© Schweizerische Gesellschaft für Finanzmarktforschung (pp. 170–196)

MARKUS RUDOLF*

Heath, Jarrow, Morton Made Easy: Zur präferenzfreien Bewertung von Swaptions

1. Einleitung

Der hier vorgestellte Aufsatz liefert eine einfache Methodik zur Anwendung des Modells von HJM zur Bewertung von Zinsderivaten. Das Modell wird in diesem Aufsatz zur Bewertung von Swaptions eingesetzt. Dabei handelt es sich um extrem hoch kapitalisierte Zinsinstrumente. Sie sind relativ komplex und schwierig zu bewerten. Viele Banken stützen das Risikomanagement ihrer Swaptions auf das Modell von BLACK (1976), welches allerdings für Optionen auf Commodities konstruiert wurde. Da sich die stochastischen Eigenschaften von Swapsätzen stark von denen von Commodities unterscheiden, liegt es nahe, die moderne Literatur zu Zinsstrukturmodellen anstatt des Black-Modells einzusetzen.

Der weltweite Markt für Zinsswaps ist in den letzten 10 Jahren mit einer enormen Dynamik gewachsen. Zinsswaps nehmen eine dominierende Rolle zur Absicherung von Zinstransaktionen aller Art ein. Gemäss einem Überblick der International Swaps and Derivatives Association (ISDA) ist das Handelsvolumen von Zinsswaps von 387 Mrd. US-$ 1987 auf über 12 Billionen US-$ weltweit angestiegen. Optionen auf Swaps, sog. Swaptions, sind wegen ihrer Abhängigkeit von komplexen Risiken aus der Zinsstruktur schwierig zu bewerten. Trotz ihrer erheblichen Bedeutung auf den Kapitalmärkten ist das Problem der Bewertung von Swaptions, und damit auch ihres Risikomanagements, bisher wenig diskutiert. Ein Grund dafür ist, dass Zinsveränderungen im Gegensatz zu Veränderungen von Aktienkursen oder Warenpreisen nicht als lognormalverteilt angenommen werden können. So ist die erwartete Zinsveränderung im Gegensatz zur erwarteten Aktienkursveränderung vom derzeitigen Niveau des Zinssatzes abhängig. Bei einem hohen Zinsniveau wird tendenziell mit fallenden Zinssätzen, bei einem niedrigen Zinsniveau eher mit steigenden Zinssätzen gerechnet.[1] Das zur Bewertung von Swaptions üblicherweise[2] eingesetzte Modell von BLACK (1976) unterstellt unrealistischerweise lognormalverteilte Veränderungen der Swapsätze. Die Literatur zu den Zinsstrukturmodellen verspricht bessere Bewertungsverfahren.

Zinsstrukturmodelle waren in den späten 70er und bis Mitte der 80er Jahre durch am intertemporalen CAPM von MERTON (1973 b) orientierte Gleichgewichtsmodelle geprägt. Als ursprünglicher Ansatz darf sicher das Modell von VASICEK (1977) genannt werden. Neben vielen anderen,

* Ich danke Elion Chin, Wolfgang Drobetz und Jacqueline Henn für hilfreiche Kommentare. Prof. Dr. Heinz Zimmermann danke ich für seine detaillierte Durchsicht des Manuskriptes und für zahlreiche Verbesserungsvorschläge.
Markus Rudolf, Schweizerisches Institut für Banken und Finanzen, Merkurstr. 1, CH - 9000 St. Gallen, Tel.: +41 - 71 - 223 76 53, Fax: +41 - 71 - 223 65 63, Email: Markus.Rudolf@unisg.ch

wichtigen Gleichgewichtsmodellen zur Zinsstruktur hat sich der Ansatz von COX, INGERSOLL und ROSS (1985) etabliert. Erst später gewannen Arbitragemodelle der Zinsstruktur an Gewicht. Dabei griff man auf die Erkenntnisse der Optionspreistheorie von MERTON (1973 a) und BLACK, SCHOLES (1973)[3] zurück. Betrachtet man zinsabhängige Wertpapiere als Zinsderivate, ist im Prinzip die Optionspreistheorie anwendbar, allerdings mit gewichtigen Unterschieden: Anders als die Basispapiere beim Black-Scholes Modell, z.B. Aktienrenditen, folgen Zinssätze nicht Wienerprozessen. Die übliche Annahme für den Zinssatzprozess unterstellt Mean Reversion, d.h. Prozesse, die eine Tendenz zum Mittelwert aufweisen. Einen typischen Prozess, der diese Annahme verwendet, bezeichnet man als Ornstein-Uhlenbeck Prozess. Er wurde von VASICEK (1977) in die Finanzmarkttheorie eingeführt. Darüber hinaus unterscheiden sich Zinsderivate (darunter fallen auch Bonds) von Aktienderivaten dadurch, dass die Veränderung eines Zinssatzes oder einer Forwardrate eine Verschiebung der gesamten Zinsstruktur zur Folge hat. Das erste Modell, welches einen arbitragefreien Prozess für die gesamte Zinsstruktur aufstellt, ist das Modell von HO und LEE (1986). Dabei wird im Gegensatz zu den Gleichgewichtsmodellen von COX, INGERSOLL und ROSS (1985) die am Markt beobachtete Zinsstruktur als gegeben angenommen. Veränderungen der Zinsstruktur müssen mit der beobachteten Zinsstruktur kompatibel (im Sinne von arbitragefrei) sein. Mean Reversion wurde erst von HULL und WHITE (1993) und in verallgemeinerter Form von HEATH, JARROW und MORTON (HJM)[4] (1990, 1991 und 1992) in den Zinsprozess integriert. Dabei ist das HJM Papier von 1992 eine umfassende Version des Modells in kontinuierlicher Zeit, das Modell von 1990 ein Ansatz in diskreter Zeit. Praktisch implementierbar sind beide Modelle nur schwierig. Zum einen aus numerischen Gründen auf die abschliessend noch zu kommen sein wird – zum zweiten, weil es sich um analytisch komplexe Ansätze handelt. Vielleicht aus diesem Grund lieferten HJM (1991) eine vereinfachte Version ihres Modells, die aber konkrete Schritte der Implementierung ausspart.

Auch im deutschen Sprachraum sind Aufsätze zur Zinsstruktur zu nennen. Der Aufsatz von STEINER, MEYER und LUTTERMANN (1994) liefert eine gut strukturierte Anweisung zur Umsetzung des Modells von HO und LEE (1986). Das HULL und WHITE (1993 a und b) Einfaktormodell wird in einem Papier von BÜHLER (1994) abgehandelt und einigen empirischen Tests unterzogen. Eine Erweiterung erfährt das Ho und Lee Modell durch den Aufsatz von SANDMANN und SCHLÖGL (1996). Den Preisunterschied zwischen Zinsforwards und -futures untersuchen, gestützt auf das Modell von HO und LEE (1986), BERENDES und BÜHLER (1994) und MADJLESSI und SCHLAG (1996).

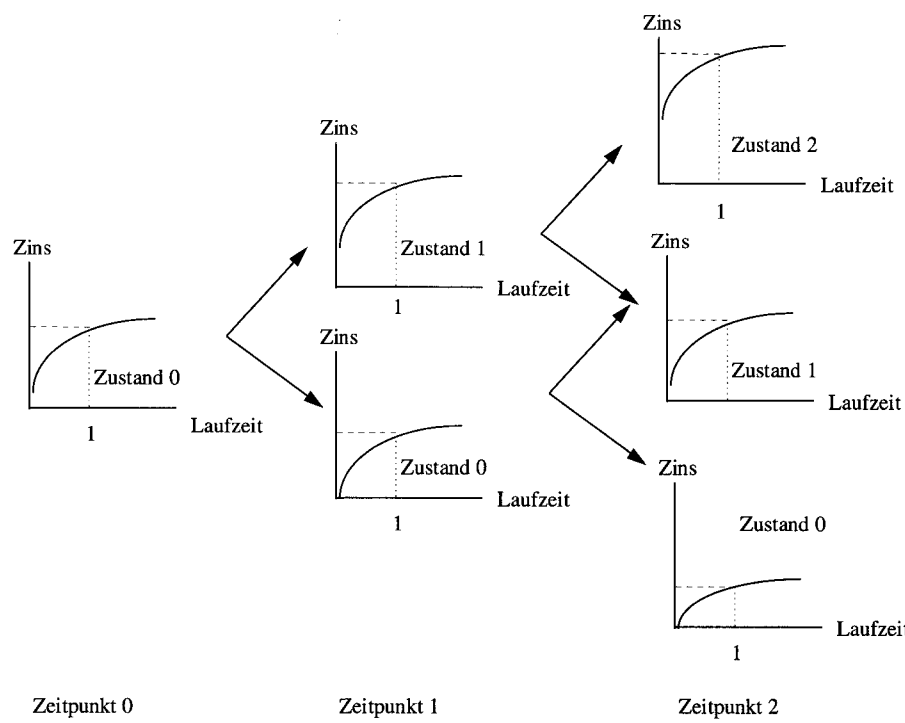
Im vorliegenden Artikel wird das Modell von HJM (1990, 1991, 1992) einfach dargestellt und auf die Bewertung von Swaptions angewendet. Im Buch von JARROW (1996)[5] findet man eine kompliziertere Darstellung des gleichen Problems. Eine bedeutende Verbesserung von HJM gegenüber HO und LEE (1986)[6] besteht darin, dass neben der Modellierung stochastischer Zinsveränderungen auch stochastische Zinsvolatilitätsveränderungen einbezogen werden können. Im vorliegenden Papier soll nach einigen grundsätzlichen Ausführungen zur arbitragefreien Bewertung im zweiten Abschnitt das Modell von HJM in Abschnitt 3 dargestellt werden. In den Abschnitten 4 und 5 wird das HJM Modell zur Illustration auf die Bewertung von Zerobond-Optionen angewandt. Im sechsten Abschnitt wird die Funktionsweise von Swaptions und ihre Bewertung mit dem klassischen Modell von BLACK (1976) dargelegt. In Abschnitt 7 wird die Receiver-Payer Swaption Parität hergeleitet. Abschnitt 8 zeigt, welches Resultat für den Wert einer Swaption im Rahmen des Modells von HJM (1990) erzielt wird. Beide Ergebnisse der verschiedenen Bewertungsverfahren werden hier miteinander verglichen. Die Arbeit wird durch einen zusammenfassenden Abschnitt abgeschlossen.

2. Arbitragerelationen zwischen dem Spot- und Forwardmarkt für Zinssätze

Das Modell von HJM (1990) ist ein Arbitragemodell zur Modellierung der Zinsstrukturkurve. Damit setzt es am binomialen Optionsbewertungsansatz von COX, ROSS und RUBINSTEIN (1979) an, und überträgt ihn auf die Bewertung von zinssensitiven Finanzinstrumenten. Im Anhang ist das Bewertungsverfahren des Binomialmodells und das risikoneutrale Bewertungsprinzip an einem Beispiel veranschaulicht.

Das einfachste HJM Modell ist ebenso wie der Ansatz von COX, ROSS und RUBINSTEIN (1979) ein binomiales Bewertungsmodell. Man spricht von einem Einfaktormodell der Zinsstruktur, weil eine Auf- oder Abwärtsbewegung nur von einem Risikofaktor abhängig ist (z.B. von der Volatilität der Forwardrates). Für die Implementierung eines Zweifaktormodells ist mindestens ein trinomiales Bewertungsmodell notwendig. Allgemein gilt, dass man zur Modellierung jedes zusätzlichen Risikofaktors einen zusätzlichen „Ast" im Bewertungsgitter einsetzen muss.[7] Der methodische Unterschied zwischen der Bewertung von Optionen auf einzelne Aktien und der Bewertung von zinssensiblen Wertpapieren besteht darin, dass es nicht genügt, einen binomialen Prozess für einen einzelnen, risikobehafteten Aktienkurs zu modellieren. Verschiebungen von Zinssätzen in einem bestimmten Fristensegment haben zwangsläufig Verschiebungen von Zinssätzen mit anderen Fristen zur Folge, wenn die Arbitragefreiheit der Fristenstruktur gewährleistet bleiben soll. Deshalb beziehen sich binomiale Auf- oder Abwärtsbewegungen nicht auf einzelne Zinssätze, sondern auf die gesamte Zinsstruktur (Abbildung 1). Das Problem der Modellierung der Zinsstruktur ist damit analytisch wesentlich aufwendiger als die Modellierung eines Aktienkursprozesses.

