

Lower Partial Moments und Value-at-Risk: Eine Synthese

1. Einleitung

Der Value at Risk (VaR)-Ansatz bietet sowohl Finanzinstitutionen und Anlegern als auch Kontrollbehörden ein in seiner Intuition einfaches und leicht verständliches Risikokzept, welches die verschiedensten Arten von Marktrisiken eines Portfolios zu einer einzigen Kennzahl zu aggregieren vermag. Die daraus hervorgehende Transparenz und Vergleichbarkeit einzelner Risikokomponenten trägt wesentlich zu einem verbesserten Risikomanagement resp. -controlling bei, wobei die Methodenvielfalt zur Berechnung des VaR parallel zum Akzeptanzgrad dieses Ansatzes mittlerweile enorm angewachsen ist.

Eine Frage, die man sich bei der Risikosteuerung mit VaR aber selten stellt, lautet: Was passiert, wenn der ausgewiesene VaR tatsächlich überschritten wird? Dieser – bei einem Konfidenzniveau von 95% immerhin in einem von zwanzig Tagen – auftretende Fall stellt für das Risikomanagement die eigentliche Bewährungsprobe dar, ist doch der auftretende Verlust plötzlich höher als

die VaR-Kennzahl, auf die man sich bei seinen Entscheidungen verlassen hatte. Es braucht demnach noch zusätzliche Risikokennzahlen, die den Verlust in genau denjenigen Fällen quantifizieren können, in denen der klassische VaR die tatsächliche Risikosituation unterschätzt. Dieser Aufsatz stellt mit dem Shortfall-Value at Risk ein mögliches Risikomass vor, welches eine Aussage über den zu erwartenden Verlust in denjenigen Fällen zulässt, in denen der VaR überschritten wird.

Die VaR-Grundidee steht in einer engen Beziehung zu den sogenannten Lower Partial Moment (LPM)-Massen, welche Risiken auf Basis einer asymmetrischen Perzeption quantifizieren. Dieser – auf nutzentheoretischen Überlegungen basierende und bereits in ROY (1952) erstmals in die Portfoliotheorie eingebundene – Ansatz erfreute sich in den vergangenen Jahren gesteigener Beachtung.[1] In den folgenden Ausführungen wird dargelegt, welche zusätzlichen Informationen über vorhandene Risiken in Portfolios aus den LPM ableitbar sind. Nach einer kurzen Darstellung, wie anhand eines Beispielportfolios eine VaR-Kennzahl mittels verschiedener Berechnungsverfahren kalkuliert wird, vermittelt der zweite Abschnitt eine intuitive Darstellung der Lower Partial Moments als Risikomasse. Anschliessend werden die Gemeinsamkeiten zwischen VaR und LPM dargelegt, um daraus die Shortfall-Value at Risk (SVaR)-Kennzahl abzuleiten. Ausserdem untersucht der dritte Ab-

* Die Autoren danken Heinz Zimmermann für wertvolle Kommentare und Verbesserungsvorschläge. Thomas Portmann (Thomas.Portmann@sbf.unisg.ch) & Patrick Wegmann (Patrick.Wegmann@sbf.unisg.ch), Schweizerisches Institut für Banken und Finanzen, Merkurstrasse 1, CH-9000 St. Gallen; Tel. 0041 - 71 - 220 30 66. Ein Teil dieser Arbeit wurde vom s/bf-HSG Risk Management Team und vom Risklab finanziell unterstützt.

schnitt die Art der Beziehung zwischen den VaR-Risikomassen einerseits und höheren Verteilungsmomenten andererseits. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse liefert der vierte Abschnitt. Insgesamt verfolgt dieser Aufsatz somit zwei Ziele. Erstens werden vorhandene Gemeinsamkeiten zweier auf den ersten Blick unterschiedlich anmutender Risikokonzepte aufgezeigt, um daraus mit dem Shortfall-Value at Risk die Möglichkeiten eines effizienten Risk Managements zu erweitern. Zweitens wird auf die Bedeutung hingewiesen, welche einer sorgfältigen Beschreibung der unterstellten Renditeverteilungen bei der praktischen Quantifizierung von Risiken in Form des VaR resp. des SVaR zukommt. Insbesondere zeigt sich, dass die Beschränkung auf Mittelwert und Varianz als intuitiv einigermaßen zugängliche Lage- und Streuparameter bei nicht-normalen Portfolioverteilungen die entscheidungsrelevanten Risiken in vielen Fällen nicht ausreichend abbilden kann und diese tendenziell unterschätzt. Aus praktischer wie auch aus ökonomischer Sicht implizieren jedoch verfehlte Risikoassessungen resp. ungenügende VaR-Berechnungen in jedem Falle Mehrkosten – unabhängig davon, ob es sich um Opportunitäts- oder tatsächliche Kosten handelt.

2. Value at Risk eines Beispielportfolios

Die Berechnung der VaR-Kennzahl eines bestehenden Portfolios lässt sich auf unterschiedliche Arten durchführen, wobei die jeweiligen Annah-

men sowie Vor- und Nachteile bei der Interpretation des Ergebnisses unbedingt zu berücksichtigen sind.[2] Um die Ausführungen dieses Abschnittes nicht unnötig zu verlängern, beschränkt sich die folgende theoretische Diskussion auf die in diesem Aufsatz verwendeten Methoden.

Unabhängig von der gewählten Berechnungsart liefert die VaR-Masszahl eine Antwort auf folgende Frage: „Welcher Verlust L des Gesamtvermögens W ist von einem Anleger mit einer bestimmten Vertrauenswahrscheinlichkeit α über den Zeitraum von T Tagen bei der momentanen Zusammensetzung seines Portfolios maximal einzukalkulieren?“ Zur Beantwortung dieser Problemstellung müssen in einem ersten Schritt sowohl das vorausgesetzte Konfidenzniveau als auch der angenommene Zeithorizont bestimmt werden, wobei die Wahl beider Parameter grundsätzlich arbiträr erfolgen kann. Das Konfidenzniveau in Form der angenommenen Vertrauenswahrscheinlichkeit hängt neben der Risikofähigkeit des Anlegers ausserdem von der Überprüfbarkeit[3] der VaR-Modellgüte ab und wird in den meisten Fällen zwischen 95% und 99% angenommen. Der festgelegte Zeitraum, über welchen die VaR-Kennzahl ermittelt wird, bestimmt sich weitgehend durch die Portfoliostruktur resp. der Möglichkeit, die darin enthaltenen Risikopositionen vollständig am Markt zu liquidieren oder gegen adverse Portfolioeinflüsse abzusichern.[4]

Das Beispielportfolio aus sechs Schweizer Aktien besitzt die in Tabelle 1 dargestellte Struktur, wo-

Tabelle 1: Prozentuale Struktur des Beispielportfolios zur VaR-Berechnung

Asset	Roche GS	Zürich N	Nestlé N	CS N	ABB N	Schindler N
Anteil (%)	34.6	5.4	28.1	7.9	12.9	11.1

Die Gewichtung erfolgt auf Basis der monatlichen, auf stetiger Basis errechneten Renditen der einzelnen Assets über die Zeitperiode vom 12/91 bis 12/96, wobei sich der zur Berechnung verwendete Algorithmus an SERF (1995) anlehnt. Grundsätzlich hätte dieses Verfahren auch auf die in der Folge betrachteten Tagesrenditen angewendet werden können. Davon wird jedoch aus Komplexitätsgründen bei der Berechnung abgesehen.

Bei insgesamt zehn Millionen Sfr. als Ausgangsvermögen W investiert sind. Die einzelnen Gewichtung ist derart gewählt, dass exakt das risikominimale Portfolio resultiert, wenn als Risikomass das LPM(2;4%) unter Ausschluss von Leerverkäufen unterstellt wird.[5]

Für dieses Portfolio wird mit verschiedenen Verfahren der VaR ermittelt, wobei aufgrund der raschen Liquidierbarkeit des Portfolios und des geringen zeitlichen Aufwands zur VaR-Berechnung immer ein Zeithorizont von einem Tag unterstellt wird.

