

Portfolio Selection und Schätzfehler bei den erwarteten Renditen: Ergebnisse für den deutschen Aktienmarkt

1. Problemstellung und Literaturübersicht

Die Portfolio Selection von MARKOWITZ (1959) beruht auf einer Beschreibung der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Anlageergebnisses durch den Erwartungswert μ_P der Portfeuillerendite und die Standardabweichung σ_P der erwarteten Portfeuillerendite und gilt trotz aller Kritik als grundlegendes Modell zur Unterstützung von Anlageentscheidungen.[1] Je stabiler die Inputfaktoren der Mittelwert-Varianz-Optimierung – die erwarteten Renditen der einzelnen Anlagemöglichkeiten, die erwarteten Standardabweichungen der Anlagen und die erwarteten Korrelationen zwischen den Anlagen – sind, desto einfacher ist eine Prognose der zukünftigen Werte und desto stabiler werden die Resultate der Optimierung sein.[2]

Ein Grund für die zuweilen zurückhaltende Anwendung der Modelle in der Praxis liegt unter anderem darin begründet, dass die Ermittlung eines optimalen Portfeuillees im Sinne der Portfolio Selection mit sehr hohen Schätzfehlern beim Daten-

Input verbunden ist.[3] In der Tat ist eine *richtige* Schätzung der erwarteten Renditen und Varianzen des optimalen Portfeuillees bzw. der Wertpapiere für die Güte der Aussagen und damit der Anlageentscheidungen entscheidend. Eine auf der Portfolio Selection basierende Anlageplanung gewichtet die Aktien der Unternehmen innerhalb eines Portfeuillees am stärksten, die die höchsten Erträge erwarten lassen, untereinander am geringsten korrelieren und durch eine geringe Variabilität ihrer Rendite gekennzeichnet sind. Umgekehrt werden die Aktien tendenziell gering gewichtet, die die niedrigsten Erträge erwarten lassen, untereinander am stärksten korrelieren und eine hohe Renditevolatilität haben. Die Tatsache, dass gerade die Risiko-Ertrags-Profile solcher Aktien verstärkt durch Schätzfehler beeinflusst werden, führt dazu, dass die getroffene Anlageentscheidung in Wirklichkeit suboptimal ist, weshalb der prognostizierte Anlageerfolg, gemessen durch den Risikonutzen der Anlage, regelmässig überschätzt wird.[4] Als Konsequenz kann bspw. ein naivdiversifiziertes Portfeuille eine systematisch diversifizierte Strategie im Anlageerfolg übertreffen.[5] Erkenntnisse über den Einfluss von Renditeschätzungen könnten solche Vorzüge naivdiversifizierender Strategien erklären.

Kann das Schätzrisiko nicht vollständig überwunden werden, so gewinnt die Frage nach der Sensitivität der Portfeuilleoptimierung auf Verände-

* Die Autoren bedanken sich bei den Gutachtern Dr. Jochen Kleeberg und Dr. Thomas Stucki für wertvolle Hinweise und Anregungen. Klaus Schäfer und Peter Zimmermann, Seminar für Kapitalmarktforschung und Finanzierung, Ludwig-Maximilians-Universität München, Schackstr. 4, 80539 München, Tel. (0 89) 21 80 20 86, Fax (0 89) 21 80 20 16, e-mail: schaefer@bwl.uni-muenchen.de.

rungen der Einflussparameter besondere Bedeutung. Die Beantwortung dieser Frage ist insbesondere für praktische Anwendungen von Interesse. Zeigen Schätzfehler bei verschiedenen Parametern deutlich unterschiedliche Auswirkungen auf die zu bestimmende Struktur des optimalen Portefeuilles, so kann bereits im Vorfeld der Formulierung des Entscheidungsproblems das Hauptaugenmerk auf die Bestimmung der sensitivitätsbestimmenden Faktoren gelegt werden. Sind bspw. Ertragsschätzungen als mögliche Fehlerquelle identifiziert und hat der Marktteilnehmer lediglich unsichere Vorstellungen über die Renditeparameter, so kann das Schätzrisiko dadurch umgangen werden, dass der Marktteilnehmer alle Schätzwerte für die erwarteten Renditen gleichsetzt und eine Minimierung der Portefeuillevarianz anstrebt. Eine mögliche Ursache für die teilweise ex post zu beobachtenden höheren Überrenditen dieser sogenannten Minimum-Varianz-Portefeuilles[6] kann also beispielsweise in der Unabhängigkeit solcher Portefeuillekonstruktionen von (Fehlern in den) geschätzten Renditen liegen.