Abbildung 1: Ein binomiales Modell für die Fristenstruktur der Zinssätze. Angelehnt an Ho und Lee (1986, S. 1015)



Die Grundlage des Modells von HJM (1990) sind die Arbitragerelationen der Spot- und Forwardrates, die im vorliegenden Abschnitt kurz zusammengefasst werden sollen. Eine Besonderheit des Ansatzes von HJM besteht darin, dass der Prozess der Forwardrates modelliert wird, weil aus den Forwardrates die Spotrates unmittelbar bestimmt werden können. Dieses Vorgehen steht im Gegensatz zum Ansatz von HULL und WHITE (1993 a), die die Shortrate modellieren. HO und LEE (1986) bestimmen den diskreten Prozess der Zerobondpreise. Dennoch sind alle drei Ansätze äquivalent, weil man durch Arbitragerelationen sowohl die Zerobondpreise wie auch die Spotrates aus den Forwardrates bestimmen kann. Die annualisierte, stetige Spotrate für die Laufzeit von t bis T sei r_{tT}, die annualisierte Forwardrate zum Zeitpunkt t für einen Kontrakt mit der Laufzeit von T bis τ sei $f_{tT\tau}$, der Preis eines Zerobonds mit einem Nominalwert von 1 CHF und einer Laufzeit von t bis T sei P_{tT}. Dann ergibt sich der Preis eines Zerobonds als abgezinster Wert seines Payoffs:

$$P_{tT} = e^{-(T-t)\cdot r_{tT}} \quad \Leftrightarrow \quad r_{tT} = -\frac{\ln P_{tT}}{(T-t)} \qquad (1)$$

Zur Bestimmung der Forwardrate aus zwei Spotrates kann eine einfache Arbitrageüberlegung beitragen. Angenommen der stetige zweijährige Zinssatz r_{02} sei 6.5% pro Jahr, der stetige einjährige Zinssatz r_{01} sei 6%. Dann erhält man aus einem zweijährigen Investment von 100 CHF

$$100 \cdot e^{2\cdot 0.065} = 113.88 .$$

Dieser Betrag muss exakt demjenigen Betrag entsprechen, der sich ergibt, wenn man 100 CHF für ein Jahr zu 6% anlegt, und gleichzeitig einen Forwardkontrakt abschliesst, der die Anlage des Geldes in der zweiten Periode zu bereits heute bekannten Konditionen ermöglicht. Damit muss gelten:

$$100 \cdot e^{0.06} \cdot e^{f_{0,1,2}} = 113.88 \quad \Leftrightarrow \quad f_{0,1,2} = 7.0\%$$

Eine von 7.25% abweichende Forwardrate führt zu Arbitragemöglichkeiten, die zu Anpassungen auf den Kapitalmärkten führen würden. Allgemein gilt deshalb für die Forwardrate zum Zeitpunkt t:

$$f_{tT\tau} = \frac{(\tau - t)\cdot r_{t\tau} - (T-t)\cdot r_{tT}}{(\tau - T)} = \frac{1}{\tau - T}\cdot \ln\frac{P_{tT}}{P_{t\tau}} \qquad (2)$$

Gleichung (2) ermöglicht es, die Preise für Zerobonds in Abhängigkeit der am Kapitalmarkt gegebenen Spot-Zinsstrukturkurve zu berechnen. Durch kleinere Umstellungen und unter Verwendung von Gleichung (2) können die Preise der Zerobonds aber auch aus den Forwardrates direkt abgeleitet werden. Für den Preis eines Zerobonds zum Zeitpunkt 0 mit Verfall in Periode 2 gilt.

$$\begin{aligned} P_{0,2} &= e^{-2\cdot r_{0,2}} = \exp\left[-r_{0,1} - \left(2\cdot r_{0,2} - r_{0,1}\right)\right] \\ &= \exp\left[-f_{0,0,1} - f_{0,1,2}\right] \end{aligned}$$

So fortfahrend gilt allgemein:

$$P_{tT} = \exp\left[-\sum_{i=t+1}^{T} f_{t,i-1,i}\right] \qquad (3)$$

Folglich lassen sich auch die Zerobondpreise als Funktion der Forwardrates zum Bewertungszeitpunkt darstellen. Die Gleichungen (1) bis (3) stellen ein arbitragefreies System der verschiedenen Zinssätze sicher, die mit der beobachteten Zinsstrukturkurve konsistent sind. Dieser Ansatz unterscheidet sich damit erheblich von dem Gleichgewichtsmodell der Zinsstruktur von COX, INGERSOLL und ROSS (1985), bei dem die gleichgewichtige Zinsstruktur nicht notwendigerweise mit der beobachteten übereinstimmen muss (und in der Regel nicht übereinstimmt). Es wird deutlich, dass Veränderungen eines Laufzeitensegments Veränderungen in allen anderen Laufzeitsegmenten zur Folge haben müssen. Bei der Modellierung der Zinsstrukturkurven sind alle diese Effekte zu berücksichtigen. Es wird allerdings auch deutlich, dass es genügt, entweder die For-

wardrate-, oder die Spotrate- oder die Zerobondkurve zu modellieren. Denn wenn eine der drei Kurven arbitragefrei berechnet ist, kann man die anderen Kurven durch die Arbitragerelationen einfach bestimmen.

3. Risikoneutrale Bewertung und Eigenschaften der Zinsstruktur

Als eines der Hauptergebnisse halten HJM (1990) fest, dass die Arbitragefreiheit der Zinsstrukturkurve sichergestellt ist, wenn das risikoneutrale Bewertungsprinzip (Gleichung A1) auf alle Zinsderivate angewandt wird. Dabei ist der Begriff Zinsderivat sehr allgemein zu verstehen. Ein beliebiger Bond etwa ist von der Entwicklung der Zinsstruktur abhängig und damit ein Zinsderivat. Ein Zinsswap, eine Zinsoption oder ein Zinsfuture sind selbstverständlich Zinsderivate. Das risikoneutrale Bewertungsprinzip ist aus der Literatur zur Bewertung von Optionen seit COX, ROSS, RUBINSTEIN (1979) bekannt und geht konzeptionell auf MERTON (1973 a) zurück. Es hat bereits seit langem Einzug in bekannte Lehrbücher gefunden, so z.B. in UHLIR und STEINER (1994, S. 223–231). Es besagt, dass der heutige Wert eines Derivats durch die Diskontierung des erwarteten zukünftigen Wertes mit dem risikolosen Zinssatz ermittelt werden kann. Der Erwartungswert wird dabei bezüglich der sog. Martingale-Wahrscheinlichkeit π gebildet. Dabei handelt es sich nicht um eine tatsächliche Wahrscheinlichkeit, sondern um ein Skalar, dessen Wert zwischen 0 und 1 liegt. Sei $\tilde{E}_t$ der Erwartungswertoperator bezüglich der binomialen Wahrscheinlichkeit π und D_t der Wert eines beliebigen Zinsderivates zum Zeitpunkt t, dann lässt sich das risikoneutrale Bewertungsprinzip analog zu Gleichung (A1) wie folgt ausdrücken:

$$D_t = \frac{\tilde{E}_t\left(D_{t+1}\right)}{e^{r_{t,t+1}}} = \frac{\pi \cdot D_{t+1}^{up} + (1-\pi) D_{t+1}^{down}}{e^{r_{t,t+1}}} \qquad (4)$$

Der Wert eines Zinsderivates in einem binomialen Prozess entspricht dem abgezinsten Erwartungswert bezüglich der binomialen Martingale-Wahrscheinlichkeit π. Dabei sind die beiden möglichen Ausgänge in der Folgeperiode durch das binomiale Prinzip determiniert: Der Wert des Derivats steigt (up-Zustand) entweder auf D_{t+1}^{up} oder er sinkt (down-Zustand) auf D_{t+1}^{down}. Ist der Wert eines Zinsderivates bei Verfall bekannt (ein Zerobond bspw. hat den Wert 1), so lässt sich sein heutiger Wert (durch einen rekursiven Algorithmus) bestimmen. In Abschnitt vier dieses Aufsatzes wird gezeigt, dass die Anwendung des risikoneutralen Bewertungsprinzips in Gleichung (4) Arbitragefreiheit zur Folge hat. Der folgende Prozess zur Modellierung der Forwardrate erfüllt die Arbitragefreiheitsbedingung, wenn $\pi = 0.5$ gesetzt wird:[8]

$$(\tau - T)\left(f_{t+1,T,\tau} - f_{t,T,\tau}\right) = \begin{cases} \sigma - \ln\dfrac{e^{\sigma} + e^{-\sigma}}{2} \\ -\sigma - \ln\dfrac{e^{\sigma} + e^{-\sigma}}{2} \end{cases} \qquad (5)$$

Der in (5) spezifizierte Forwardrateprozess ist mit einem der Hauptergebnissen von HJM (1992) und von HULL und WHITE (1993 a) konsistent: Die Forwardrateveränderung wird nur durch die Volatilität des Risikofaktors bestimmt und durch keine andere Grösse. Wenn also die Volatilität durch ein ökonometrisches Verfahren spezifiziert ist, dann kann man jedes Derivat auf den Zins bei gegebener Forwardratestruktur bewerten. Die Martingale-Wahrscheinlichkeit π kann arbiträr vorgegeben werden. Der Prozess in (5) ist eine sehr allgemeine Möglichkeit der Spezifikation der Zinsstruktur. Je nachdem, wie die Volatilitätsfunktion gewählt wird, lassen sich verschiedene Prozesse für die Forwardrates bestimmen. So ist z.B. auch der aus der Zinsliteratur bekannte Ornstein-Uhlenbeck Prozess[9] durch eine entsprechende Formulierung der Volatilitätsfunktion darstellbar. Gleichung (5) zeigt, dass die Veränderung der Forwardrate zwischen der aktuellen Periode und

der Folgeperiode der Volatilität der Forwardrateveränderung σ abzüglich einer logarithmischen Funktion der Volatilität (der cosh-Funktion)[10] im up-Zustand entspricht. Im down-Zustand entspricht die Forwardrateveränderung der negativen Volatilität abzüglich der Logarithmus-Funktion. Dabei ist zu beachten, dass die Volatilität bei HJM nicht konstant ist (wie es etwa bei dem einfacheren Modell von HO und LEE (1986) der Fall ist), sondern eine Funktion der Forwardrate f und der Zeitpunkte t und T. Wird die Volatilität z.B. als abnehmende Funktion der Restlaufzeit des Forwardratekontraktes spezifiziert, so werden die Schwankungen zunehmend geringer, je näher der Verfallzeitpunkt T rückt. Dadurch lassen sich negative Zinssätze, die bei HO und LEE (1986) und anderen bekannten Zinsstrukturmodellen auftreten, modelltechnisch ausschliessen. In einem Zweifaktormodell wird ausser der Volatilität der Forwardrateveränderungen σ ein zusätzlicher Risikofaktor berücksichtigt. Auch hier kann die Volatilität zweiten Faktors zeitabhängig gewählt werden. Für eine realitätsnahe Implementation des Modells ist ein Zweifaktormodell unerlässlich. Denn nur durch ein Zweifaktormodell lässt sich verhindern, dass sich alle Forwardrates in die gleiche Richtung verändern, wenn es eine Veränderung für σ gibt. Nur durch ein Zweifaktormodell sind also „Drehungen" und nicht nur „Verschiebungen" der Zinsstrukturkurve angemessen spezifizierbar. Für eine einfach nachvollziehbare Darstellung des Modells von HJM reicht es allerdings aus, sich auf einen Risikofaktor zu beschränken.

4. Modellierung der Zinsstruktur

Durch die Gleichungen (4) und (5) ist ein Instrumentarium gegeben, welches die arbitragefreie Bewertung von Zinsderivaten mit Hilfe eines Binomialbaumes erlaubt. Im vorliegenden Abschnitt wird ein numerisches Beispiel beruhend auf dem in (5) gegebenen Prozess konstruiert. Dazu wird in vier Schritten vorgegangen: Erstens wird eine Volatilitätsfunktion spezifiziert. Zweitens wird aus einer gegebenen Fristenstruktur der Forwardrates die Fristenstruktur der Spotrates und der Zerobondpreise gemäss Gleichung (3) abgeleitet. Drittens werden die Prozesse der Forwardrates und der Volatilitäten entsprechend Gleichung (5) simultan dargestellt. Und schliesslich wird aus den Forwardrates der Prozess der Shortrate abgeleitet.

4.1 Spezifikation der Volatilitätsfunktion

Zunächst wird die Volatilität der Forwardrateveränderung durch folgende einfache Funktion spezifiziert:[11]

$$\sigma = \sigma(t, T, f) = 0.0375 \cdot (T - t) \cdot f_{tT\tau} \qquad (6)$$

Die Volatilität der Forwardrateveränderung bei einjähriger Restlaufzeit des Forwardkontraktes entspricht also 3.75% multipliziert mit der aktuellen Forwardrate. Je kürzer die Restlaufzeit $T - t$ des Forwardkontraktes und je geringer die aktuelle Forwardrate ist, desto kleiner ist die Volatilität, und desto kleiner sind deshalb die Veränderungen der Forwardrate. Wenn die aktuelle Forwardrate $f_{tT\tau}$ in einer Periode t nahe bei Null ist, dann wird auch ihre Volatilität nahe bei Null sein. Damit werden negative Forwardrates ausgeschlossen, wenn die Zeitintervalle, auf die sich der Binomialbaum bezieht, hinreichend kurz sind.[12] Hier soll zunächst die Forwardrate mit einer Laufzeit $\tau - T$ von einem Jahr modelliert werden. Daraus ist es dann möglich, die Zinsstruktur für die Spotrates sowie die Zerobondpreise mit Hilfe der Formeln (1) bis (3) in den einzelnen Perioden abzuleiten.

4.2 Zinsstruktur

Es sei eine ansteigende Forwardratekurve mit Zinssätzen zwischen 5% und 6.5% im Entscheidungszeitpunkt 0 gegeben (siehe Tabelle 1).

Tabelle 1: Forwardratestruktur ($\tau - T = 1$) und die daraus abgeleitete Spotratestruktur sowie die Zerobondpreise

Ausgangsdaten		abgeleitete Daten		
Kontraktbeginn (T)	Forwardrate	Laufzeit	Zerobond	Spotrate
0	0.050	0		0.0000
1	0.055	1	95.12	0.0500
2	0.060	2	90.03	0.0525
3	0.065	3	84.79	0.0550
		4	79.45	0.0575

Durch Gleichung (3) lassen sich daraus die Zerobondpreise in Periode 0 ableiten. Die Nennwerte der Zerobonds seien hier 100 CHF.
Der zweijährige Zerobondpreis ergibt sich z.B. aus:

$$100 \cdot \exp\left[-f_{0,0,1} - f_{0,1,2}\right] =$$
$$100 \cdot \exp\left[-0.05 - 0.055\right] = 90.03$$

Die Spotratestruktur ist durch Formel (2) gegeben. Der dreijährige Zinssatz $r_{0,3}$ in Periode 0 etwa ergibt sich aus:

$$r_{0,3} = -\frac{\ln\left(P_{0,3}/100\right)}{3-0} = -\frac{\ln 0.8479}{3} = 0.055$$

Wenn entweder die Spotrate- oder die Forwardratestruktur gegeben ist, lässt sich die jeweils andere Zinsstruktur problemlos daraus bestimmen.