2.1 Historische Simulation[6]

Auf Basis der täglichen, stetigen Assetrenditen des Zeitfensters Januar 1987 bis Dezember 1996 wird im ersten Schritt untersucht, welche Portfoliorendite bei konstanten Assetgewichten an jedem einzelnen Tag erzielt worden wäre. Die daraus hervorgehenden $N = 2'609$ simulierten Portfoliorenditen werden danach zur entsprechenden Portfoliowertveränderung umgerechnet und diese wiederum der Grösse nach aufsteigend geordnet. Aus den N absoluten Portfolioveränderungen kann der VaR unter dem gewählten Konfidenzniveau eruiert werden, indem aus der Reihe aller grössengeordneter Portfolioveränderungen derjenige Wert gesucht wird, welcher an der n -ten Stelle steht, wobei sich n errechnet als:

$$n = \text{Ganzzahl}[N \cdot \alpha] \quad (1)$$

Dabei steht α für die unterstellte Wahrscheinlichkeit, den errechneten VaR zu überschreiten.[7] Folglich repräsentiert diejenige Wertveränderung, welche an der 130- resp. 26-sten[8] Stelle aller N aufsteigend geordneter Portfolioendwerte steht, den täglichen VaR auf 5%- resp. 1%-Konfidenzniveau.

2.2 Monte Carlo Simulation[9]

Bei diesem Verfahren wird die „Overnight“-Wertveränderung des Portfolios N -fach[10] simuliert, wobei für jede einzelne Renditesimulation r_t eines Assets eine Brownsche Bewegung mit Drift folgender Form unterstellt wird:

$$r_t = \mu \Delta t + \sigma_t \varepsilon \sqrt{\Delta t} \text{ mit } \varepsilon \sim N(0,1) \quad (2)$$

Mittelwert μ und Standardabweichung σ_t werden aus den historischen Daten ermittelt. Die VaR-Berechnung wird dabei einerseits auf Annahme einer konstanten Volatilität, $\sigma_t = \sigma$ durchgeführt, wobei die auf historischer Basis ermittelten Korrelationsbeziehungen zwischen den einzelnen Assets wird durch Anwendung der Cholesky-Zerlegung[11] berücksichtigt werden. Die damit simulierten Assetrenditen werden nach der Aggregation zur Gesamtportfoliorendite verwendet, um die jeweilige Portfoliowertveränderung zu errechnen und aufsteigend zu ordnen. Die Bestimmung des konfidenzniveauabhängigen VaR entspricht in der Folge dem bereits bei der historischen Simulation beschriebenen Verfahren.

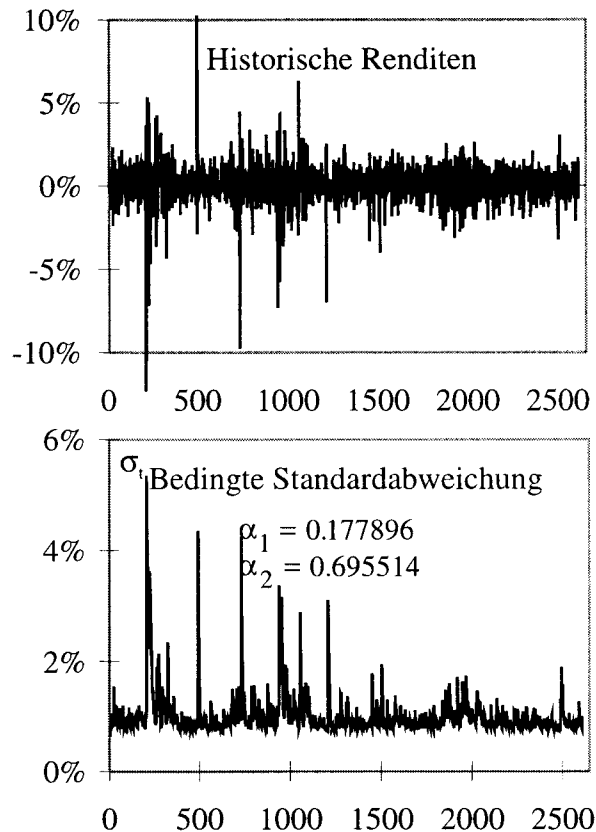
Andererseits wird – basierend auf der konstant angenommenen Gewichtung – die historische Portfoliorenditezeitreihe verwendet, um σ_t als GARCH(1,1)-Prozess[12] zu schätzen. Damit soll erreicht werden, den empirisch beobachtbaren Effekt des „Volatility clusterings“[13] gemäss Abbildung 1 bei der Berechnung des VaR zu berücksichtigen:

$$r_t = \sigma_t \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (3)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \alpha_2 \sigma_{t-1}^2$$

Dabei bildet die Beziehung $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$ die Persistenz eines in der Vergangenheit erfolgten Informationsschocks auf die bedingte Varianz zum Zeitpunkt t ab, wobei ein grosser Wert für α_1 die Ausschlagfrequenz von σ_t erhöht. Das Modell lässt sich auf (2) reduzieren, wenn

Abbildung 1: Bedingte Standardabweichungen aus Simulation eines GARCH(1,1)-Prozesses



Die in der unteren Grafik eingefügten Schätzparameter sind das Ergebnis einer auf dem Maximum Likelihood-Verfahren beruhenden Optimierung, welche auf den historischen Portfoliorenditen (obere Grafik) basiert (cf.: HAMILTON [1994, S. 660f.]).

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ sowie $\mu = 0$ angenommen werden. Bei Betrachtung der oberen Grafiken in Abbildung 1 fällt sofort auf, dass in gewissen Zeitperioden der Vergangenheit gehäuft hohe Renditeschwankungen zu beobachten waren, während umgekehrt diese in gewissen Phasen tendenziell eher tief ausfielen. Somit ist die Annahme einer im Zeitablauf konstanten Volatilität zur Erfassung des tatsächlichen Renditeverhaltens nicht gerechtfertigt. Zu diesem Zweck fließt die in der unteren Grafik wiedergegebene Schätzung eines GARCH(1,1)-Prozesses in die Berechnung ein, da die Volatili-

täten dadurch zeitvariabel modelliert werden.[14] Wiederum wird aus den derart evaluierten Portfoliorenditen die entsprechende Wertveränderung abgeleitet, um daraus auf Basis des vorgegebenen Konfidenzniveaus den VaR zu errechnen.