Die vorliegende Ausarbeitung soll auf empirischer Basis die praktische Umsetzung der Portfolio Selection problematisieren, um im Kern der Betrachtungen die Schätzfehlerproblematik bei den erwarteten Renditen zu analysieren. Die herausgehobene Stellung der erwarteten Renditen als sensitive Grösse der Portfolio Selection ist in der Literatur gut begründet.[7] Darüberhinaus werden die deutlich geringeren, aber prinzipiell doch vorhandenen Schätzfehler in den Varianzen überlagert von der Problematik der „richtigen“ Schätzung der Kovarianzmatrix bzw. ihrer Inversen, was die Bedeutung von Schätzrisiken in den Varianzen und Kovarianzen insbesondere in der praktischen Betrachtung weiter in den Hintergrund drängt. Hier soll deshalb ausschliesslich der Einfluss von Schätzfehlern in den erwarteten Renditen anhand von Kursdaten des deutschen Aktienmarktes diskutiert werden. Die Untersuchungsergebnisse beziehen sich auf Aktienportefeuilles aus der Gesamtheit des Deutschen Aktienindex DAX.

Neben Beiträgen zum Modell konstanter Korrelationen und zum James-Stein-Ansatz[8] überwiegen unter den bisherigen Arbeiten zum Schätzrisiko die sogenannten Bayesschen-Modellansätze, bei denen der Einfluss von Schätzrisiken auf Gleichgewichtssituationen am Kapitalmarkt betrachtet wird. Eine Übersicht über diese Arbeiten liefert die Monographie von BAWA/BROWN/KLEIN (1979).[9]

Die bisherigen empirischen Analysen zu Schätzfehlern beziehen sich mit Ausnahme der Arbeiten von BÜHLER/ZIMMERMANN (1994), HEPP (1990) sowie STUCKI (1994) ausschliesslich auf den amerikanischen Kapitalmarkt. KALLBERG/ZIEMBA (1984) haben sich in einem der ersten Ansätze mit der Frage beschäftigt, wie sich Fehlspezifikationen der Nutzenfunktion, der erwarteten Renditen und der Kovarianzmatrix auf die Bestimmung des optimalen Portefeuilles auswirken. Die empirischen Erkenntnisse zeigen, dass der Einfluss der Gestalt der Risikonutzenfunktion marginal ist, wenn sich die jeweiligen Risikoaversionsparameter hinreichend genau ähneln. Wesentlich grössere Bedeutung hat dagegen die Bestimmung der erwarteten Renditen: Fehler bei der Schätzung der Erwartungswerte der Renditen wirken sich zehnmal stärker aus als Fehler bei der Bestimmung der Kovarianzmatrix. Das Verhältnis der Auswirkungen von Schätzungenauigkeiten der Renditen zu Schätzfehlern bei der Kovarianzmatrix nimmt dabei mit dem Grad der Risikotoleranz zu.

Motivation für die Untersuchung von BEST/GRAUER (1991) ist die Frage, ob aktive Portefeuille-Manager aufgrund ihrer bezüglich einiger Titel besonderen Kursanstiegs- bzw. Kursverfallserwartungen in ein gegenüber dem Marktportefeuille nur leicht verändertes Portefeuille investieren sollten oder ob der unterschiedliche Informationsstand den Portefeuille-Manager zur Zusammenstellung eines gänzlich unterschiedlichen Portefeuilles veranlassen sollte. BEST/GRAUER beantworten dies über Aussagen zu den Sensitivitäten der Portefeuillegewichte, der erwarteten Portefeuillerendite und Portefeuillevarianz auf

Variationen der erwarteten Renditen, die demnach äusserst sensitiv auf Veränderungen der Renditen einzelner Wertpapiere reagieren. Werden dagegen Leerverkäufe ausgeschlossen, so sind die Auswirkungen von Fehlschätzungen auf die Portefeuille-Rendite wie auch die Portefeuille-Varianz bereits erheblich geringer. BEST/GRAUER beobachten weiter bei bereits relativ geringen Variationen der erwarteten Rendite lediglich einer einzelnen Aktie grundlegende Änderungen in der Struktur des optimalen Portefeuilles.