4.3 Prozess der Forwardrates und der Volatilitäten

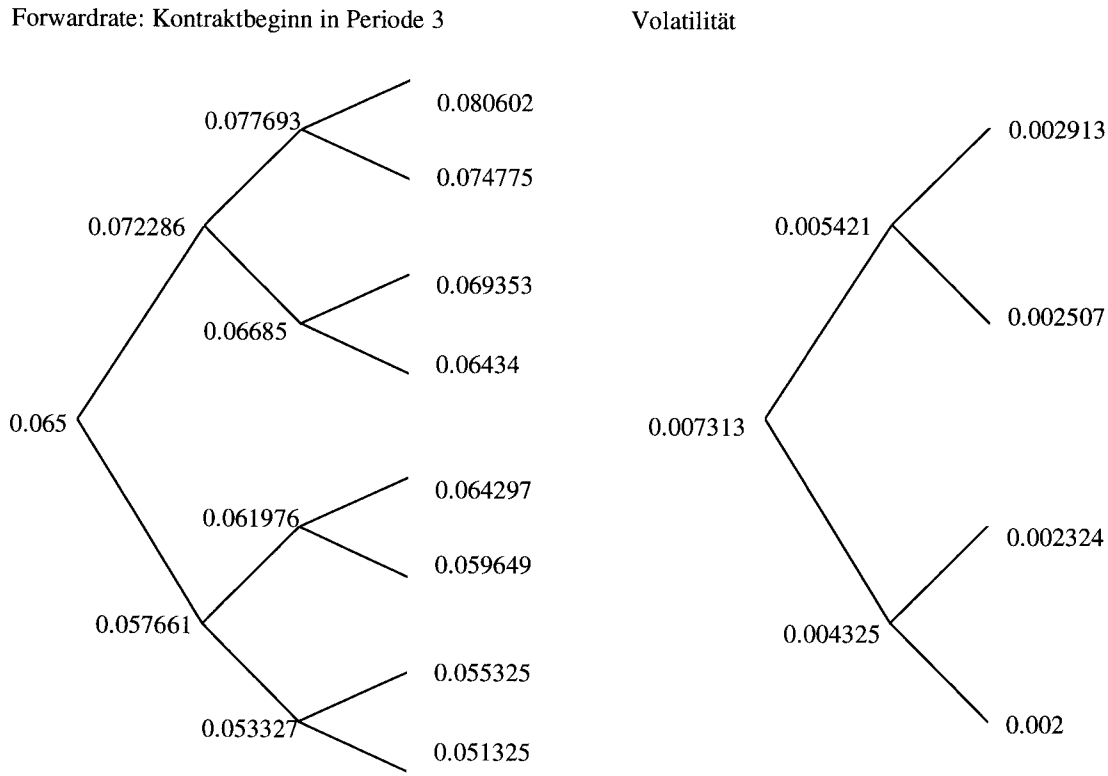
Zur Bewertung eines Derivats auf die Zinsstruktur muss zunächst die Forwardratestruktur nach Gleichung (5) bestimmt werden. Dazu wird die Volatilitätsfunktion aus Gleichung (6) in (5) eingesetzt, man erhält:

$$(\tau - T)\left(f_{t+1,T,\tau} - f_{t,T,\tau}\right) = \begin{cases} 0.0375 \cdot (T-t) \cdot f_{t,T,\tau} \\ -\ln\left[\frac{1}{2}\left(e^{0.0375 \cdot (T-t) \cdot f_{t,T,\tau}} + e^{-0.0375 \cdot (T-t) \cdot f_{t,T,\tau}}\right)\right] \\ -0.0375 \cdot (T-t) \cdot f_{t,T,\tau} \\ -\ln\left[\frac{1}{2}\left(e^{0.0375 \cdot (T-t) \cdot f_{t,T,\tau}} + e^{-0.0375 \cdot (T-t) \cdot f_{t,T,\tau}}\right)\right] \end{cases} \tag{7}$$

Die Veränderung der einjährigen Forwardrate $f_{t,3,4}$ ergibt sich aus $f_{0,3,4} = 6.5\%$, die Volatilität der Forwardrateveränderung zum Zeitpunkt $t = 0$ durch $0.0375 \cdot (3-0) \cdot 0.065 = 0.7313\%$. Daraus erhält man die Forwardrate in Periode 1 aus:

$$0.065 \begin{cases} 0.065 + 0.007313 - \ln\left[\frac{1}{2}\left(e^{0.007313} + e^{-0.007313}\right)\right] = 0.072286 \cong 7.23\% \\ 0.065 - 0.007313 - \ln\left[\frac{1}{2}\left(e^{0.007313} + e^{-0.007313}\right)\right] = 0.057661 \cong 5.77\% \end{cases}$$

Abbildung 2: Binomialer Prozess der Forwardrate ft,3,4 und der Volatilität



Nach einer Periode steigt die einjährige Forwardrate mit Verfall in Periode 3 von 6.5% entweder auf 7.23%, oder sie sinkt auf 5.77%. Später wird gezeigt, dass diese Bewegung arbitragefrei ist. Daraus ergibt sich eine neue Spezifikation der Volatilität mit $0.0375 \cdot (3-1) \cdot 0.0723 = 0.54\%$ für den up-Zustand und $0.0375 \cdot (3-1) \cdot 0.0577 = 0.43\%$ für den down-Zustand. Man erkennt, dass die Volatilität mit abnehmender Forwardrate sinkt. Dadurch sind die Veränderungen für niedrige Forwardrates weniger stark ausgeprägt. Abwechselnd werden dann die Forwardrates und ihre Volatilitäten für die nächsten Perioden spezifiziert. Schliesslich erhält man den vollständigen Prozess der Forwardrates und ihrer Volatilitäten bis zum Verfall in Periode 3 (siehe Abbildung 2).

4.4 Der Prozess der Shortrates

Das Spektrum der Forwardrates bei der durch (6) gegebenen Volatilitätsfunktion reicht von 5.1% bis 8.1%. Der rechte Binomialbaum in Abbildung 2 zeigt den Prozess der Volatilität. Ihr Spektrum reicht von 0.2% bis 0.29%. Die einjährige Spotrate ergibt sich als Forwardrate in einer Periode mit sofortigem Verfall und einem Jahr Laufzeit:

$$r_{t,t+1} = f_{t,t,t+1} \tag{8}$$

Zur Bestimmung der Spotratestruktur in jeder Periode ist es deshalb notwendig, den Prozess für alle drei einjährigen Forwardrates zu bestimmen. Verwendet man das geschilderte Verfahren für die

einjährige Forwardrate mit Kontraktbeginn in Periode 2, so ergeben sich die Prozesse in Abbildung 3. Bei der Forwardrate $f_{t,2,3}$ erhält man ein Spektrum möglicher Forwardrates von 5.3% bis 6.7% nach zwei Jahren. Der binomiale Prozess der einjährigen Forwardrate mit Kontraktbeginn in Periode 1 ist in Abbildung 3 ganz rechts eingetragen. Hier steigt die Forwardrate von 5.5% entweder auf 5.71% oder sie sinkt auf 5.29%. Die Volatilität beträgt 0.2063%. Aus den Berechnungen bis hierhin ist es möglich, den Prozess des einjährigen Zinssatzes zu spezifizieren. Dabei muss Gleichung (8) für jeden Zeitpunkt t angewandt werden. Der einjährige Zinssatz $r_{2,3}$ im Zeitpunkt 2 bspw. ergibt sich durch die Forwardrate $f_{2,2,3}$. Dabei ist die Shortrate natürlich zustandsabhängig. In Periode 2 gibt es 4 Zustände. Abbildung 3 zeigt, die höchste Shortrate ergibt sich für t = 2 mit 6.69%, die zweithöchste mit 6.21%, die dritthöchste mit 5.76% und die niedrigste mit 5.34%. Alle anderen Spotrates können analog aus den Abbildungen 2 und 3 entnommen werden. Abbildung 4 enthält den Prozess für die einjährigen Spotrates.

Die Zerobonds mit Laufzeiten zwischen einem und drei Jahren können nun sehr einfach aus der gegebenen Spotratestruktur unter Verwendung von Gleichung (3) bestimmt werden. Alternativ ist allerdings auch eine risikoneutrale Bewertung zur Bestimmung der Zerobondprozesse möglich. Dazu setzt man die Preise der Zerobonds bei Verfall auf 100 und bewertet rekursiv mit Gleichung (4) wie in Abbildung 5 gezeigt wird. Alle Zerobonds weisen bei Verfall einen Wert von 100 CHF auf. Der Wert des dreijährigen Zerobonds in Periode 2 ergibt sich für den höchstmöglichen Zinssatz von 6.69% aus Formel (3) mit

$$P_{2,3} = \frac{0.5 \cdot 100 + 0.5 \cdot 100}{e^{0.066905}} = 93.53 .$$

Abbildung 3: Binomiale Prozesse der Forwardrates $f_{t,2,3}$ und $f_{t,1,2}$ und der Volatilität für $f_{t,2,3}$

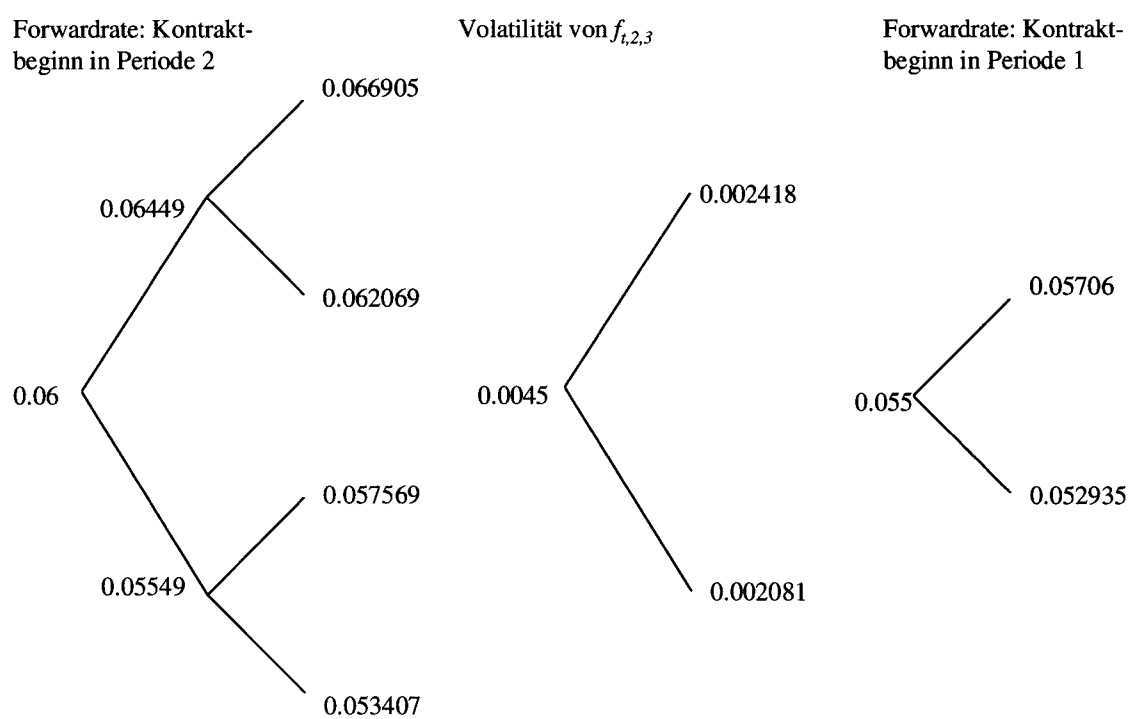


Abbildung 4: Binomialer Prozess der einjährigen Spotrates $r_{t,t+1}$

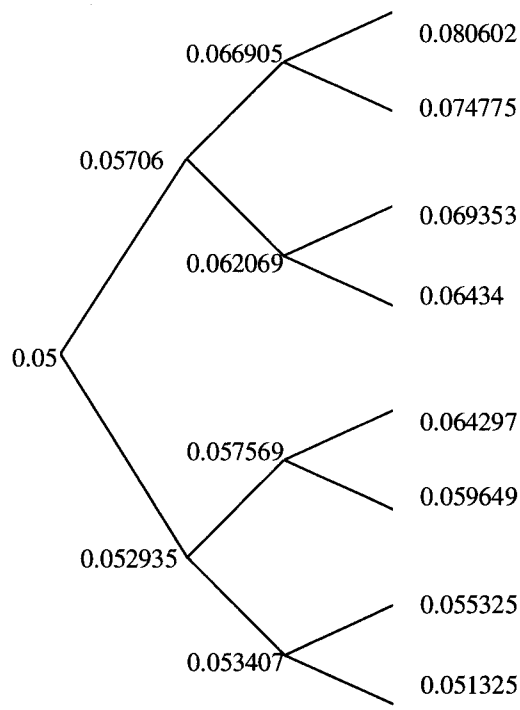
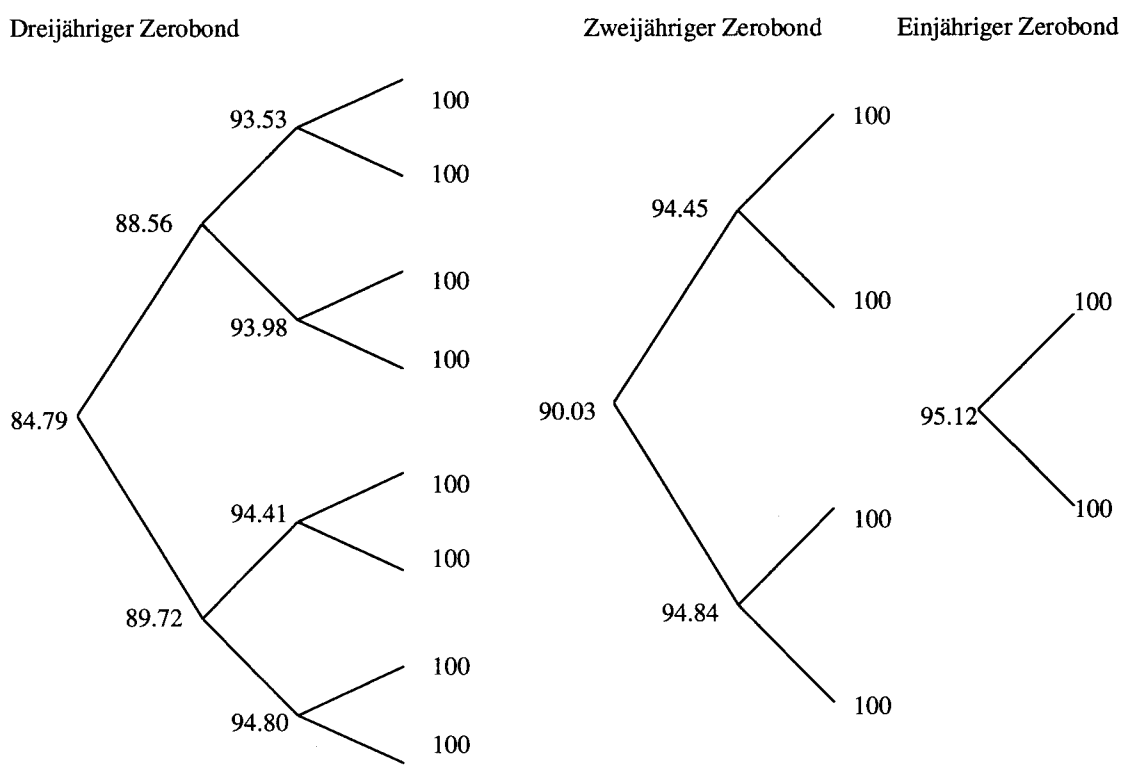