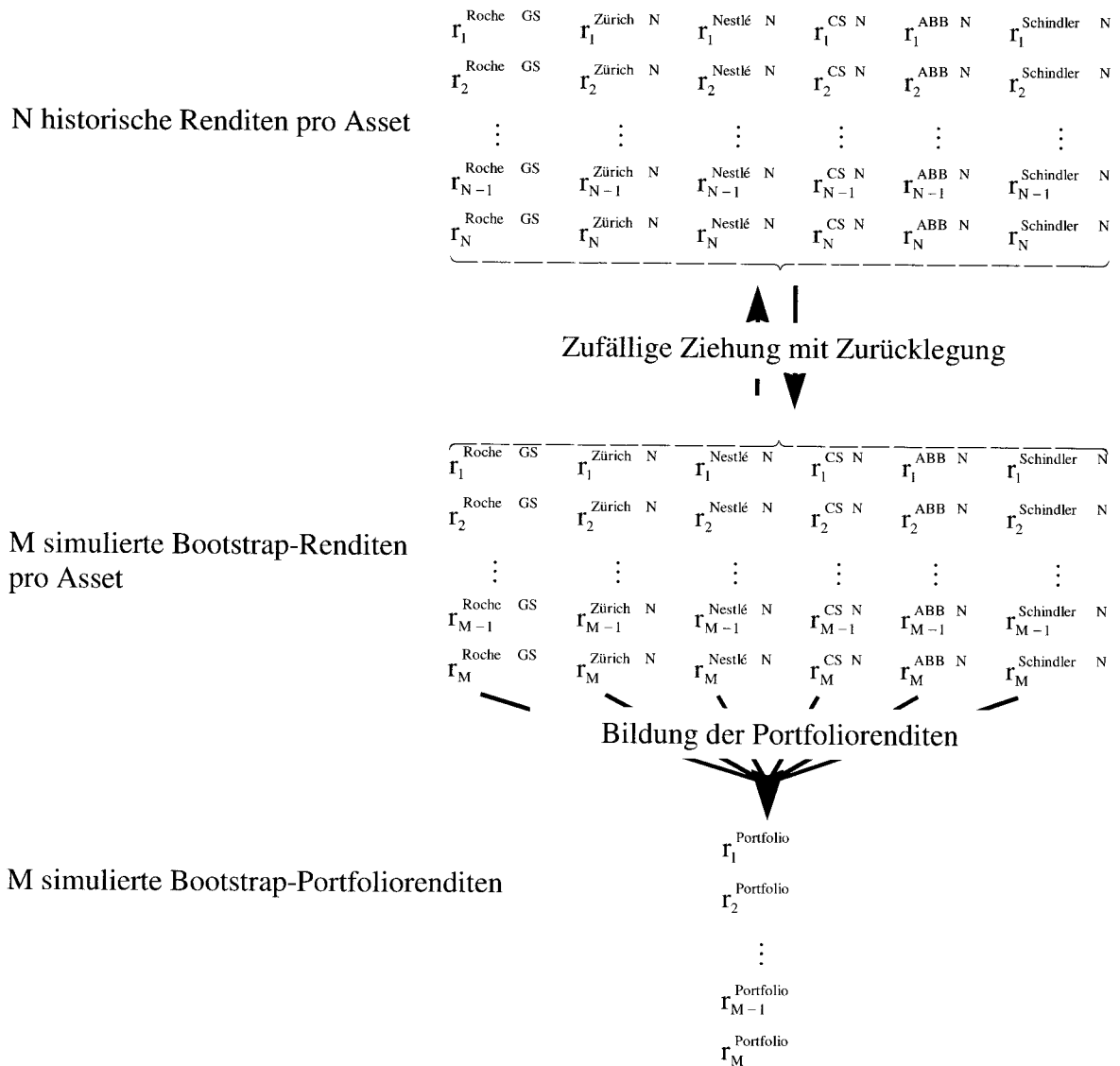
2.3 Bootstrap-Verfahren[15]

Die Grundidee dieses Verfahrens besteht in der mehrfachen, zufälligen Ziehung einzelner Renditen aus dem historischen Renditeset. Die zu Beginn

festgelegte Anzahl Ziehungen M erfolgt dabei grundsätzlich arbiträr und kann beispielsweise aufgrund des erforderlichen Rechenaufwands abgeleitet werden. Abbildung 2 illustriert den Ablauf dieses Verfahrens: Aus den N historischen Ren-

ditezeitpunkten wird zufällig in Renditevektor $\{r_{1n}^{\text{Roche GS}}, r_{1n}^{\text{Zürich N}}, \dots, r_{1n}^{\text{Schindler N}}\}$ gezogen und als simulierte Rendite verwendet. Eine derartige Ziehung wird insgesamt M -mal durchgeführt,

Abbildung 2: Illustration des Bootstrap-Verfahrens



Man beachte, dass die durch die Simulation ausgewählten M Renditetupel nur zufälligerweise dieselbe Reihenfolge wie die Renditen der historischen Reihe aufweisen. So entspricht beispielsweise der aus der zwanzigsten Simulation hervorgehende Renditevektor $\{r_{20}^{\text{Roche GS}}, \dots, r_{20}^{\text{Schindler N}}\}$ nur dann dem historischen Renditevektor $\{r_{20}^{\text{Roche GS}}, \dots, r_{20}^{\text{Schindler N}}\}$, wenn letzterer beim zwanzigsten Simulationsvorgang gezogen wird.

Tabelle 2: VaR-Kennzahlen unter alternativen Verfahren

Ausgangsvermögen $W = 10'000'000$	5%-Konf.niv.	1%-Konf.niv.
Simulation mit historischen Renditen	141'444	286'400
MC-Simulation (μ , σ konstant)	109'239	156'278
MC-Simulation unter GARCH(1,1)-Prozess	158'485	256'875
Bootstrap-Verfahren	142'525	285'332

MC steht als Abkürzung für die Monte Carlo-Simulation. Die dargestellten VaR basieren – mit Ausnahme der historischen Simulation – auf dem Mittelwert aus der jeweils 300-fachen Simulation mit einer der historischen Renditezeitreihe entsprechenden Länge. Damit ergeben sich pro Berechnungsmethode rund 780'000 Simulationen. Natürlich darf bei der Interpretation dieser Kennzahlen nicht ausser Acht gelassen werden, dass jede Neuberechnung zu anderen Resultaten führt.

wobei die selektionierten Renditen jeweils zurückgelegt und damit mehrfach ausgewählt werden können. Wiederum werden die jeweiligen absoluten Wertveränderungen errechnet und aufsteigend sortiert, um damit den VaR zum entsprechenden Konfidenzniveau mit Hilfe von (1) eruiieren zu können. Wie bei der historischen Simulation werden bei diesem Verfahren neben den vorhandenen Korrelationen zwischen den einzelnen Assets auch allfällige Schiefe- oder Kurtosiseseigenschaften innerhalb des Quelldatensets beibehalten. Umgekehrt bleiben zeitliche Interdependenzen zwischen den Renditen unberücksichtigt. Darüber hinaus muss die Anzahl durchzuführender Simulationen M recht gross angesetzt werden, um die Aussagekraft der VaR-Berechnung zu gewährleisten. Entsprechend erhöht sich damit die notwendige Rechenzeit.

Tabelle 2 vermittelt eine Übersicht der jeweiligen konfidenzniveauabhängigen VaR-Kennzahlen unter verschiedenen Verfahren. Insgesamt zeigt sich dabei, dass die sich einzig auf konstante Parameter μ und σ abstützende Monte Carlo-Simulation den VaR weit geringer ausweist als die übrigen Simulationsverfahren und damit offenbar leptokurtische Effekte[16] des tatsächlichen Renditeverhaltens nicht berücksichtigt. Umgekehrt vermittelt der VaR unter einem GARCH(1,1)-Prozess ein im Vergleich zur historischen Simulation je nach ge-

wähltem Konfidenzniveau unterschiedliches Risiko. Die Resultate des Bootstrap-Verfahrens liegen in ihrer Grössenordnung im Bereich der historischen Simulation, obschon der 5%-VaR kleiner und der 1%-VaR geringfügig grösser ausfällt. Zusammenfassend lässt sich damit festhalten, dass die Wahl der Berechnungsmethode einen entscheidenden Parameter für die Höhe des VaR darstellt, da offenbar höhere Verteilungsmomente wie Schiefe und Kurtosis das Risiko eines Portfolios nachhaltig beeinflussen.

