert werden, dies ist jedoch für die folgenden Betrachtungen nicht erheblich.
[3] Siehe auch GARMAN (1997, pp. 70ff) und JORION (1997, pp. 153ff).
[4] Zur Berechnung siehe J. P. MORGAN/REUTERS (1996, pp. 121ff).
[5] Sämtliche Berechnungen erfolgten auf Grundlage der RiskMetrics Daten vom 27.10.1997 mit Signifikanzniveau 99% und Haltedauer 10 Tage.
[6] Vgl. auch GARMAN (1997, pp. 70ff) und JORION (1997, pp. 153ff).
[7] Vgl. auch: GARMAN (1996, pp. 61ff).
[8] Vgl. auch GARMAN (1997, pp. 70ff) und JORION (1997, pp. 153ff).
[9] Eine ausführliche Darstellung der Umsetzung dieser Instrumente bei Goldman, Sachs & Co. findet sich bei LITTERMAN (1996).
[10] Die Bewertung von asymetrischen Instrumenten wie Optionen mit dem VaR Ansatz ist insoweit kritisch zu sehen, dass hierbei zuerst nur eine Deltaäquivalent in die Risikobewertung einfliesst und die weiteren Optionsrisiken (Gamma, Theta) nur über Erweiterungen des Modells berücksichtigt werden können. Siehe hierzu J. P. MORGAN/REUTERS (1996, pp. 129ff).

Literatur

GARMAN, M. (1996): „Improving on VAR“, RISK 5, pp. 61ff.
GARMAN, M. (1997): „Taking var to pieces“, RISK 10, pp. 70ff.
J. P. MORGAN / REUTERS (1996): RiskMetrics –Technical Document, 4. Auflage, New York.
JORION, P. (1997): „Value at Risk“, IRWIN, pp. 150–155.
LITTERMAN, R. (1996): „Hot Spots and Hedges“, The Journal of Portfolio Management, special issue 1996, pp. 52–75.
ROLFES, B., H. SCHIERENBECK. und S. SCHÜLLER (Hrsg.): Risikomanagement in Kreditinstituten, Münster 1995.