Abbildung 5: Zerobondprozesse für verschiedene Laufzeiten



Er kostet also 93.53 CHF. Auf diese Weise kann man rekursiv zurückrechnen und den heutigen Wert des Zerobonds bestimmen. Es überrascht nicht, dass sein Wert mit 84.79 CHF exakt jenem Wert entspricht, der aus der gegebenen Zinsstrukturkurve in Tabelle 1 bereits bestimmt wurde. Zur Betrachtung der Arbitragefreiheit der hier hergeleiteten Zinsstrukturkurve soll ein Knoten der Bäume exemplarisch herausgegriffen werden. Nach der Arbitragefreiheitsbedingung (2) muss für die arbitragefreie, zweijährige Forwardrate in Periode 1 gelten:

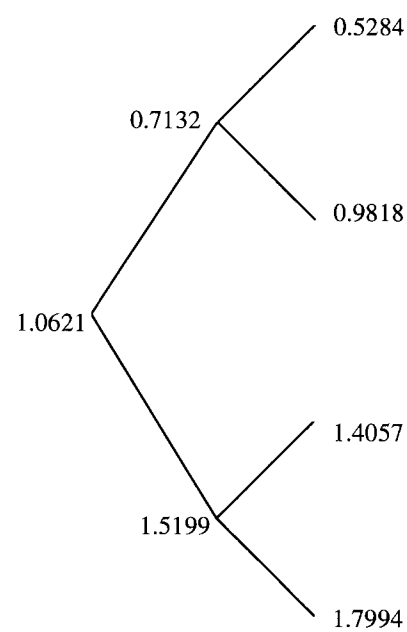
$$e^{(3-2)\cdot f_{1,2,3}} = \frac{P_{1,2}}{P_{1,3}}$$

Für den linken Term gilt im up-Zustand $e^{(3-2)\cdot f_{1,2,3}} = e^{1\cdot 0.06449} = 1.0666$. Für den rechten Teil der Gleichung gilt $\frac{94.45}{88.56} = 1.0666$. Im down-Zustand gilt $e^{(3-2)\cdot f_{1,2,3}} = e^{0.05549} = 1.05705$ und $\frac{94.84}{89.73} = 1.05705$. Beide Ausdrücke stimmen also jeweils überein, so dass ein arbitragefreies Verhältnis zwischen den Spot- und Forwardrates vorliegt. Andererseits stimmt die Modellierung der Fristenstruktur der Forwardrates, und daraus abgeleitet der Spotrates und der Zerobonds, mit der beobachteten Fristenstruktur überein. Da die Fristenstruktur zusätzlich mit Gleichung (6) äquivalent ist, zeigt dieses Beispiel, dass das risikoneutrale Bewertungsprinzip Arbitragefreiheit impliziert.

5. Bewertung von Zerobond-Optionen

Durch die in Abbildung 4 gegebenen Shortrates[13] stehen die notwendigen Daten zur risikoneutralen Bewertung einfacher Zinsderivate gemäss Gleichung (4) zur Verfügung. Zur Bestimmung der Zerobondpreise genügt zwar eine einfache Diskontierung gemäss Gleichung (1), die in Abbildung 5 enthaltenen Informationen bezüglich des Prozesses der Zerobonds sind aber zur Anwendung der rekursiven Bewertungsprozedur für Zinsderivate wichtig.

Abbildung 6: Rekursive Bewertung einer 2-jährigen Calloption auf einen 3-jährigen Zerobond, Ausübungspreis 93 CHF



Im folgenden Beispiel wird eine einfache Calloption auf den 3-jährigen Zerobond aus Abbildung 5 mit einem Nennwert von 100 CHF bewertet werden. Der Ausübungspreis sei 93 CHF. Komplexere Derivate sind durch die rekursive Anwendung des risikoneutralen Bewertungsprinzips (5) dann einfach zu bewerten, wenn ihr Wert bei Verfall in Abhängigkeit des Basispapiers berechenbar ist. Im Fall eines Zinsswaps etwa ist allerdings schon die Berechnung des Wertes bei Verfall relativ aufwendig, selbst dann, wenn die komplette Zinsstruktur bei Verfall bekannt ist. Elektronische Rechner allerdings ermöglichen auch hier schnelle Lösungen. Die hier betrachtete Calloption verfällt nach 2 Jahren. Entsprechend der Vorgehensweise beim Binomialmodell für Aktienoptionen ergibt sich der Wert der Calloption bei Verfall aus:

$$C_2 = \max\left[P_{2,3} - 93{,}0\right] \tag{10}$$

Im obersten Zustand beträgt der Preis des Zerobonds 93.53 nach Abbildung 5. Der Wert der Calloption bei Verfall in diesem Zustand beträgt deshalb etwa 53 Rappen. Im zweiten Zustand von oben hat der Zerobond einen Wert von 93.98, die Calloption deshalb einen Wert von etwa 98 Rappen. So fortfahrend lassen sich alle möglichen Calloptionspreise bei Verfall bestimmen. In Periode 1 muss das risikoneutrale Bewertungsprinzip (4) angewendet werden. Der Zinssatz im „up-Zustand" in Periode 1 ist 5.71%, der Wert der Calloption ist bei einer Martingale-Wahrscheinlichkeit von $\pi = 0.5$ deshalb:

$$C_1^{up} = \frac{0.5 \cdot 0.5284 + 0.5 \cdot 0.9818}{e^{0.05706}} = 0.7132$$

Entsprechend ergibt sich der Wert der Calloption im „down-Zustand" mit 1.5199. Die nochmalige Anwendung dieser rekursiven Prozedur wie in Abbildung 6 liefert schliesslich einen arbitragefreien Calloptionspreis in Höhe von 1.06 CHF bei einem aktuellen Zerobondpreis von 84.79.

6. Swaps, Swaptions und ihre Bewertung nach dem Black-Modell

Unter einem Zinsswap versteht man den Tausch einer variablen Verzinsung gegen eine fixe Verzinsung. Dadurch sichert man sich gegen schwankende Zinssätze ab. Ein Payer-Swap ist ein Tauschgeschäft, bei dem man fixe Zinssätze leistet und variable erhält. Eine Receiver-Swap impliziert variable Zinszahlungen und fixe Zinseinkünfte. Die Swaprate ist derjenige fixe Zinssatz, der im Austausch gegen einen variablen Zins bezahlt oder empfangen wird. Im Anhang wird die Funktionsweise eines Swaps an einem Beispiel verdeutlicht.

Tabelle 2: Auszahlungsstruktur einer Payer-Swaption

	Periode 0	...	Periode n	Periode n + 1	...	Periode T
Cashflow	0	...	0	$V \cdot \max\left[s_{nT} - x, 0\right]$	...	$V \cdot \max\left[s_{nT} - x, 0\right]$
Bewertung	0	...	0	$\frac{V}{e^{r_{t,n+1}(n+1)}} \cdot \begin{pmatrix} s_{0T-n} N(d_1) \\ -x \cdot N(d_2) \end{pmatrix}$	...	$\frac{V}{e^{r_t T T}} \cdot \begin{pmatrix} s_{0T-n} N(d_1) \\ -x \cdot N(d_2) \end{pmatrix}$

Swaptions sind Optionen auf Swaps. Eine europäische Payer-Swaption verbrieft das Recht, in Periode n in einen bestehenden Payer-Swap mit Laufzeit bis Periode T (n < T) einzutreten. Der Swapsatz wird bereits bei Vertragsabschluss der Swaption in Periode 0 mit x festgelegt, man leistet also einen fixen Zins in Höhe von x. Umgekehrt erhält man bei Ausübung einer Receiver-Swaption fixe Zinszahlungen in Höhe von x. Dabei ist zu beachten, dass die Zinszahlungen für die gesamte Restlaufzeit des Swaps von Periode n bis Periode T geleistet bzw. empfangen werden. Für jede Zinszahlung beträgt der Payoff der Payer-Swaption $V \cdot \max\left[s_{nT} - x, 0\right]$, wobei s_{nT} der Swapsatz zum Zeitpunkt n eines Swaps mit Laufzeit bis Periode T und V der Nominalwert des Swaps ist. Der Payoff der Receiver-Swaption beträgt entsprechend $V \cdot \max\left[x - s_{nT}, 0\right]$.

Insgesamt werden aus einer Swaption T – n Zahlungen generiert, die bei der Bewertung Berücksichtigung finden müssen. Die verbreitete Variante zur Bewertung von Swaptions besteht in der Anwendung des BLACK (1976) Modells. Der Wert $S_P(CF_{t,i})$ in Periode 0 eines Cashflows aus der Payer-Swaption in Tabelle 2, der in Periode i $(n < i \leq T)$ anfällt, ergibt sich danach aus (vgl. HULL 1997, S. 403):

$$S_P(CF_i) = \frac{V}{e^{r_i \cdot i}} \cdot \left(s_{0,T-n} N(d_1) - x N(d_2)\right)$$
$$d_1 = \frac{\ln \frac{s_{0,T-n}}{x} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot n}{\sigma \sqrt{n}} \qquad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{n} \tag{11}$$

Dabei ist die annualisierte Volatilität der logarithmierten Swaprateveränderung mit σ bezeichnet. Die Bewertung jedes einzelnen Cashflows ähnelt dem bekannten BLACK, SCHOLES (1973) Modell. $N(d_1)$ wird mit der aktuellen Swaprate mit der Laufzeit T – n multipliziert und $N(d_2)$ mit der Ausübungs-Swaprate x. Jeder dieser Werte wird mit dem Zinssatz r_i zwischen dem Bewertungszeitpunkt 0 und der Periode i diskontiert. In der ersten Zeile von Tabelle 2 werden die generierten Cashflow dargestellt, die zweite Zeile zeigt die Bewertung jedes einzelnen Cashflows mit dem Black-Modell entsprechend Formel (11). Zur Bestimmung des Preises einer Payer-Swaption S_P müssen die Werte aller Cashflows aufsummiert werden:

$$S_P = \left(s_{0,T-n} N(d_1) - x \cdot N(d_2)\right) \cdot \sum_{i=n+1}^{T} \frac{V}{e^{r_i \cdot i}} \tag{12}$$

Damit hat man ein Bewertungsmodell für Swaptions, in dem das Bewertungsverfahren von Aktienoptionen übertragen wird. Allerdings weist es erhebliche Schwächen auf. Die wohl gravierendste besteht in der Annahme bezüglich des Prozesses der Swaprateveränderung. Entsprechend der Optionspreistheorie für Aktienoptionen unterstellt es lognormalverteilte Swaprateveränderungen. Wegen der Mean-Reversion-Eigenschaft von Zinssätzen handelt es sich hier um eine allgemein als realitätsfern eingestufte Annahme. Aus diesem Grund ist die Verwendung eines Zinsstrukturmodells zur Bewertung von Swaptions naheliegend.

7. Eine Payer-Receiver Swaption Parität

Ziel dieses Abschnitts ist die Bestimmung einer Payer-Receiver Swaption Parität, die sich an der Put-Call Parität für Aktienoptionen orientiert. Dazu werden die Payoffs einer Strategie nach Verfall der Option untersucht, bei der man eine Longposition in der Payer-Swaption und eine Shortposition in der Receiver-Swaption hält. Die Ergebnisse sind für jede Periode zwischen n und T in Tabelle 3 dargestellt. Dabei ist jeweils zu unterscheiden, ob die jeweilige Swaption im oder aus dem Geld verfällt, ob also die Swaprate in Periode n über oder unter dem Ausübungszins x liegt.