3. Lower Partial Moments als Risikomasse

In jüngerer Vergangenheit beschäftigt sich die Finanzmarkttheorie wieder vermehrt[17] mit den sogenannten Lower Partial Moments zur quantitativen Erfassung von Portfoliorisiken. Diese Kennzahlen können im statistischen Sinne als nichtzentrale Verteilungsmomente verstanden werden, wobei sich der Betrachtungsbereich nur auf den unteren Teil der gesamten Verteilung bezieht. Bis zu welchem Ausmass die Verteilung in die Berechnung der LPM einfließt, hängt von der ex ante spezifizierten Target Rendite τ ab. Formal lässt sich dieser Zusammenhang für den Fall einer stetig verteilten Zufallsvariable X mit $x \in \mathfrak{R}$ folgendermassen spezifizieren:

$$\text{LPM}(n; \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - x)^n f(x) dx = \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - x)^n dF(x) \quad (4)$$

Dabei bezeichnet in (4) $f(x)$ die als bekannt vorausgesetzte Dichtefunktion zur Quantifizierung der Wahrscheinlichkeit, mit welcher X den spezifischen Wert x annimmt, wobei sich der in die Berechnung einflussende Wahrscheinlichkeitsbereich (aufgrund der oberen Integrationsgrenze) nur bis zur Target Rendite τ erstreckt. Entscheidende Bedeutung kommt zudem der Variablen n zu, welche die Ordnung des LPM bestimmt:

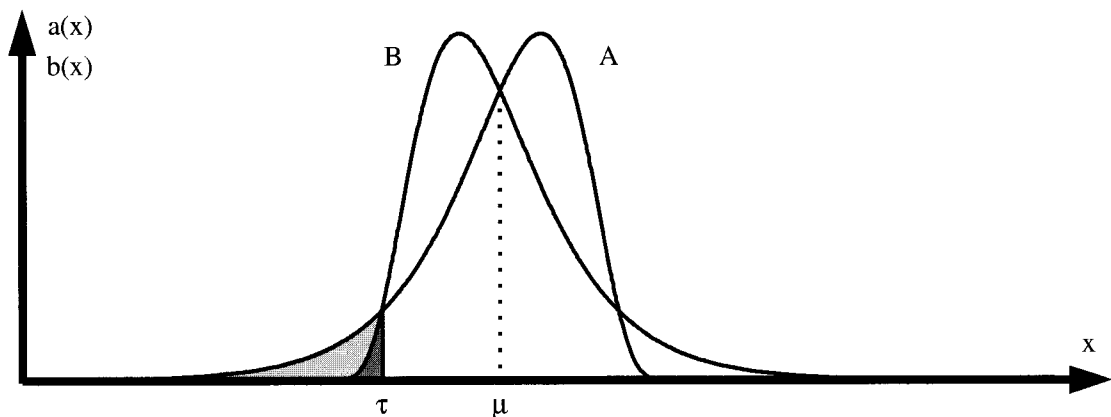
Unter $n = 0$ besitzt das eigentliche Ausmass der Unterschreitung von τ keine Bedeutung; entsprechend besteht das $\text{LPM}(0; \tau)$ einzig aus der Summe aller Eintrittswahrscheinlichkeiten für $x \in (-\infty, \tau]$ und wird naheliegenderweise als Ausfallwahrscheinlichkeit bezeichnet.[18]

Das $\text{LPM}(1; \tau)$ weist die durchschnittliche Unterschreitungsdistanz zur Zielrendite τ aus, indem die Abweichungsdifferenzen zwischen den einzelnen, unterhalb von τ liegenden Ausprägungen

$x \in (-\infty, \tau]$ und τ wahrscheinlichkeitsgewichtet aufsummiert werden. Ein derart berechneter Term wird deshalb auch als Ausfallerwartung bezeichnet. Um daraus den bedingten Erwartungswert für $x \leq \tau$ ableiten zu können, muss zuerst das gemäss (4) unter $n = 1$ berechnete $\text{LPM}(1; \tau)$ durch die Ausfallwahrscheinlichkeit $\text{LPM}(0; \tau)$ dividiert werden. Der bedingte Erwartungswert $\mu_{x \leq \tau}$ resultiert dann aus der Subtraktion dieser standardisierten Ausfallerwartung vom Target Return τ .

Mit der quadrierten Erfassung der Abweichungsdifferenzen in (4) wird das $\text{LPM}(2; \tau)$ ermittelt. Dieses Mass wird entsprechend als Ausfallvarianz oder – bei Bildung der Quadratwurzel – als Ausfallstandardabweichung bezeichnet. Analog zur klassischen Varianz gewichtet $\text{LPM}(2; \tau)$ Ausprägungen $x \in (-\infty, \tau]$, welche weit unterhalb von τ liegen, resp. deren Differenzen zur Target Rendite durch die Potenzierung mit $n = 2$ stärker als nahe bei τ vorkommende Werte. Es muss darüber hinaus beachtet werden, dass – im Unterschied zur

Abbildung 3: Rechts- und linksschiefe Dichtefunktionen zweier Portfolios A und B



Die dargestellten Graphen stellen Dichtefunktionen einer lognormalverteilten Zufallsvariablen B und ihrer Spiegelung am Mittelwert μ , A, dar, womit sowohl Mittelwert als auch Varianz resp. Standardabweichung gleich sind. Damit ergibt eine Portfolio Selection im Sinne von MARKOWITZ (1952) keine Unterschiede. Andererseits ist klar ersichtlich, dass sich die Schiefeffizienten beider Portfolios unterscheiden.

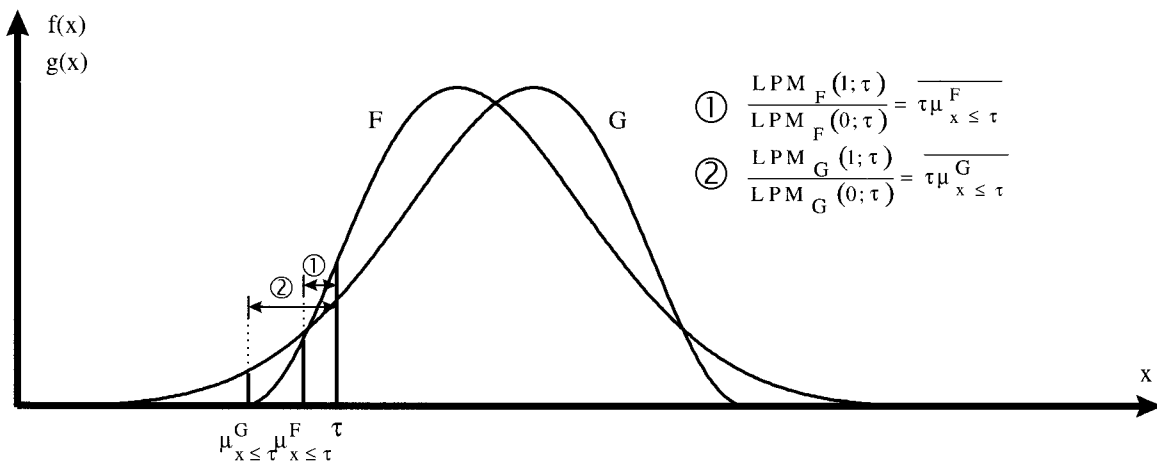
klassischen Varianz – als Bezugspunkt der LPM(2;τ)-Berechnung weder das erste zentrale Verteilungsmoment[19] μ noch der bedingte Erwartungswert $\mu_{x \leq \tau}$ einbezogen werden, sondern die Zielrendite τ . Entsprechend zu den Bezeichnungen der höheren statistischen Momente lassen sich ausserdem auch die asymmetrischen Lower Partial Moments für $n|_{N^+} > 2$ terminologisch ableiten.[20]

Abbildung 3 stellt beispielhaft die jeweiligen Ausfallwahrscheinlichkeiten unter der Target Rendite τ für zwei beliebige Portfolios A und B mit entsprechenden Renditedichtefunktionen dar. Die beiden Portfolioverteilungen sind dabei so gewählt, dass sowohl Mittelwert als auch Varianz übereinstimmen. Bemerkenswert ist in diesem Zu-

sammenhang, dass einerseits eine ausschliesslich Mittelwert und Varianz berücksichtigende Portfolio Selection im Sinne von MARKOWITZ (1952) die Portfolios nicht zu unterscheiden vermag. Andererseits wird ein Anleger unter Berücksichtigung des LPM(0;τ)[21] das rechtsschiefe Portfolio B vorziehen, welches aufgrund seiner Rechtsschiefe einen wesentlich besseren Schutz gegen tiefe Ausprägungen der Ergebniszufallsvariablen aufweist, ohne darüber hinaus Gewinnchancen abzuschneiden.