Eine weitere Untersuchung, die in ihrer prinzipiellen Vorgehensweise den Ansatzpunkt der vorliegenden Ausarbeitung darstellt, stammt von CHOPRA/ZIEMBA (1993). Fehlschätzungen der Rendite- und Risikoparameter werden dort über Simulationen in das Optimierungsproblem integriert. Bei jedem Simulationsdurchlauf wird eine Inputgrösse zufällig verändert und das optimale Portefeuille für diesen Fall bestimmt. Mit den resultierenden Abweichungen bei den Gewichten der einzelnen Aktien im Portfolio sowie bei Portefeuille-Rendite und -Varianz lassen sich Aussagen hinsichtlich des quantitativen Einflusses von Fehlschätzungen auf das resultierende optimale Portefeuille treffen. CHOPRA/ZIEMBA bestätigen die Ergebnisse von KALLBERG/ZIEMBA (1984) und folgern darüber hinaus, dass sich Schätzfehler bei der Bestimmung der Varianzen doppelt so stark auswirken wie Fehler bei der Bestimmung der Kovarianzen.

Im zweiten Kapitel wird die Optimierungsaufgabe als Ausgangsbasis der weiteren Ausführungen vorgestellt. Der Aufbau und die Vorgehensweise der Untersuchung werden zu Beginn des dritten Kapitels charakterisiert. Es folgt die Analyse der Datenbasis der Jahre 1974 bis 1995, anhand welcher die gewählte Zeitperiode begründet wird. Das dritte Kapitel schliesst mit den Ergebnissen der empirischen Untersuchung. Das vierte Kapitel liefert eine zusammenfassende Wertung der Ergebnisse und einen kurzen Ausblick.

2. Grundlagen der Portfolio Selection und Modellformulierung

Im folgenden gehen wir davon aus, dass ein Marktteilnehmer seine Entscheidung zur Konstruktion eines Aktienportefeuilles auf der Grundlage der Portfolio Selection nach MARKOWITZ (1959) bestimmt. Den effizienten Rand, d.h. die Menge der effizienten Portefeuilles erhält man demnach über die Minimierung der Varianz der Portefeuille-Renditen bei gegebenen Erwartungswerten der Portefeuillerendite.[10] Man steht also vor folgendem Optimierungsproblem:

Minimiere die Funktion

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij} \quad (1)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\bar{\mu}_p = \sum_{i=1}^N \mu_i x_i \quad (1a)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1. \quad (1b)$$

Dabei bezeichnen x_i den Anteil des Wertpapiers i am Portefeuille P , $\bar{\mu}_p$ bzw. μ_i die erwartete Rendite des Portefeuilles P bzw. des Wertpapiers i und σ_{ij} die Kovarianz der erwarteten Renditen der Wertpapiere i und j . Die zu minimierende Varianz der Portefeuillerendite wird mit σ_p^2 bezeichnet. Die Gesamtzahl der betrachteten Wertpapiere beträgt N .

Die Nebenbedingung (1a) garantiert das Einhalten der vorgegebenen Portefeuillerendite. Die Bedingung (1b) stellt die Budgetrestriktion der Aktienanlage dar. Im Grundmodell werden für die x_i keine Obergrenzen oder Nichtnegativitätsbedingungen vorgesehen.

Für einen vorgegebenen Erwartungswert der Portefeuillerendite $\bar{\mu}_p$ ist also nach (1) jene Wertpapiermischung ausgedrückt durch den Vektor

$X = (x_1, \dots, x_N)$ zu finden, die die Varianz der Portefeullerendite minimiert.

Wir nutzen hier eine alternative Formulierung des Portefeulleproblems. Zunächst wird weiterhin von den üblichen Merkmalen eines vollkommenen Kapitalmarktes ausgegangen.[11] Die Kovarianzmatrix wird als positiv definit angenommen, womit keine perfekte Korrelation zwischen den einzelnen Asset-Renditen existiert. Die weiteren Grundlagen des sog. hybriden Modells[12] stellen postulierte normalverteilte Periodenendpreise wie auch die Spezifikation der Risikostruktur der Marktteilnehmer in Form exponentieller Nutzenfunktionen vom CARA-Typ dar.[13]

Im vorliegenden Modellrahmen ist das Optimierungsproblem (1) konsistent mit der Zielsetzung eines Investors, seinen erwarteten Nutzen zu maximieren. Äquivalent dazu ist die Maximierung des Sicherheitsäquivalents $C_t(W(X)) = E(W(X)) - \frac{1}{t} \text{VAR}(W(X))$, was zu einem Optimierungsproblem der folgenden Form führt:[14]

Maximiere die Funktion

$$Z(X) = \sum_{i=1}^N x_i \mu_i - \frac{1}{t} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij} \quad (2)$$

unter der Nebenbedingung

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1. \quad (2a)$$

Das Optimierungsproblem (2) ist für die vorliegende Arbeit vor allem aus programmierungstechnischen Gründen geeigneter als die Darstellung (1). Spezifiziert man den *Risikotoleranz-Faktor* t auf ein bestimmtes Niveau \hat{t} , so erhält man über die Lösung von (2) das MV-effiziente Portefeulle für einen Investor mit einer Risikotoleranz von \hat{t} . Der Risikotoleranzparameter wird im Anhang weitergehend interpretiert.