Tabelle 3: Payer-Receiver Swaption Parität

		$s_{nT} > x$ in Periode n	$s_{nT} < x$ in Periode n
Periode n + 1	Payer Swaption	$V \cdot (s_{nT} - x)$	0
	-Receiver Swaption	0	$V \cdot (s_{nT} - x)$
⋮	⋮	⋮	⋮
Periode T	Payer Swaption	$V \cdot (s_{nT} - x)$	0
	-Receiver Swaption	0	$V \cdot (s_{nT} - x)$

Summiert man alle Zahlungen für beide Varianten von Periode n + 1 bis Periode T auf und diskontiert sie danach wieder auf die Verfallperiode n, dann ergibt sich für die Differenz zwischen dem Preis der Payer-Swaption $S_P(n)$ und der Receiver-Swaption $S_R(n)$ zum Zeitpunkt n das gleiche Ergebnis für beide Zustände:

$$S_P(n) - S_R(n) = V \cdot s_{nT} \cdot \sum_{i=n+1}^{T} \frac{1}{e^{r_i \cdot i}} - V \cdot x \cdot \sum_{i=n+1}^{T} \frac{1}{e^{r_i \cdot i}} \tag{13}$$

Die Auszahlung $V \cdot s_{nT}$ in der Periode i entspricht dabei exakt der Auszahlung des fixen Beins eines Swapkontraktes (vgl. Anhang). Das variable Bein des gesamten Swapkontraktes erfordert zusätzlich die Leistung von variablen Zahlungen, deren Wert durch die Terminzinssätze in Periode 0 bestimmt werden kann. Für Periode i entsprechen die Zahlungen $CF_R(i)$ aus einem Receiver-Swap der Differenz zwischen den fixen und den variablen Zahlungen:

$$\frac{CF_R(i)}{V} = s_{nT} - f_{0,i-1,i}$$

Ersetzt man s_{nT} in Gleichung (13) durch diesen Term, dann ergibt sich für die Wertdifferenz zwischen der Receiver- und der Payer-Swaption:

$$S_P - S_R = \sum_{i=n+1}^{T} \frac{1}{e^{r_i \cdot i}} \cdot CF_R(i) + V \cdot \sum_{i=n+1}^{T} \frac{1}{e^{r_i \cdot i}} \cdot f_{0,i-1,i} - V \cdot x \cdot \sum_{i=n+1}^{T} \frac{1}{e^{r_i \cdot i}} \tag{14}$$

Damit kann die Differenz der beiden Swaptions durch folgende Strategie repliziert werden:

a) Abschluss eines Receiver-Swaps mit Nominalwert V. Der Preis des Receiver-Swaps in Periode 0 sei R.
b) Abschluss von T – n Forward Rate Agreements mit Nominalwert V, bei denen zwischen den Perioden n und T Zahlungen erhalten werden. Der Preis dieser Termingeschäfte in Periode 0 sei FRA.
c) Insgesamt T – n risikolose Kapitalanlagen im Umfang des jeweiligen Barwertes von $V \cdot x$, mit Fälligkeiten in den Perioden n + 1,...,T. Deren Wert in Periode 0 sei PV(x).

Daraus ergibt sich eine Parität für Payer- und Receiver-Swaptions, die sog. Payer-Receiver Swaption Parität:

$$\begin{aligned} S_P - S_R &= R + FRA - PV(x) \\ S_R + R &= S_P - FRA + PV(x) \end{aligned} \tag{15}$$

Eine Receiver-Swaption und ein Receiver-Swap haben zu jedem Zeitpunkt den gleichen Wert, wie eine Payer-Swaption zuzüglich der Differenz zwischen dem Barwert der Ausübungssumme und dem Wert des oben beschriebenen Termingeschäf-

tes. Es lässt sich eine gewisse Ähnlichkeit mit der Put-Call Parität für Aktienoptionen feststellen. Der wesentliche Unterschied besteht in der Einbeziehung des Zinstermingeschäftes.

8. Bewertung von Swaptions mit dem HJM Modell

Ziel dieses Abschnitts ist die Bewertung von Optionen auf Swapkontrakte, sog. Swaptions. Dabei wird das binomiale Verfahren von HJM mit der klassischen, geschlossenen Lösungsformel von BLACK (1976) verglichen. Dazu wird erstens die Fristenstruktur der Swapsätze aus der Fristenstruktur der Terminzinssätze abgeleitet. Zweitens werden zwei Swaptions auf die ein- und zweijährige Swaprate bewertet. Im dritten Absatz erfolgt der Vergleich des Ergebnisses mit der Swapbewertung aus dem BLACK (1976) Modell. Schliesslich werden die Preisunterschiede zwischen dem Black- und dem HJM-Modell für verschiedene Optionen untersucht.

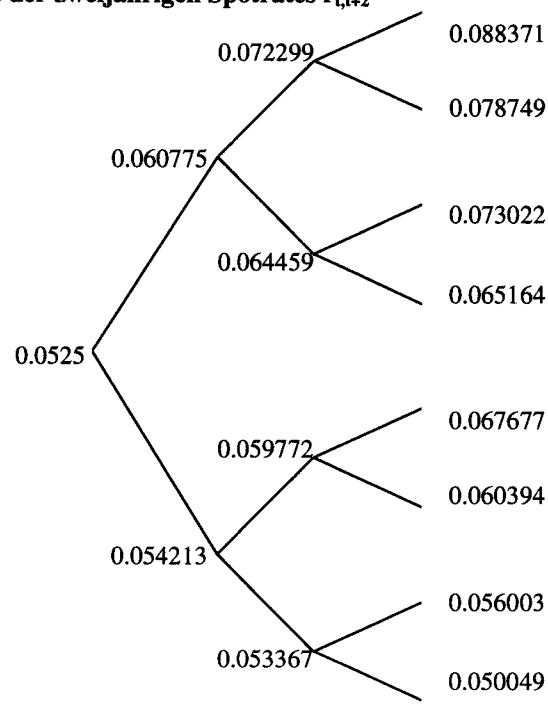
8.1 Bestimmung der Fristenstruktur der Swapsätze

Ähnlich wie die Bewertung der Calloption auf einen Zerobond, wie es in Abschnitt 4 gezeigt wurde, setzt die Bewertung einer Swaption zunächst einmal die Bewertung des Basispapiers bei Verfall der Option voraus. Anders als beim Zerobond ist allerdings die Bewertung des Swaps bei Verfall der Option schwieriger und orientiert sich an Abschnitt 6. Hier werden zur Illustration des HJM Modells als Bewertungsverfahren für Swaptions zwei Swaps betrachtet. Der erste Swap hat eine einjährige und der zweite eine zweijährige Laufzeit. Es werden Swaptions mit Fälligkeit in Periode 3 auf beide Swaps betrachtet. Beide Swaptions sollen mit dem HJM-Verfahren und, zum Vergleich, mit dem Verfahren von BLACK (1976) bewertet werden. In einem ersten Schritt werden die Swaprates für verschiedene Laufzeiten aus Sicht von Periode 0 in Tabelle 4 berechnet. Um alle Zinssätze von der Bewertungsperiode 0 bis zum Ende des zweijährigen Swaps bestimmen zu können, ist zunächst eine Erweiterung der in Tabelle 1 gegebenen Forwardratestruktur notwendig.
Die einjährigen Forwardrates für die vierte und fünfte Periode werden, zusätzlich zu den in Tabelle 1 angegebenen Werten, mit 6.5% und 7.0% angenommen. Daraus berechnet man mit Formel (3) die Diskontfaktoren und mit Formel (1) die Spotrates. Der Barwert der variablen Zahlungen ergibt sich, wenn man die Forwardrates der jeweiligen Perioden mit den jeweiligen Diskontfaktoren multipliziert (rechte Seite der Gleichung A2). Der Barwert einer Zahlung z.B., die man aus einem Forwardkontrakt in Periode 3 erhält, beträgt $0.06 \cdot 0.8516 = 0.0511$ CHF. Dividiert man die Summe der Barwerte der variablen Zahlungen bis zur jeweiligen Periode durch die Summe

Tabelle 4: Swaprates für verschiedene Laufzeiten.

Laufzeit bis: Periode T	1	2	3	4	5
Forwardrates $f_{0,T-1,T}$	0.0500	0.0550	0.0600	0.0650	0.0700
Spotrates	0.0500	0.0525	0.0550	0.0575	0.0600
Barwert der variablen Zahlungen	0.0476	0.0496	0.0511	0.0520	0.0523
Summe d. Barwerte d. var. Zahlungen	0.0476	0.0973	0.1484	0.2003	0.2526
Zerobondpreise (Diskontfaktoren)	0.9524	0.9027	0.8516	0.7996	0.7473
Summe der Diskontfaktoren	0.9524	1.8551	2.7067	3.5063	4.2536
Swaprate	0.0500	0.0524	0.0548	0.0571	0.0594

Abbildung 7: Binomialer Prozess der zweijährigen Spotrates $r_{t,t+2}$



der Diskontfaktoren, so erhält man die Swaprate für die entsprechende Laufzeit. Die Swaprate bspw. für einen vierjährigen Swap wäre $0.2003 \div 3.5063 = 5.71\%$. Auf diese Art kann man aus der Spot- und der Forwardratestruktur die Swapratestruktur bestimmen.

Da die hier betrachtete Swaption in Periode 3 fällig wird, ist die Bestimmung der ein- und zweijährigen Swaprate in Periode 3 notwendig. Sie ist von der Entwicklung der Forward- und der Spotrates bis Periode 3 abhängig. Die Entwicklung der einjährigen Spotrates ist bereits in Abbildung 4 modelliert worden. Zusätzlich soll jetzt die Entwicklung der zweijährigen Spotrates aus den Forwardrates abgeleitet werden. Setzt man dazu die Gleichungen (1) und (3) gleich, so erhält man eine einfache Formel zur Berechnung der (T – t)-periodischen Spotrates aus den einjährigen Forwardrates:

$$r_{tT} = \frac{1}{T-t} \cdot \sum_{i=t+1}^{T} f_{t,i-1,i} \tag{16}$$

Man benötigt also nur die einjährigen Forwardrates in verschiedenen Zeitpunkten und Zuständen, um den Prozess der zweijährigen (oder mehrjährigen) Spotrates zu berechnen. Da die Forwardrateprozesse in den Abbildungen 2 und 3 bereits vollständig spezifiziert sind, ist es nicht schwierig, daraus den Prozess für die Spotrates abzuleiten. Der zweijährige Zins r_{02} in Periode 0 z.B. ergibt sich aus $r_{02} = \frac{1}{2} \cdot \left(f_{0,0,1} + f_{0,1,2}\right) = \frac{1}{2} \cdot (0.05 + 0.055) = 5.25\%$, der zweijährige Zins r_{13} im „up-Zustand" in Periode 1 aus $r_{13} = \frac{1}{2} \cdot \left(f_{1,1,2} + f_{1,2,3}\right) = \frac{1}{2} \cdot (0.05706 + 0.06449) = 6.08\%$. Auf diese Weise fortfahrend generiert man die gesamte Zinsstruktur für die zweijährige Spotrate. Abbildung 7 zeigt das Ergebnis.

Die zweijährige Swaprate leitet sich aus den zweijährigen Spotrates und den einjährigen Forwardrates nach Gleichung (A2) ab. Die einjährige Swaprate entsprechend aus der einjährigen Spotrate. In den Abbildungen 2,3,4 und 7 sind die binomialen Prozesse aller notwendigen Zinssätze gegeben, die zur Bestimmung des Prozesses für die Swaprate notwendig sind. Exemplarisch soll die Bestimmung der ein- und zweijährigen Swaprates in Periode 2 im zweiten Zustand von oben (ein „up" und ein „down") berechnet werden. Die einjährige Spotrate r_{23} in diesem Zustand in Periode 2 kann aus Abbildung 4 mit 6.21% abgelesen werden, die zweijährige Spotrate r_{24} ergibt sich aus Abbildung 7 mit 6.45%. Die sich daraus ergebenden Diskontfaktoren sind $e^{-0.0621} = 0.9397$ und $e^{-0.0645 \cdot 2} = 0.879$. Die Summe der fixen Zahlungen bis Periode 3 ist daher 0.9397 und 0.9397 + 0.879 = 1.8189 bis Periode 4. Die einjährige Forwardrate $f_{2,2,3}$ in Periode 2 mit einer Laufzeit von Periode 2 bis 3 im zweiten Zustand von oben ist 6.21% nach Abbildung 3, die Forwardrate von Periode 3 nach 4 in Periode 2 ist $f_{2,3,4}$ = 6.68% nach Abbildung 2. Multipliziert man die Diskontfaktoren mit den entsprechenden Forwardrates, so erhält man den Barwert der variablen Zahlungen (der Forwardrates) mit 0.0583 für $f_{2,2,3}$ und 0.0588 für $f_{2,3,4}$. Die Summe der Barwerte der variablen Zahlungen bis Periode 3 ist demnach 0.0588 und 0.0583 + 0.0588 = 0.1171 bis Periode 4. Dividiert man die Summe der variablen Zahlungen durch die Summe der fixen Zahlungen bis Periode 3, so erhält man die einjährige Swaprate von Periode 2 bis 3 mit $s_{2,3}$ = 0.0588/0.9397 = 6.21%. Entsprechend beträgt die zweijährige Swaprate in Periode 2 im gleichen Zustand $s_{2,4}$ = 0.1171/1.8189 = 6.44%.