Abbildung 4 illustriert die Beziehung zwischen der Ausfallerwartung resp. des LPM(1;τ) und dem bedingten Erwartungswert $\mu_{x \leq \tau}$ für Ausprägungen $x \leq \tau$ anhand zweier beliebiger Portfoliorenen-

Abbildung 4: Darstellung der standardisierten Ausfallerwartungen unter zwei Verteilungen F und G



In der Grafik wird davon ausgegangen, dass die Target Rendite τ für beide Verteilungen gleich ist. Um auf Basis der Ausfallerwartung den bedingten Erwartungswert der Verteilung zu erhalten, muss das LPM(1;τ) mit der jeweiligen Ausfallwahrscheinlichkeit LPM(0;τ) standardisiert werden, damit der bedingte Wahrscheinlichkeitsraum unterhalb von τ und somit der Integrationsbereich der Zufallsvariable X den Wert 1 aufweist. Andernfalls lässt sich das LPM(1;τ) nicht als Moment im eigentlichen Sinne interpretieren. Diese derart standardisierte Ausfallerwartung kann dann von der Target Rendite τ subtrahiert werden, um daraus den bedingten Erwartungswert $\mu_{x \leq \tau}$ zu berechnen. Aus Veranschaulichungsgründen wird für die standardisierten Ausfallerwartungen die Beziehung $\frac{LPM_F(1;\tau)}{LPM_F(0;\tau)} < \frac{LPM_G(1;\tau)}{LPM_G(0;\tau)}$ angenommen.

diteverteilungen F und G . [22] Dabei wird ersichtlich, dass eine Zunahme der standardisierten Ausfallerwartung automatisch eine Verminderung des bedingten Erwartungswertes $\mu_{x \leq \tau}$ bewirkt, falls die Target Rendite τ konstant ist. [23] Wie im Folgeabschnitt gezeigt wird, lässt sich der VaR-Ansatz durch Berücksichtigung des $LPM(1; \tau)$ erweitern.

4. Integration der LPM-Masse in den VaR-Ansatz

Die VaR-Grundidee spezifiziert als Zielgrösse den mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit maximal einzukalkulierenden Verlust L (resp. die maximale Verlustrendite τ) [24]. Andererseits sucht das $LPM(0; \tau)$ die Wahrscheinlichkeit, die vorgegebene Target Rendite τ nicht zu erreichen. Entsprechend lässt sich zwischen der VaR-Kennzahl und dem $LPM(0; \tau)$ eine enge Beziehung darstellen, da beide Kennzahlen zwar unterschiedliche Ziele verfolgen, dabei jedoch auf denselben Parametern aufbauen. Ausgangspunkt der Umformung bildet die Gleichung (4) mit $n = 0$ unter der Voraussetzung, dass das $LPM(0; \tau)$ exakt der Vertrauenswahrscheinlichkeit α der VaR-Messung entspricht:

$$LPM(0; \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - x)^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\tau} f(x) dx = \alpha \quad (5)$$

Unter der Annahme, dass für die Dichtefunktion eine entsprechende Verteilungsfunktion $F(x)$ existiert, lässt sich (5) durch Bildung der Stammfunktion umformulieren als

$$LPM(0; \tau) = [F(x)]_{-\infty}^{\tau} = F(\tau) - \underbrace{F(-\infty)}_{=0} = \alpha \quad (6)$$

Der Übergang zur Verlustrendite wird schliesslich durch Anwendung der Kehrfunktion von $F(x)$ vollzogen:

$$\begin{aligned} LPM(0; \tau) = F(\tau) = \alpha &\Rightarrow F^{-1}(\alpha) \\ &= F^{-1}(LPM(0; \tau)) = \tau \end{aligned} \quad (7)$$

Andererseits lässt sich der VaR in äquivalenter Form mittels der stetigen Verlustrendite τ ausdrücken:

$$VaR = L = W - e^{\tau} W = W(1 - e^{\tau}) \quad (8)$$

Die Gleichungen (7) und (8) ergeben in Kombination die zentrale Beziehung zwischen VaR und $LPM(0; \tau)$:

$$\begin{aligned} VaR = W(1 - e^{\tau}) &= W(1 - e^{F^{-1}(\alpha)}) \\ &= W(1 - e^{F^{-1}(LPM(0; \tau))}) \end{aligned} \quad (9)$$

Die Bedeutung dieser Gleichung besteht darin, dass sich aus VaR-Kennzahlen sehr einfach Lower Partial Moments der Ordnung Null berechnen lassen – et vice versa. Insbesondere ist ersichtlich, dass der VaR mit zunehmender Ausfall- resp. abnehmender Vertrauenswahrscheinlichkeit abnimmt. [25]

Eine Erweiterung des klassischen VaR-Konzeptes lässt sich durch Einbezug der nächsthöheren LPM-Ordnung in Form der Ausfallerwartung erreichen. Dieses Risikomass ist gemäss (4) unter $n = 1$ definiert als

$$LPM(1; \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - x)^1 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - x) f(x) dx \quad (10)$$

Wie gezeigt wird, kann mit dem $LPM(1; \tau)$ eine quantitative Aussage darüber gewonnen werden, wie hoch der zu erwartende Verlust dann sein wird, wenn die tatsächliche Wertverminderung des Portfolios grösser ist als der berechnete VaR. Ausgehend von der mit der vorgegebenen Vertrauenswahrscheinlichkeit korrespondierenden und entsprechend über das $LPM(0; \tau)$ errechenbaren Target Rendite τ lässt sich die bedingte Verlusterwartungsrendite $\mu_{x \leq \tau}$ über die standardisierte Ausfallerwartung ermitteln als

Tabelle 3: VaR und SVaR für unterschiedliche Konfidenzniveaus

Ausgangsvermögen W = 10'000'000	VaR (5%)	SVaR (5%)
Simulation mit historischen Renditen	141'444	244'484
MC-Simulation (μ, σ konstant)	109'239	137'687
MC-Simulation unter GARCH(1,1)-Prozess	158'485	225'541
Bootstrap-Verfahren	142'525	243'027
Ausgangsvermögen W = 10'000'000	VaR (1%)	SVaR (1%)
Simulation mit historischen Renditen	286'400	469'498
MC-Simulation (μ, σ konstant)	156'278	178'647
MC-Simulation unter GARCH(1,1)-Prozess	256'875	356'505
Bootstrap-Verfahren	285'332	458'302

Für die verschiedenen Berechnungsverfahren wird neben dem klassischen Value at Risk zusätzlich der Shortfall-Value at Risk (SVaR) ausgewiesen, welcher eine Masszahl für den zu erwartenden Verlust darstellt, falls der VaR überschritten wird. Die Simulationen wurden dabei in gleicher Weise wie in Tabelle 2 durchgeführt.

$$\tau - \frac{LPM(1; \tau)}{LPM(0; \tau)} = \tau - \frac{\int_{-\infty}^{\tau} (\tau - x) f(x) dx}{\int_{-\infty}^{\tau} f(x) dx} = \mu_{x \leq \tau} \quad (11)$$

Damit lässt sich eine Aussage über die ausfallkonditionierte Verlusterwartung gewinnen, welche in der Folge als Shortfall-Value at Risk (SVaR) bezeichnet wird. Diese Kennzahl stellt ein Mass für den zu erwartenden Verlust dar, falls der klassische VaR überschritten wird:

$$L_{x \leq \tau} = W(1 - e^{-\mu_{x \leq \tau}}) = W - W \cdot e^{-\mu_{x \leq \tau}} = W - W \cdot \exp\left(\tau - \frac{\int_{-\infty}^{\tau} (\tau - x) f(x) dx}{\int_{-\infty}^{\tau} f(x) dx}\right) = SVaR \quad (12)$$

Aus (12) lässt sich somit zwischen dem VaR- und dem LPM-Ansatz auf Basis des Shortfall-Value at Risk resp. der standardisierten Ausfallerwartung eine funktionale – im Gegensatz zu (9) allerdings positive – Beziehung feststellen.

Auf Basis dieser Überlegungen weist Tabelle 3 für das Beispielportfolio neben den VaR-Kennzahlen für unterschiedliche Konfidenzniveaus zusätzlich die SVaR-Werte aus, welche sich folgendermassen interpretieren lassen: An 5% aller Tage muss ein Anleger auf Basis der historischen Renditesimulation einen grösseren Verlust als 141'444 Franken in Kauf nehmen. Gegeben einer dieser Tage trete ein, so beträgt der erwartete Verlust rund 244'000 Franken.

Bei Betrachtung der Ergebnisse fällt auf, dass beide Risikomasse, VaR und SVaR, sehr stark von der gewählten Berechnungsart abhängig sind. Insbesondere die parameterkonstante Monte Carlo-Simulation auf Basis der Normalverteilung weist im Vergleich zu den anderen Verfahren sehr viel tiefere Risiken aus. Daraus lässt sich die Vermutung ableiten, dass die höheren Verteilungsmomente einen wichtigen Einfluss sowohl auf den VaR resp. das LPM(0;τ) einer- als auch auf den SVaR resp. das (standardisierte) LPM(1;τ) andererseits ausüben.

Tabelle 4: Ergebnisse des Spearman-Rangkorrelationstest

MC mit konst. μ und σ	Schiefe – VaR	Kurtosis – VaR	Schiefe – SVaR	Kurtosis – SVaR
5%-Konfidenzniveau	-0.302** (0.000)	-0.046 (0.431)	-0.546** (0.000)	0.309** (0.000)
1%-Konfidenzniveau	-0.461** (0.000)	0.355** (0.000)	-0.487** (0.000)	0.527** (0.000)
MC unter GARCH(1,1)	Schiefe – VaR	Kurtosis – VaR	Schiefe – SVaR	Kurtosis – SVaR
5%-Konfidenzniveau	-0.101 (0.082)	-0.085 (0.142)	-0.632** (0.000)	0.310** (0.000)
1%-Konfidenzniveau	-0.388** (0.000)	0.087 (0.132)	-0.709** (0.000)	0.471** (0.000)
Bootstrap-Verfahren	Schiefe – VaR	Kurtosis – VaR	Schiefe – SVaR	Kurtosis – SVaR
5%-Konfidenzniveau	-0.153** (0.008)	0.083 (0.151)	-0.555** (0.000)	0.465** (0.000)
1%-Konfidenzniveau	-0.438** (0.000)	0.215** (0.000)	-0.677** (0.000)	0.603** (0.000)

Der Test untersucht die Korrelationen zwischen Schiefe resp. Kurtosis und VaR bzw. SVaR der 300 Simulationen auf Signifikanz. Die Nullhypothese geht davon aus, dass keine Korrelation besteht. In Klammern sind die jeweiligen Fehlerwahrscheinlichkeiten 1. Art aufgeführt. Mit ** bezeichnete Korrelationskoeffizienten sind auf dem 1%-Niveau signifikant von Null verschieden.

Über die Art dieser Abhängigkeit gibt Tabelle 4 Aufschluss, welche die Ergebnisse des nichtparametrischen Rangkorrelationstests nach Spearman[26] darstellt. Dieses Testverfahren ermittelt die jeweiligen Korrelationen zwischen der Portfolioschiefe resp. -kurtosis einerseits und dem VaR sowie dem SVaR andererseits, wobei die Resultate auf den 300 Durchläufen der beiden Monte Carlo-Simulationen sowie des Bootstrap-Verfahrens basieren. Dabei zeigt sich, dass insbesondere der SVaR aufgrund der signifikanten Korrelationen negativ von der Schiefe resp. positiv von der Kurtosis abhängig ist (Spalten „Schiefe – SVaR“ & „Kurtosis – SVaR“), während die Resultate für den klassischen VaR einzig für die Schiefebeziehung teilweise statistische Aussagekraft besitzen (Spalte „Schiefe – VaR“). Im Falle der Kurtosis lässt sich hingegen kein eindeutiger Schluss ziehen; offenbar bedarf es ausserdem einer hinreichend grossen Vertrauenswahrscheinlichkeit, um eine signifikante Beziehung ableiten zu kön-

nen. Der Umstand, dass der Einfluss der Kurtosis auf den 5%-VaR nicht als statistisch signifikant ausgewiesen wird, lässt sich intuitiv dennoch relativ leicht erklären, wenn man sich das Verteilungsverhalten bei ändernder Kurtosis vor Augen führt.[27] Fasst man somit den VaR resp. SVaR als Risikoparameter auf, so lassen sich diese Resultate dahingehend interpretieren, dass rechtschiefe und / oder platykurtische[28] Verteilungen für den Anleger risikominderndes Verhalten aufweisen. Die gezeigte, enge Verwandtschaft zwischen den VaR-Risikomassen und der LPM-Familie gestattet zudem für letztere die Ableitung analoger Aussagen.

Die Tatsache, dass Verteilungsmomente einen nachweisbaren Einfluss auf die dargestellten Risikomasse ausüben, hat für das Risikomanagement weitreichende Konsequenzen: So wird insbesondere deutlich, dass die blosser Annahme einer Normalverteilung bei der Renditebeschreibung zu stark verzerrten Ergebnissen bei der Beurteilung

von Risikopositionen führen kann. Natürlich ist diese Fehlannahme insbesondere dann gefährlich, wenn effektive Renditeverteilungen linksschief und/oder leptokurtisch sind, da dabei die Risikosituation eines Portfolios sowohl durch den VaR als auch den SVaR unterschätzt wird. Wird jedoch die Risikosituation durch diese Kennzahlen als zu dramatisch ausgewiesen, so entstehen Opportunitätskosten, indem eine Unternehmung unnötigerweise tiefverzinsliche Reserven bildet.

Ausserdem lässt sich anhand der ausgewiesenen Ergebnisse in Tabelle 4 die Bedeutung des SVaR aufzeigen: Wenngleich zwischen der Kurtosis und dem VaR auf dem 5%-Konfidenzniveau keine und auf dem 1%-Niveau nur zwei statistisch signifikante Beziehungen festgestellt werden können, so lässt sich für den SVaR eine viel deutlichere Abhängigkeit zur Kurtosis ausmachen. Damit verfeinert die in diesem Aufsatz vorgestellte Erweiterung des VaR-Konzeptes die Risikosteuerung insbesondere bei solchen Assetkategorien, welche in ihrem Renditeverhalten nicht einer Normalverteilung unterliegen.

5. Zusammenfassung

Die Möglichkeit, verschiedene Marktrisiken zu einer einzigen VaR-Kennzahl zu aggregieren, hat die Wirkung und Effizienz des Risikomanagement nachhaltig gesteigert. Insofern repräsentiert VaR ein Hilfsinstrument, welches sowohl auf Investoren- als auch auf Regulatoreseite die Bewirtschaftung resp. Überwachung von Risiken vereinfacht. Es wäre jedoch falsch, einen berechneten VaR unreflektiert in den Entscheidungsprozess einfließen zu lassen, da aus methodischer Hinsicht jedes Verfahren gewissen Nachteilen ausgesetzt ist und demzufolge Implementationsrisiken bestehen. Deshalb müssen der Berechnung unterstellte Annahmen und Voraussetzungen bei der Interpretation einbezogen werden. Entsprechend eruiert dieser Aufsatz exemplarisch auf Basis von insgesamt vier verschiedenen Berechnungsansätzen den VaR eines einfachen Aktienportfolios.

Die dabei erhaltenen VaR-Resultate lassen bemerkenswerte Unterschiede zu Tage treten und sind insbesondere ein Hinweis auf die Rolle der höheren Verteilungsmomente bei der auf dem VaR basierten Ermittlung von Portfoliorisikos. Diese Momentabhängigkeit lässt sich insbesondere durch die Verwendung der in der Vergangenheit wieder vermehrt in die Fachliteratur einflussenden Lower Partial Moments darstellen, da die VaR-Kennzahl in einer engen Beziehung zur Ausfallwahrscheinlichkeit resp. zum $LPM(0;\tau)$ steht.