Abbildung 8: Binomialer Prozess der einjährigen und zweijährigen Swaprate $s_{t,t+1}$ und $s_{t,t+2}$

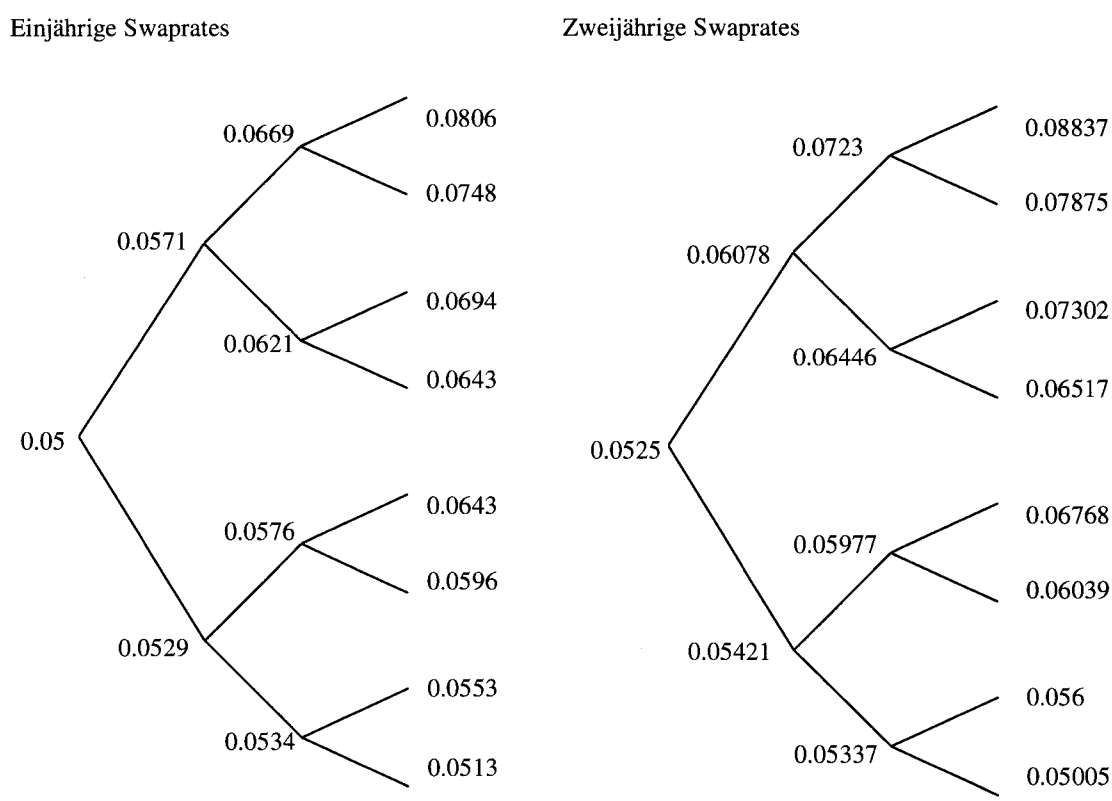


Tabelle 5: Cashflows zweier exemplarischer Swaptions (n = 3, T = 4 bzw. 5, x = 5.0%)

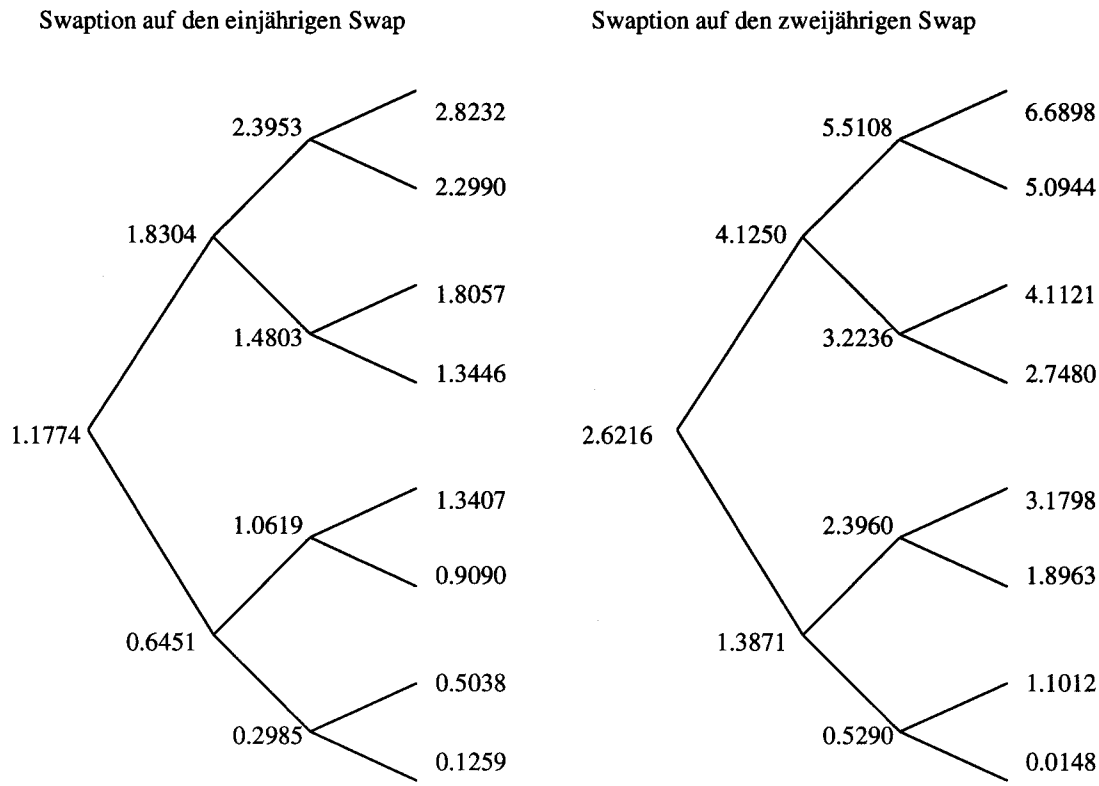
Laufzeit	Periode 1	Periode 2	Periode 3	Periode 4	Periode 5
1	0	0	0	$100 \cdot \max\left[s_{3,4} - 0.05, 0\right]$	0
2	0	0	0	$100 \cdot \max\left[s_{3,5} - 0.05, 0\right]$	$100 \cdot \max\left[s_{3,5} - 0.05, 0\right]$

Wenn dieses Verfahren für alle Zustände in allen Perioden entsprechend angewendet wird, dann ergeben sich die Prozesse für die ein- und zweijährige Swaprate wie in Abbildung 8.
Entsprechend den Berechnungen in Tabelle 3 ergibt sich die einjährige Swaprate in Periode 0 als 5.0% und die zweijährige Swaprate als 5.24%. Wichtig ist allerdings, dass durch Abbildung 8 der gesamte Prozess beider Swaprates vorliegt. Damit wird die Bewertung beliebiger Swap-Derivate mit Hilfe des risikoneutralen Bewertungsprinzips in Gleichung (4) ermöglicht.

8.2 Bewertung von Swaptions

Hier werden zwei Payer-Swaptions auf die beiden Swaps betrachtet, die nach 3 Perioden die Übernahme eines ein- bzw. zweijährigen Swapkontraktes ermöglichen. Man erwirbt damit das Recht, nach Periode 3 für eine bzw. zwei weitere Perioden fixe Zahlungen zu leisten und variable zu empfangen. Die beiden Swaptions zugrunde liegende Ausübungs-Swaprate sei mit x = 5.0% angenommen. Je nachdem, wie sich die das Basispapier entwickelt, werden die Swaptions verschiedene Werte bei Verfall aufweisen. Der Nennwert der Swapkontrakte sei 100 CHF. Entsprechend Tabelle 2 zeigt Tabelle 5 die Cashflows der beiden Swaptions. Die Swaprates $s_{3,4}$ und $s_{3,5}$ sind zustandsabhängig, wie durch Abbildung 8 verdeutlicht wird.
Im obersten Zustand bei Verfall der Option in Periode 3 z.B. beträgt die einjährige Swaprate 8.06%. Der Payoff der Swaption in Periode 4 wäre demnach $100 \cdot (8.06\% - 5.0\%) = 3.06$ CHF. Durch Multiplikation dieses Wertes mit dem Diskontfaktor im gleichen Zustand erhält man den Wert dieser Zahlung bei Verfall der Swaption mit $3.06 \cdot e^{-0.080602} = 2.82$ CHF. Bei der zweijährigen Swaption hat man eine Swaprate von 7.29% bei Verfall der Option im dritten Zustand von oben. Entsprechend beträgt in Periode 3 der Wert der Cashflows aus den Perioden 4 und 5 $100 \cdot (7.29\% - 5.0\%) \cdot \left(e^{-0.069353} + e^{-2 \cdot 0.073022}\right) = 4.11$ CHF.
So fortfahrend lassen sich die Werte der aus den beiden Swaptions generierten Cashflows für alle 8 Zustände bei Verfall der Swaptions in Periode 3 bestimmen. Sie können aus den letzten Zweigen der Binomialbäume für beide Swaptions in Abbildung 9 abgelesen werden.
Sind die Cashflows der Swaptions in allen Zuständen bewertet, dann ist es nicht mehr schwierig, den aktuellen Wert der Swaptions risikoneutral zu ermitteln. Die wiederholte Anwendung der rekursiven Bewertungsprozedur entsprechend der Bewertung der Calloption in Abschnitt 4 liefert einen Preis für die Option auf den einjährigen Swap von 1.18 CHF und auf den zweijährigen Swap von 2.62 CHF. Es ist allerdings gemäss Gleichung (4) zu beachten, dass die Anwendung des risikoneutralen Bewertungsverfahrens die Diskontierung mit der jeweils richtigen Spotrate voraussetzt. Dabei greift man auf den Prozess für die einjährigen Spotrates in Abbildung 4 zurück.

Abbildung 9: Rekursive Bewertung von Payer-Swaptions auf einen ein- und einen zweijährigen Swap, Ausübungs-Swaprate 5.0%



Es bleibt noch zu bemerken, dass auch der Wert einer Receiver-Swaption innerhalb des hier gegebenen Rahmens relativ einfach möglich ist. Einerseits kann die Payer-Receiver Swaption Parität (15) angewandt werden. Oder die in Tabelle 5 gegebenen Cashflows können entsprechend modifiziert werden, wobei der Cashflow für der Receiver-Swaption in jeder Periode t

$$100 \cdot \max\left[0.05 - s_{tT}\right]$$

ist. Da nach Abbildung 8 sowohl die einjährigen wie auch die zweijährigen Swapsätze immer über 5% liegen, ist der Wert der beiden Receiver-Swaptions 0.

8.3 Vergleich mit dem Black Modell

Zum Vergleich soll abschliessend der Preis beider Swaptions mit dem BLACK (1976)-Modell berechnet werden. Dazu ist zunächst die Spezifikation der Volatilität der logarithmierten Veränderungen der Swaprates zu berechnen. Der einjährige Swap steigt gemäss Abbildung 8 in der ersten Periode von 5.0% entweder auf 5.71% oder auf 5.29%. Die logarithmierten Veränderungen betragen $\ln 0.0571 - \ln 0.05 = 0.132$ *bzw.* $\ln 0.0529 - \ln 0.05 = 0.056$. Daraus ergibt sich eine Volatilität von 3.75% pro Jahr. Da die Volatilität mit der Quadratwurzel der Zeit steigt, beträgt sie etwa 5.3% für zwei und 6.5% für drei Jahre. Durch eine entsprechende Berechnung erhält man die jährliche Volatilität des zweijährigen Swaps

mit 7.99%. Setzt man diese Daten in Gleichung (12) ein, so ergibt sich folgender Preis der Option auf den einjährigen Swap:

$$S_P = (0.05 \cdot 0.513 - 0.05 \cdot 0.498) \cdot \frac{100}{e^{0.0575 \cdot 4}} = 0.06$$

Folgt man dem Black-Modell, beträgt der Preis für die Swaption nur 6 Rappen statt 1.1774 CHF. Die Diskrepanz zum HJM-Preis des Swaps ist enorm. Sie ist aber darauf zurückzuführen, dass im Black-Modells lognormalverteilte Zinsveränderungen unterstellt werden. Mit den empirischen Beobachtungen kongruenter sind die Gleichungen (5) und (6), die zeigen, dass die Veränderungen der in den Abbildungen 2 und 3 modellierten Forwardrates vom aktuellen Niveau des Terminzinssatzes abhängig sind. Zudem sinkt die Volatilität der Forwardrates mit abnehmender Restlaufzeit. Das Modell von HJM fusst deshalb auf wesentlich realitätsnaheren Annahmen als das Black-Modell. Es gewährleistet eine arbitragefreie Darstellung der Zinsstrukturen und schliesst negative Zinssätze aus. Damit ist das HJM-Modell bei der Bewertung von Zinsinstrumenten eindeutig zu bevorzugen. Die Option auf den zweijährigen Swap berechnet sich im Black-Modell entsprechend:

$$S_P = (0.0524 \cdot 0.683 - 0.05 \cdot 0.654) \cdot 100 \cdot \left(e^{-0.0575 \cdot 4} + e^{-0.06 \cdot 5}\right) = 0.48$$

Auch hier wird der Preis der Swaption durch das Black-Modell markant unterschätzt (48 Rappen statt 2.6216 CHF). Es bleibt noch zu betonen, dass für verschiedene Ausübungs-Swaprates unter Umständen weniger starke Abweichungen der Ergebnisse der beiden Modelle resultieren. Zudem wurde im binomialen Bewertungsbaum nur ein Schritt pro Jahr modelliert. Diese Annahme ist sicherlich nur durch eine bessere Nachvollziehbarkeit zu rechtfertigen.

8.4 Vergleich des Black-Modells mit dem HJM Ansatz für verschiedene Swaps

Es stellt sich abschliessend die Frage, ob die gefundenen Bewertungsdifferenzen für Swaptions zwischen den Modellen von BLACK (1976) und von HJM (1991) repräsentativ sind. Um dieser Frage nachzugehen, werden hier zwei kurze Untersuchungen vorgenommen. Zum ersten wird die Anzahl der Zeitschritte gegenüber Abbildung 9 bis auf 15 erhöht. Damit erhält man einen ersten Anhaltspunkt für das Konvergenzverhalten des Binomialmodells. 15 Zeitschritte implizieren 32'768 Knoten allein in der letzten Periode nur für die Swaption. Der Rechenalgorithmus setzt aber zusätzlich voraus, dass die anderen Zeitschritte, die Bewertungsgitter für die zugrunde liegenden Swaps und die Shortrates ebenfalls im Arbeitsspeicher gehalten werden müssen. Damit stösst man an die Grenzen der Kapazität selbst moderner Rechner. Mehr als 15 Zeitschritte können daher kaum modelliert werden. Darüber hinaus werden die Volatilitäten für beide Modelle variiert.

Tabelle 6: Swaption-Bewertung bei Erhöhung der Anzahl von Zeitschritten

Periodizität der Zinssätze	jährlich	halbjährlich	monatlich	Black-Preis
Schritte einjähriger Swap	4	8	12	
Schritte zweijähriger Swap	5	10	15	
Volatilität σ	0.0375	0.0265	0.010825	
Einjähriger Swap	1.1774	1.2343	1.2082	0.06
Zweijähriger Swap	2.6211	2.7373	2.7003	0.48

Tabelle 7: Swaption-Bewertung bei verschiedene Volatilitäten

Volatilität in Prozent	HJM-Preis einjährige Swaption	HJM-Preis zweijährige Swaption	Black-Preis einjährige Swaption	Black-Preis zweijährige Swaption
1	1.19	2.67	0.016	0.374
2	1.19	2.67	0.032	0.4
3	1.19	2.67	0.048	0.44
4	1.19	2.67	0.063	0.494
5	1.2	2.68	0.079	0.553
10	1.39	3.09	0.159	0.875
20	1.84	3.93	0.321	1.57

Tabelle 6 zeigt die Ergebnisse der Erhöhung der Zeitschritte. Da die zu bewertenden Swaptions unveränderte Laufzeiten haben, sind die Terminzinssätze aus Tabelle 1 bei einer Erhöhung der Zeitschritte auf 8 bzw. auf 12 in halbjährliche bzw. dritteljährliche Sätze umzurechnen. Auch die Volatilitäten aus Gleichung (6) müssen mit der Quadratwurzel des neuen Zeitintervalls entsprechend angepasst werden. Tabelle 6 zeigt, dass die Preise der beiden Swaption auch für 8 und 12 Zeitschritte erheblich über den Black-Preisen liegen. Ein konvergentes Verhalten ist nicht festzustellen.