Die Integration des $LPM(1;\tau)$ in das VaR-Framework liefert in Form des Shortfall-Value at Risk (SVaR) eine Masszahl, welche den zu erwartenden Verlust für den Fall ausweist, dass der klassische VaR überschritten wird. Mit dieser Masszahl wird die Risikosteuerung einer Finanzinstitution nachhaltig verfeinert, da eine durchschnittliche Verlust erwartung genau für jene – für das Risikomanagement gravierenden – Fälle quantifiziert werden kann, die durch den VaR nicht erfasst werden. Dabei darf auch ein vermeintlich hohes Konfidenzniveau von 95 resp. gar 99% nicht darüber hinwegtäuschen, dass – unabhängig vom gewählten Berechnungsverfahren – im Durchschnitt in einem von zwanzig resp. hundert Tagen der ausgewiesene VaR den maximal zu erwartenden Verlust zu niedrig ausweist und damit die Risikosituation eines Portfolios ex ante unterschätzt. Der SVaR unterstützt jedoch das Risk-Management genau dann, wenn eine auf dem VaR basierende Risikosteuerung versagt. Insofern kann im SVaR ein Komplement zum klassischen VaR gesehen werden.

Darüberhinaus offenbart eine statistische Untersuchung interessante Einsichten, welche den Einfluss der höheren Verteilungsmomente auf die beiden Risikomasse VaR und SvaR überprüft, wenn diese als Mass für das Risiko eines Portfolios interpretiert werden: So zeigt sich insbesondere für den SVaR, dass Portfoliorisiken umso grösser ausfallen, je linksschiefer und/oder leptokurtischer die zugrundeliegenden Verteilungen sind. Wenngleich dieser Befund vor allem für das Schiefemoment in der Fachliteratur bereits ausgiebig unterstrichen

worden ist,[29] so kann durch dieses Ergebnis die Problematik verdeutlicht werden, Risikomanagement auf die Prämisse der – zugegebenermaßen einfach zu handhabenden – Normalverteilung zu stützen. Immerhin muss bedacht werden, dass inadäquate Annahmen bei der Berechnung der Eigenmitteldeckung in jedem Falle Kosten verursachen.

Durch die nachgewiesene Momentabhängigkeit gewinnt der Ansatz an Bedeutung, Portfoliorisiken nicht nur mit dem VaR, sondern zusätzlich mit dem SVaR zu quantifizieren. Mit diesem Konzept wird die Möglichkeit einer verfeinerten Risikosteuerung aufgezeigt, welche hauptsächlich bei solchen Assetkategorien vorteilhaft ist, welche von der Normalverteilungsprämisse abweichen. Wie die teilweise starken Kursausschläge in diesem Jahr eindrücklich aufgezeigt haben, weisen bspw. Aktien leptokurtisches Verhalten auf und sind somit prädestiniert zu einer durch den SVaR erweiterten Risikobetrachtung.

Fussnoten

- [1] Cf. dazu etwa: HARLOW (1988), HARLOW und RAO (1989), REICHLING (1996), RUDOLF (1994), JAEGER, RUDOLF und ZIMMERMANN (1995); Aus terminologischer Sicht wird für den Begriff der Lower Partial Moments vielfach auch das Synonym der *Shortfall* oder *Downside Risiken* angeführt. ROY (1952) überträgt diese Risikomasse nicht in ihrer allgemeinen Form auf die Finanzmarkttheorie, sondern beschränkt sich vielmehr auf die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Portfolios, welches dem Lower Partial Moment nullter Ordnung entspricht.
- [2] Cf. für eine Übersicht: BÜHLER (1996), JORION (1997) oder J.P. MORGAN (1996).
- [3] Cf. dazu: JORION (1997), S. 87.
- [4] Als weiteres Kriterium bei der Festlegung des Zeithorizontes lässt sich der bestehende Trade-off zwischen den Monitoring-Kosten einer- und dem Nutzen einer Früherkennung potentieller Risiken andererseits anführen, wobei beide Komponenten ansteigen, je häufiger der VaR eines Portfolios ermittelt wird.
- [5] Cf. Abschnitt 2 zu näheren Erläuterungen dieses Risikomasses. Die angeführten 4% sind auf stetiger, annualisierter Basis ausgewiesen.
- [6] Der grosse Vorteil historischer Simulationen besteht insbesondere darin, dass die tatsächliche Verteilung der Assetrenditen berücksichtigt wird und neben Schiefe- und Kurtosiseigenschaften insbesondere zeitinstabile Korrelationen zwischen den Assets betrachtet werden. Nachteilig bei diesem Verfahren ist die Tatsache zu beurteilen, dass die Vergangenheit das zukünftige Renditeverhalten hinreichend gut zu beschreiben vermag – eine Voraussetzung, welche insbesondere bei volatiltem ökonomischen Umfeld nur unzureichend erfüllbar ist.
- [7] Da der VaR als erwarteter Verlust und somit als – in der überwiegenden Zahl ökonomisch sinnvoller Anwendungen – positive Zahl ausgewiesen wird, wird von Überschreitung des VaR gesprochen, wenn der tatsächliche Verlust höher als aufgrund der $\alpha\%$ -Vertrauenswahrscheinlichkeit erwartet ausfällt.
- [8] $n = \text{Int}(N \cdot \text{Prob})$

$$= \begin{cases} \text{Int}(2609 \cdot 0.05) = \text{Int}(130.45) = 130 & (5\% \text{-Niveau}) \\ \text{Int}(2609 \cdot 0.01) = \text{Int}(26.09) = 26 & (1\% \text{-Niveau}) \end{cases}$$
 Wird der erhaltene Wert für n abgerundet, so ergibt sich eine tendenziell zu grosse resp. zu konservative VaR-Kennzahl, da damit die (negative) Portfolioveränderung überschätzt wird.
- [9] Der Vorteil dieses Verfahrens besteht darin, dass unterschiedliche Prozesse für die Simulation unterstellt werden können und daraus ein entsprechender VaR abgeleitet werden kann. Umgekehrt sind derartige Berechnungen oftmals mit vergleichsweise hohem Rechenaufwand verbunden.
- [10] Die Anzahl der Simulationen wurde arbiträr in Übereinstimmung mit der historischen Renditezeitreihe festgelegt.
- [11] Cf. dazu: JORION (1997); Ohne dieses Verfahren werden – je nachdem, ob für jede einzelne Rendite oder bloss für jeden einzelnen Renditezeitpunkt eine standardnormalverteilte Zufallszahl ε generiert wird – unkorrelierte oder aber perfekt korrelierte Renditen unterstellt.
- [12] Cf. dazu: BOLLERSLEV (1986), BERA und HIGGINS (1993) oder HAMILTON (1994, S. 657–676); Vereinfachend wird die tägliche Renditeerwartung $\mu = 0$ angenommen. Aus der Überlegung heraus, dass auf effizienten Märkten höhere Risiken grundsätzlich eine im Durchschnitt höhere Renditeerwartung implizieren, liesse sich in (2) auch der Mittelwert μ in Abhängigkeit der Standardabweichung als μ_t zeitvariabel gestalten und durch die Durchführung eines ARCH-M- resp. GARCH-M-Prozesses schätzen. Cf. dazu: ENGLE, LILIEN und ROBINS (1987) oder HAMILTON (1994, S. 667).
- [13] Cf. dazu etwa: MANDELBROT (1963) oder MCNEES (1979).
- [14] Die betrachtete Portfoliorenditezeitreihe weist auf Basis des ARCH-Lagrange Multiplier-Tests eine auf dem 1%-Niveau hochsignifikante, bedingte Heteroskedastizität der Residuen auf, wenn die Renditen auf eine Konstante regressiert werden. Cf. für eine Darstellung dieses Testverfahrens: ENGLE (1982) oder HAMILTON (1994, S. 664f.).
- [15] Cf. dazu: EFRON und TIBISHIRANI (1993) oder JORION (1997, S. 237ff.).
- [16] Eine Untersuchung der historischen Portfoliorenditen offenbart ein stark leptokurtisches Verhalten mit entsprechend ausgeprägten seitlichen Enden (sog. „fat tails“).
- [17] Cf. als Übersichtsartikel: HARLOW (1991) oder SCHUBERT (1996).
- [18] Gerade wegen seiner Einfachheit genügt jedoch das LPM(0; τ) aus nutzentheoretischer Sicht nur sehr allgemein zur Erfassung von Risiken und wird entsprechend kritisiert (HARLOW (1991) oder SCHUBERT (1996)). Auf die entsprechende Literatur, welche die Lower Partial Moments mit der Maximierung des Erwartungsnutzens im Sinne von VON NEUMANN und MORGENSTERN (1944) vergleichend darstellt, sei an dieser Stelle bloss verwiesen: BAWA (1975).
- [19] Grundsätzlich kann natürlich der Verteilungsmittelwert μ als Target Rendite τ in die Berechnung einfließen, woraus sich die klassische Semivarianz ergibt.

- [20] Entsprechend werden diese Risikoterme als Ausfallschiefe, Ausfallkurtosis, etc. bezeichnet.
- [21] Die jeweiligen Ausfallwahrscheinlichkeiten sind in Abbildung 3 durch die unterschiedlich schattierten Flächen dargestellt.
- [22] Zu beachten ist dabei, dass das $LPM(1;\tau)$ durch das $LPM(0;\tau)$ dividiert werden muss, um ein von τ subtrahierbares Mass zu erhalten.
- [23] Unter Gültigkeit von $LPM_F(1;\tau) < LPM_G(1;\tau)$ ist damit die Aussage äquivalent, dass der ausfallkonditionierte Erwartungswert von F grösser ist als derjenige von G, dh. $\mu_{LPM_F(1;\tau)} > \mu_{LPM_G(1;\tau)}$.
- [24] Der maximale Verlust L lässt sich über die Beziehung $L = W \left[1 - e^{-\tau} \right]$ resp. $\tau = \ln \left[1 - \frac{L}{W} \right]$ in die stetige Verlustrendite τ transformieren.
- [25] Diese Beziehung sei am Beispiel einer standardnormalverteilten Zufallsvariable X erläutert: Mit zunehmender Ausfallwahrscheinlichkeit nähert sich das negative Verteilungsargument $z \equiv \frac{\tau - 0}{\sigma}$ dem Wert Null an (sinnvollerweise wird die Möglichkeit eines negativen VaR ausgeschlossen). Damit gilt $\lim_{z \rightarrow 0} z = 1$, womit sowohl der Klammerausdruck als auch der VaR gegen Null streben.
- [26] Cf. dazu: KANJI (1993, S. 93) oder DESHPANDE, GORE und SHANUBHOGUE (1995, S. 71ff.).
- [27] So lässt sich dies damit begründen, dass die Dichtefunktion einer leptokurtischen Verteilung im „halb-linken“ Bereich aller Ausprägungen im Vergleich zur Normalverteilung geringere Wahrscheinlichkeitswerte aufweist, womit das - den VaR massgeblich beeinflussenden - 5%-Quantil näher beim Verteilungsmittelwert zu liegen kommt. Somit nimmt unter Umständen der VaR bei steigender Kurtosis ab.
- [28] Eine Verteilung wird dann als platykurtisch bezeichnet, wenn sie relativ zur (mesokurtischen) Normalverteilung an den Enden sowie um den Mittelwert herum weniger und entsprechend in den „halb-links“ sowie „halb-rechts“ vom Mittelwert liegenden Bereichen mehr Wahrscheinlichkeitsmasse aufweist.
- [29] Cf. SIMKOWITZ und BEEDLES (1978) für eine triparametrische Portfolio Selection sowie KRAUS und LITZENBERGER (1976) für ein entsprechendes CAPM.

Literatur

- BAWA, V. S. (1975): „Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects“, *Journal of Financial Economics* 2, pp. 95–121.
- BERA, A. K. und M. L. HIGGINS (1993): „ARCH Models: Properties, Estimation and Testing“, *Journal of Economic Surveys* 7/4, pp. 305–365.
- BOLLERSLEV, T. (1986): „Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity“, *Journal of Econometrics* 31, pp. 307–327.
- BÜHLER, A. (1998): „Risikosteuerung mit Value-at-Risk-Methoden“, in: B. Gehrige, und H. Zimmermann (Hrsg.): *Fit for Finance*; 5. Auflage, Zürich: Verlag Neue Zürcher Zeitung, pp. 343–366.
- DESHPANDE, J. V., A. P. GORE und A. SHANUBHOGUE (1995): *Statistical Analysis of Nonnormal Data*; New York: John Wiley & Sons.
- EFRON, B. und R. J. TIBISHIRANI (1993): *An Introduction to the Bootstrap*; New York: Chapman & Hall.
- ENGLE, R. F. (1982): „Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation“, *Econometrica* 50, pp. 987–1007.
- ENGLE, R. F., D. M. LILIEN und R. P. ROBINS (1987): „Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model“, *Econometrica* 55, pp. 391–407.
- HAMILTON, J. D. (1994): *Time Series Analysis*; Princeton University Press, New Jersey.
- HARLOW, W. V. (1991): „Asset Allocation in a Downside Risk Framework“, *Financial Analysts Journal* 47 (September), pp. 28–40.
- HARLOW, W. V. und R. K. S. RAO (1989): „Asset Pricing in a Generalized Mean-Lower Partial Moment Framework: Theory and Evidence“, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 24, pp. 285–311.
- KANJI, G. K. (1993): *100 Statistical Tests*; London: SAGE Publications.
- KRAUS, A. und R. H. LITZENBERGER (1976): „Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets“, *Journal of Finance* 31, pp. 1085–1100.
- JAEGER, S., M. RUDOLF und H. ZIMMERMANN (1995): „Efficient Shortfall Frontier“, *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung* 47/4, pp. 355–365.
- JORION, Ph. (1997): *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*; New York: McGraw-Hill Companies.
- MANDELROT, B. (1963): „The Variation of Certain Speculative Prices“, *Journal of Business* 36, pp. 421–440.
- MARKOWITZ, H. M. (1952): „Portfolio Selection“, *Journal of Finance* 7, pp. 77–91.
- MCNEES, S. S. (1979): „The Forecasting Record for the 1970's“, *New England Economic Review*, September / October, pp. 33–53.
- J. P. MORGAN (1996): *Risk Metrics™ – Technical Document*; 4. Auflage, Cf. dazu: www.jpmorgan.com/RiskManagement/RiskMetrics/pubs.html.
- REICHLING, P. (1996): „Safety First-Ansätze in der Portfolio-Selektion“, *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung* 48/1, pp. 31–55.
- ROY, A. D. (1952): „Safety First and the Holding of Assets“, *Econometrica* 20, pp. 431–449.
- RUDOLF, M. (1994): „Efficient Frontier und Shortfall Risk“, *Finanzmarkt und Portfolio Management* 8/1, pp. 88–101.
- SCHUBERT, L. (1996): „Lower Partial Moments in Mean-Varianz-Portfeuilleen“, *Finanzmarkt und Portfolio Management* 10/4, pp. 496–509.
- SERF, B. (1995): *Portfolio Selection auf der Grundlage symmetrischer und asymmetrischer Risikomasse*, Lang-Verlag, Frankfurt a/M.
- SIMKOWITZ, M. A. und W. L. BEEDLES (1978): „Diversification in a Three-Moment World“, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13, pp. 927–941.
- VON NEUMANN, J. und O. MORGENSTERN (1944): *Theory of Games and Economic Behavior*; New Jersey: Princeton University Press.