Tabelle 7 zeigt schliesslich den Vergleich der beiden Swaptions im Black- und im HJM-Modell für verschiedene Volatilitäten. Es zeigt sich, dass die Preise in beiden Bewertungsmodellen steigen. Die Preisdifferenz bleibt aber erhalten. Welcher der beiden Ansätze bevorzugt wird, hängt davon ab, welche der Annahmen für zutreffender gehalten werden. Allerdings steht die Annahme lognormalverteilter Zinssätze im Black-Modell im Widerspruch zur hier diskutierten Literatur der Zinsstrukturmodelle. Als Konsequenz der Tabellen 6 und 7 muss ganz klar festgehalten werden, dass die Wahl des Bewertungsmodells erhebliche Unterschiede im Risikomanagement von Zinsderivaten nach sich zieht. Bevor man sich für ein spezifisches Modell entscheidet, sind Überlegungen zum Modellrisiko unverzichtbar.

9. Schlussbetrachtungen

Der entscheidende Vorteil des HJM Modells gegenüber anderen Arbitragemodellen der Zinsstruktur wie z.B. dem HO und LEE (1986) Modell, besteht darin, dass einerseits eine variable Volatilitätsentwicklung der Forwardrates modelliert werden kann. Zusätzlich erlaubt das HJM Modell die Modellierung verschiedener Zinsprozesse. Prozess (5) ist ein möglicher Prozess, der durch die stochastische Modellierung der Volatilität negative Zinssätze ausschliesst. Er ist nur eine mögliche Spezifikation, die die allgemeine Arbitragefreiheitsbedingung (4) erfüllt. Andere Zinsprozesse, wie z.B. ein Ornstein-Uhlenbeck Prozess, sind mit dem HJM-Modell konsistent. HULL und WHITE (1993 a) zeigen, dass ihr Trinomialmodell, welches einen Ornstein-Uhlenbeck Prozess annimmt, mit dem zeitdiskreten Modell von HJM (1990) kompatibel ist. Damit hat man mit dem vorgestellten Modell eine einfache Version eines sehr vielfältig einsetzbaren Modells zur Bewertung von Zinsderivaten. Verschiedene Schwächen des Modells sollen aber dennoch nicht unerwähnt bleiben. Zum ersten müssen im Gegensatz zum Binomialmodell von COX, ROSS und RUBINSTEIN (1979) die Martingale-Wahrscheinlichkeit π und die Volatilitätsfunktion σ aus empirischen Daten geschätzt werden. Ökonometrische Verfahren, die eine möglichst gute Anpassung der Modelldaten an die Marktdaten gewähr-

leisten, müssen hier zur Anwendung kommen.[14] Alternativ ist auch die Bestimmung impliziter Volatilitätsparameter zu einer gegebenen Volatilitätsfunktion aus gehandelten Zinsderivaten möglich (vgl. dazu AMIN und MORTON 1994). Zum zweiten wird die praktische Implementierung eines diskreten Modells von HJM dadurch erheblich erschwert, dass der Binomialbaum nicht geschlossen ist. Unter einem geschlossenen Baum versteht man einen Prozess, bei dem eine Auf- nach einer Abwärtsbewegung zum gleichen Ergebnis wie eine Ab- nach einer Aufwärtsbewegung führt. Die Modelle von HO und LEE (1986) und von HULL und WHITE (1993 a und b) liefern geschlossene Prozesse. Im hier geschilderten Fall, hat man nach n Zeitschritten 2^n mögliche Realisierungen. Eine realitätsnahe Implementierung setzt die Modellierung sehr kleiner Zinssatzveränderungen voraus. Verwendet man z.B. nur 20 Zeitschritte im Baum, so kommt man auf etwa eine Million Realisierungen. Bereits hier stösst man also an die Grenze der Kapazität moderner Rechenmaschinen. Deshalb liefern HJM zwar ein realitätsnaheres Modell, allerdings weist es Schwächen in der Implementierung auf. Mit zunehmenden Verbesserungen der Computertechnologie fällt der letztgenannte Nachteil allerdings immer weniger ins Gewicht. Darüber hinaus hat man bei Zinsinstrumenten kaum eine andere Wahl, als die beschriebenen Zinsstrukturmodelle zu verwenden. Denn wie gezeigt wurde, führt das Modell von BLACK (1976), welches üblicherweise zur Bewertung von Swaptions angewendet wird, zu erheblichen Fehlbewertungen, die sich nicht nur negativ auf die Bewertung der Instrumente, sondern auch verheerend auf das Risikomanagement auswirken können. Berücksichtigt man die enorme Bedeutung des Swapmarktes weltweit, birgt die Verwendung falsch spezifizierter Modelle ein enormes Risikopotential für das Finanzsystem.

Anhang

Das risikoneutrale Bewertungsprinzip:

Abbildung A1 zeigt eine beliebige Aktie mit einem Wert von 100 CHF. Der stetige, risikolose Zinssatz für ein Jahr sei 5%. Man möchte eine Calloption mit einjähriger Restlaufzeit und einem Ausübungspreis von 100 CHF auf diese Aktie bewerten. Der Preis der Aktie nach einem Jahr sei entweder 120 CHF oder 80 CHF.

Abbildung A1: Ein binomialer Random Walk für einen Aktienkurs

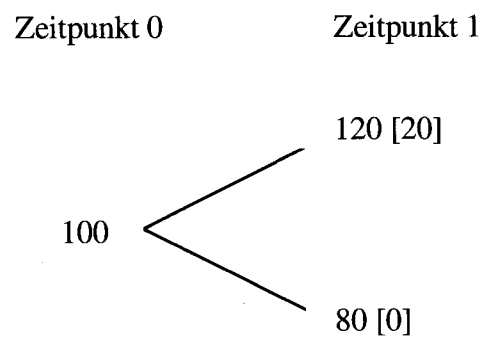
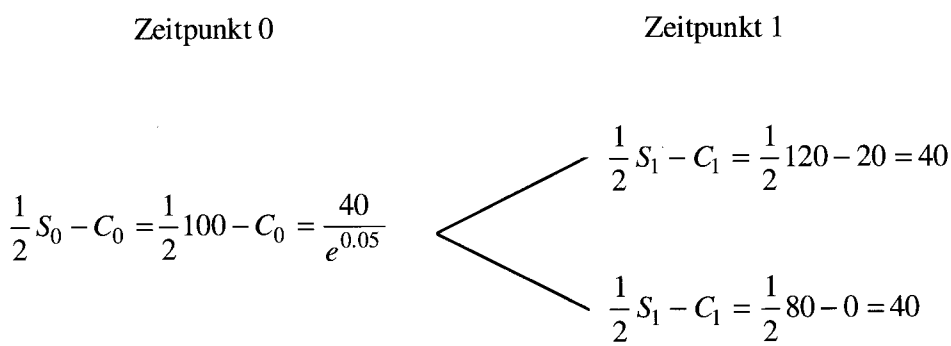


Abbildung A2: Ein risikoloses Portfolio



Folglich ist das Portfolio bestehend aus einer halben Aktie und einer Shortposition in der Calloption risikolos (Abbildung A2). Der Wert dieses Portfolios ergibt sich dann durch Abzinsung von 40 mit dem risikolosen Zinssatz:

$$\frac{1}{2}S_0 - C_0 = \frac{40}{e^{0.05}} \quad \Rightarrow \quad C_0 = 11.95$$

Das gleiche Ergebnis wie mit dem binomialen Bewertungsverfahren wird mit der sog. risikoneutralen Bewertung[15] erzielt: Der Calloptionspreis in der Entscheidungsperiode ergibt sich als diskontierter Erwartungswert der beiden möglichen, zukünftigen Calloptionspreise. Dabei wird der Erwartungswert bezüglich der „Wahrscheinlichkeit"[16] $\pi = 0.6282$ gebildet:

$$C_0 = \frac{\pi \cdot 20 + (1-\pi)\cdot 0}{e^{0.05}} = 11.95, \qquad \pi = \frac{e^{0.05} - 0.8}{1.2 - 0.8} = 0.6282 \tag{A1}$$

Auch auf diese Weise wird der Wert der Calloption mit 11.95 berechnet.

Äquivalenz der Gleichungen (4) und (5)

Gleichung (5)

$$\Leftrightarrow \quad \frac{e^{(\tau-T)\cdot f_{t+1,T,\tau}}}{e^{(\tau-T)\cdot f_{t,T,\tau}}} = \frac{P_{t+1,T}/P_{t+1,\tau}}{P_{tT}/P_{t\tau}} = \begin{cases} \dfrac{2\cdot e^{\sigma}}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}} \\ \dfrac{2\cdot e^{-\sigma}}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}} \end{cases}$$

nach Gleichung (2).

$$\Leftrightarrow \quad P_{t+1,T} = \begin{cases} \dfrac{2\cdot e^{\sigma}}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}} \cdot \dfrac{P_{tT}\cdot P_{t+1,\tau}}{P_{t\tau}} \\ \dfrac{2\cdot e^{-\sigma}}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}} \cdot \dfrac{P_{tT}\cdot P_{t+1,\tau}}{P_{t\tau}} \end{cases}$$

Für $\pi = 0.5$ ergibt sich dann:

$$\tilde{E}_t\left(P_{t+1,T}\right)\cdot P_{t,t+1} = \pi \cdot \frac{2\cdot e^{\sigma}}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}} \cdot \frac{P_{tT}\cdot P_{t+1,\tau}}{P_{t\tau}} \cdot P_{t,t+1}$$
$$+(1-\pi)\cdot \frac{2\cdot e^{-\sigma}}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}} \cdot \frac{P_{tT}\cdot P_{t+1,\tau}}{P_{t\tau}} \cdot P_{t,t+1} = P_{tT}$$

weil $P_{t,t+1}\cdot P_{t+1,\tau} = P_{t\tau}$. Folglich gilt das risikoneutrale Bewertungsprinzip (4) für die Zerobondpreise, genau dann wenn der Prozess (5) der Forwardrates erfüllt ist.

Funktionsweise eines Swaps

Abbildung A3 zeigt die Grundstruktur eines Swaps. Hier tauschen 2 Unternehmen ihre Zinsverpflichtungen aus. Wegen der günstigeren Bonitätseinstufung kann sich Unternehmen A zu günstigeren Konditionen am Kapitalmarkt verschulden als Unternehmen B. Unternehmen A hat sich auf dem Kapitalmarkt fix zu 5% verschuldet, Unternehmen B variabel zu LIBOR + 2%. Gleichzeitig schliessen die beiden Unternehmen einen Swapvertrag ab, mit dem sich Unternehmen A verpflichtet, variable Zinszahlungen in Höhe von LIBOR + 1.25% an B zu leisten. Im Gegenzug zahlt B an A 5.5% fix. Aus Sicht des Unternehmens A handelt es sich also um einen Receiver-Swap (es erhält fixe Zahlungen), für Unternehmen B ist es ein Payer-Swap (es zahlt fix). Netto belaufen sich die Zinsverpflichtungen für Unternehmen A auf LIBOR + 0.75%. Es verschuldet sich also insgesamt um 25 Basispunkte günstiger als auf dem Kapitalmarkt. Unternehmen B zahlt netto 6.25%, also um 75 Basispunkte günstiger als auf dem Kapitalmarkt. Für beide Unternehmen verbessern sich damit die Verschuldungskonditionen.

Folglich ist das Portfolio bestehend aus einer halben Aktie und einer Shortposition in der Calloption risikolos (Abbildung A2). Der Wert dieses Portfolios ergibt sich dann durch Abzinsung von 40 mit dem risikolosen Zinssatz:

$$- \quad {}_0 - \quad {}_0 = \frac{}{0.05} \quad \Rightarrow \quad {}_0 = \quad .$$

Das gleiche Ergebnis wie mit dem binomialen Bewertungsverfahren wird mit der sog. risikoneutralen Bewertung[15] erzielt: Der Calloptionspreis in der Entscheidungsperiode ergibt sich als diskontierter Erwartungswert der beiden möglichen, zukünftigen Calloptionspreise. Dabei wird der Erwartungswert bezüglich der „Wahrscheinlichkeit"[16] $\pi = 0.6282$ gebildet:

$$\begin{aligned} {}_0 &= \frac{\pi \cdot \quad + (\quad - \pi) \cdot}{0\ 05} = \quad . \quad , \\ \pi &= \frac{0\ 05 \ - \ .}{. \ - \ .} = \quad . \end{aligned} \tag{A1}$$

Auch auf diese Weise wird der Wert der Calloption mit 11.95 berechnet.

Äquivalenz der Gleichungen (4) und (5)

Gleichung (5)

$$\Leftrightarrow \quad \frac{e^{(\tau - T) \cdot f_{t+1,T,\tau}}}{e^{(\tau - T) \cdot f_{t,T,\tau}}} = \frac{P_{t+1,T} / P_{t+1,\tau}}{P_{tT} / P_{t\tau}} = \begin{cases} \dfrac{2 \cdot e^{\sigma}}{e^{\sigma} + e^{-\sigma}} \\ \dfrac{2 \cdot e^{-\sigma}}{e^{\sigma} + e^{-\sigma}} \end{cases} ,$$

nach Gleichung (2).

$$\Leftrightarrow \quad P_{t+1\,T} = \begin{cases} \dfrac{2 \cdot e^{\sigma}}{e^{\sigma} + e^{-\sigma}} \cdot \dfrac{P_{tT} \cdot P_{t+1\,\tau}}{P_{t\tau}} \\ \dfrac{2 \cdot e^{-\sigma}}{e^{\sigma} + e^{-\sigma}} \cdot \dfrac{P_{tT} \cdot P_{t+1\,\tau}}{P_{t\tau}} \end{cases}$$

Für $\pi = 0.5$ ergibt sich dann:

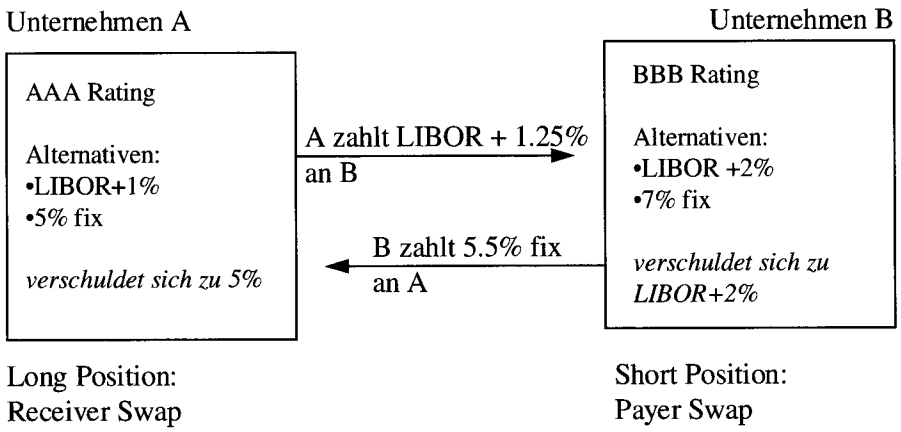
$$\tilde{E}_t\left(P_{t+1,T}\right) \cdot P_{t,t+1} = \pi \cdot \frac{2 \cdot e^{\sigma}}{e^{\sigma} + e^{-\sigma}} \cdot \frac{P_{tT} \cdot P_{t+1,\tau}}{P_{t\tau}} \cdot P_{t,t+1}$$
$$+ (1 - \pi) \cdot \frac{2 \cdot e^{-\sigma}}{e^{\sigma} + e^{-\sigma}} \cdot \frac{P_{tT} \cdot P_{t+1,\tau}}{P_{t\tau}} \cdot P_{t,t+1} = P_{tT}$$

weil $P_{t,t+1} \cdot P_{t+1t} = P_{tt}$. Folglich gilt das risikoneutrale Bewertungsprinzip (4) für die Zerobondpreise, genau dann wenn der Prozess (5) der Forwardrates erfüllt ist.

Funktionsweise eines Swaps

Abbildung A3 zeigt die Grundstruktur eines Swaps. Hier tauschen 2 Unternehmen ihre Zinsverpflichtungen aus. Wegen der günstigeren Bonitätseinstufung kann sich Unternehmen A zu günstigeren Konditionen am Kapitalmarkt verschulden als Unternehmen B. Unternehmen A hat sich auf dem Kapitalmarkt fix zu 5% verschuldet, Unternehmen B variabel zu LIBOR + 2%. Gleichzeitig schliessen die beiden Unternehmen einen Swapvertrag ab, mit dem sich Unternehmen A verpflichtet, variable Zinszahlungen in Höhe von LIBOR + 1.25% an B zu leisten. Im Gegenzug zahlt B an A 5.5% fix. Aus Sicht des Unternehmens A handelt es sich also um einen Receiver-Swap (es erhält fixe Zahlungen), für Unternehmen B ist es ein Payer-Swap (es zahlt fix). Netto belaufen sich die Zinsverpflichtungen für Unternehmen A auf LIBOR + 0.75%. Es verschuldet sich also insgesamt um 25 Basispunkte günstiger als auf dem Kapitalmarkt. Unternehmen B zahlt netto 6.25%, also um 75 Basispunkte günstiger als auf dem Kapitalmarkt. Für beide Unternehmen verbessern sich damit die Verschuldungskonditionen.

Abbildung A3: Grundstruktur eines Zinsswaps



Die Bewertung eines Swaps erfolgt, indem der Barwert der variablen Zahlungen (man spricht vom „variablen Bein" eines Swaps) mit dem Barwert der fixen Zahlungen (man spricht vom „fixen Bein" eines Swaps) gleichgesetzt wird. Zwar sind die variablen Zinszahlungen bei Vertragsabschluss nicht prognostizierbar, aber durch Forwardgeschäfte können die variablen Zahlungen gegen Veränderungen auf dem Kapitalmarkt abgesichert werden. Folglich bemisst sich der Barwert der variablen Zahlungen an der mit der heutigen Spotratestruktur diskontierten Forwardratestruktur. Allgemein gilt für die Swaprate s_{tT} eine Swapvertrages zum Zeitpunkt t mit einer Laufzeit bis Periode T:

$$\underbrace{\sum_{i=t+1}^{T} \frac{s_{tT}}{(1+r_{ti})^i}}_{\text{Barwert der fixen Zahlungen}} = \underbrace{\sum_{i=t+1}^{T} \frac{f_{t,i-1,i}}{(1+r_{ti})^i}}_{\text{Barwert der variablen Zahlungen}} \Rightarrow$$

$$s_{tT} = \frac{\sum_{i=t+1}^{T} \frac{f_{t,i-1,i}}{(1+r_{ti})^i}}{\sum_{i=t+1}^{T} \frac{1}{(1+r_{ti})^i}}$$

Daraus ergibt sich der Swapsatz als Durchschnitt der Terminzinssätze, gewichtet mit den Diskontfaktoren.

Fussnoten

[1] Hier handelt es sich um die sog. Mean Reversion Eigenschaft von Zinssätzen.

[2] Vgl. HULL (1997) S. 400–404.

[3] Die bekannte BLACK-SCHOLES Formel wurde allerdings bereits von BLACK, SCHOLES (1972) publiziert.

[4] In der grundlegenden Arbeit von HJM (1992) wird die Mean Reversion der Zinsstruktur allerdings nicht explizit berücksichtigt. HJM zeigen vielmehr, dass der Drift der Terminzinssätze allein von einer Volatilitätsfunktion determiniert wird. Durch eine spezifische Wahl der Volatilitätsfunktion lassen sich andere Zinsstrukturmodelle als Spezialfall des HJM Modells bestimmen (vgl. Musiela und Rutkowski 1997 Abschnitt 12.3.2 oder REBONATO 1996 Abschnitt 14.3).

[5] Auch BRACE und MUSIELA (1994) und JAMSHIDIAN (1998) beschäftigen sich mit Swaptions, allerdings in zeitstetigen Modellen.

[6] Neben anderen: So ist man beim Modell von HJM bspw. nicht auf die Festlegung eines bestimmten Zinsprozesses angewiesen. HJM (1990) zeigen, dass ihr Modell mit den gängigsten Zinssatzprozessen vereinbar ist.

[7] Vgl. HJM (1991). Analytisch ist der Übergang von einem Ein- zu einem Zweifaktormodell relativ einfach. Um es einfach zu halten, soll hier jedoch nur das Einfaktormodell betrachtet werden.

[8] Gleichung (5) ist eine vereinfachte Darstellung des in HJM (1991, Gleichung 9) definierten Prozesses. Die Arbitragefreiheit dieses Prozesses, d.h. die Äquivalenz zum risikoneutralen Bewertungsprinzip in (A1) oder (4), wird im Anhang gezeigt. Die Herleitung ist in RUDOLF (1998) zu finden.

[9] Hier handelt es sich um einen „Mean Reversion" Prozess. D.h., dass bei einem über dem langfristigen Durchschnitt liegenden Zinsniveau die Wahrscheinlichkeit einer Abwärtsbewegung höher ist, als einer Aufwärtsbewegung. Insgesamt tendieren die Zinssätze damit gegen ihr langfristiges Mittel. So können negative Zinssätze ausgeschlossen werden.

[10] Für die cosh-Funktion gilt: $\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

[11] HJM (1992) und HULL und WHITE (1993 b) zeigen, welche Funktionen für die Volatilität zulässig sind, wenn für den Prozess der Forwardrates die Markov-Eigenschaft gelten soll. D.h. wenn alle Zinsveränderungen von vorangegangenen Zinsveränderungen unabhängig sein sollen.

[12] HJM (1992) formulieren das Modell in stetiger Zeit, also für infinitisimal kleine Zeitsprünge. Hier sind negative Forwardrates nicht möglich.

[13] Die einperiodischen Kassazinssätze werden in der Literatur als „Shortrates" bezeichnet.

[14] Vgl. dazu die Aussagen von HJM (1990) auf Seite 430.

[15] Die grundlegende Arbeit zu diesem Thema stammt von Harrison und Pliska (1981). Eine umfassende und verständliche Einführung dazu stammt von ZIMMERMANN (1998). Zu empfehlen ist auch der Text von GEMAN, EL KAROUI und ROCHET (1995).

[16] Man spricht von einem „äquivalenten Martingalemass" oder einfach von einer „Martingale-Wahrscheinlichkeit π.

Literatur

AMIN, K. und A. MORTON (1994): „Implied Volatility Functions in Arbitrage-Free Term Structure Models", Journal of Financial Economics 35, pp. 141–180.

BERENDES, M. und W. BÜHLER (1994): „Analyse der Preisunterschiede von Zinsforward und Zinsfuture", Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung 46, pp. 987–1020.

BLACK, F. (1976): „The Pricing of Commodity Contracts", Journal of Financial Economics 3, pp. 167–179.

BLACK, F. und M. SCHOLES (1972): „The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency", The Journal of Finance 27, pp. 399–417.

BLACK, F. und M. SCHOLES (1973): „The Pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy 81, pp. 637–659.

BRACE, A. und M. MUSIELA (1994): „A Multifactor Gauss Markov Implementation of Heath, Jarrow and Morton", Mathematical Finance 4 (3), pp. 259–283.

BÜHLER, A. (1994): „Bewertung, Preischarakteristika und Risikomanagement von zinsderivaten Wertpapieren", Finanzmarkt und Portfolio Management 8, pp. 468–498.

COX, J. C., J. E. INGERSOLL JR. und S. A. ROSS (1985): „A Theory of the Term Structure of Interest Rates", Econometrica 53, pp. 363–384.

COX, J. C., S. A. ROSS und M. RUBINSTEIN (1979): „Option Pricing: A simplified Approach", Journal of Financial Economics 7, pp. 229–263.

GEMAN, H., N. EL KAROUI und J.-C. ROCHET (1995): „Changes of Numéraire, Changes of Probability Measure, and Option Pricing", Journal of Applied Probability 32, pp. 443–458.

HARRISON, J.,M. und S. PLISKA (1981): „Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading", Stochastic Processes and their Applications 11, pp. 215–260.

HEATH, D., R. JARROW und A. MORTON (1990): „Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation", Journal of Financial and Quantitative Analysis 25, pp. 419–440.

HEATH, D., R. JARROW und A. MORTON (1991): „Contingent Claim Valuation with a Random Evolution of Interest Rates", Review of Futures Markets 9, pp. 55–76.

HEATH, D., R. JARROW und A. MORTON (1992): „Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation", Econometrica 60, pp. 77–105.

HO, T. Y. und S. LEE (1986): „Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", The Journal of Finance 41, pp. 1011–1029.

HULL, J. (1997): Options, Futures, And Other Derivative Securities, Prentice Hall International, Third Edition.

HULL, J. und A. WHITE (1993 b): „Bond Option Pricing Based on a Model for the Evolution of Bond Prices", Advances in Futures and Options Research 6, pp. 1–13.

HULL, J. und A. WHITE(1993 a): „One-Factor Interest-Rate Models and the Valuation of Interest-Rate Derivative Securities", Journal of Financial and Quantitative Analysis 28, pp. 235–254.

INTERNATIONALS SWAPS AND DERIVATIVES ASSOCIATION (ISDA), Inc. (1997), HTTP-Adresse: „www.isda.org/d6html".

JAMSHIDIAN, F. (1998): „LIBOR and Swap Market Models and Measures", Finance Stochastics, in Vorbereitung.

JARROW, R. (1996): Modelling Fixed Income Securities and Interest Rate Options, McGraw-Hill, New York.

MADJLESSI, F. und CH. SCHLAG (1996): „Bewertungstechniken bei Zinsunsicherheit", Zeitschrift für Betriebswirtschaft 66, pp. 167–189.

MERTON, R. C. (1973 a): „Theory of Rational Option Pricing", Bell Journal of Economics and Management Science 4, pp. 141–183.

MERTON, R. C. (1973 b): „An Intertemporal Capital Asset Pricing Model", Econometrica 41, pp. 867–887.

MUSIELA, M. und M. RUTKOWSKI (1997): Martingale Methods in Financial Modelling, Springer.

REBONATO, R (1996): Interest-Rate Option Models, Chichester: John Wiley and Sons.

RUDOLF, M. (1998): „Zinsstrukturmodelle", Habilitationsschrift Universität St. Gallen, in Vorbereitung.

SANDMANN, K. und E. SCHLÖGL (1996): „Zustandspreise und die Modellierung des Zinsänderungsrisikos", Zeitschrift für Betriebswirtschaft 66, pp. 813–836.

STEINER, M., F. MEYER und K. LUTTERMANN (1994): „Die preisliche Bewertung von Zins-Futures unter besonderer Berücksichtigung der Delivery Option und des Marking-to-Market", Finanzmarkt und Portfolio Management 8, pp. 332–353.

UHLIR, H. und P. STEINER (1994): Wertpapieranalyse, Heidelberg: Physica-Verlag, 3. Auflage.

VASICEK, O. (1977): „An Equilibrium Characterization of the Term Structure", Journal of Financial Economics 5, pp. 177–188.

ZIMMERMANN, H. (1998): State-Preference Theorie und Asset Pricing – Eine Einführung, Springer, in Vorbereitung.