In der hier präsentierten Untersuchung wird in einem ersten Ansatz ausschliesslich die Budgetre-

striktion (2a) als Nebenbedingung vorausgesetzt, während in einer weiteren Analyse das Optimierungsproblem um obere und untere Anteilsbegrenzungen ergänzt wird. Da der Prozess der Portefeulleoptimierung durch bestimmte Restriktionen in der Möglichkeit extremer Lösungen beschränkt wird, kann deren gezielte Berücksichtigung die Auswirkungen prospektiver Schätzfehler reduzieren und die Performance einer Anlagestrategie unter Umständen verbessern. In diesem Sinne bewirkt bspw. die Implementierung einer Nichtnegativitätsbedingung, dass Aktien mit einer niedrigen erwarteten Rendite nicht zugunsten rentabler und hoch korrelierter Pendanten leerverkauft werden. Der Verzicht auf Leerverkäufe lässt sich notieren zu

$$x_i \geq 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, N. \quad (2b)$$

Insbesondere die Einführung dieser Nichtnegativitätsbedingung führt dazu, dass Portefeulles, die aufgrund der erwarteten Rendite und der Risikoschätzung auf der effizienten Grenze liegen, häufig sehr stark auf einzelne Anlagen konzentriert sind. Diese Problematik lässt sich entschärfen, wenn auf eine bessere Diversifikation der Anlagen geachtet wird, was bspw. über die Einführung gewisser Obergrenzen für Anlagen in Einzelpapiere erreicht werden kann. Die Anlageobergrenze wird für jede einzelne Aktie in einem weiteren Schritt auf 20 Prozent des Gesamtwertes des Aktienportefeulles begrenzt:[15]

$$x_i \leq 0,2 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, N. \quad (2c)$$

3. Empirische Untersuchung zur Renditesensitivität der Markowitz-Optimierung

3.1 Untersuchungsaufbau

Zur Identifikation des optimalen Portefeulles benötigt man Schätzungen über die erwarteten Renditen μ_i , die Volatilitäten der Renditen σ_i , gemessen als Standardabweichungen, und die Korre-

lationskoeffizienten zwischen den erwarteten Renditen ρ_{ij} der zugrundeliegenden Aktien. Die Standardabweichungen und die Korrelationskoeffizienten definieren die Kovarianzstruktur der Anlagen, formalisiert durch die Varianz-Kovarianz-Matrix C . Die erwarteten Renditen der Aktien können über fundamentalanalytische und technische Ansätze oder auch mit Hilfe verschiedener Kapitalmarktmodelle prognostiziert werden. Für die Prognose der zukünftigen Varianzen und Kovarianzen werden normalerweise die Renditezeitreihen der vorangegangenen Perioden genutzt und die daraus geschätzten „historischen“ Varianzen und Kovarianzen in die Zukunft projiziert.

Die erwarteten Renditen und die Kovarianzmatrix für die Aktientitel werden im folgenden auf Basis historischer Renditen mit einem täglichen Rendite-Intervall und bei kontinuierlicher Verzinsung bestimmt. Die $T \times N$ -Matrix R enthält in den Zeilen die normierten monatlichen Renditen, wobei N die Anzahl der Aktientitel und T die Anzahl der erwarteten Renditen innerhalb der Schätzperiode angeben. Die Monatsrenditen sind in dem Sinne normiert, dass für jede Spalte das jeweilige arithmetische Mittel der Spaltensumme von den Renditen abgezogen wird, so dass sich nach dieser Normierung jeweils eine Spaltensumme von Null ergibt; es gilt also $R = \left(r_{j,l} - \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T r_{k,l} \right)_{j,l}$ mit der Rendite $r_{j,l}$ des Aktientitels j im Monat l für $l=1, \dots, T$ und $j=1, \dots, N$. Die annualisierte $N \times N$ -Kovarianzmatrix C wird also über $C = R^t R$ mit R^t als Transponierte von R bestimmt.[16] Die durchschnittlichen Renditen werden bei täglichen Rendite-Intervallen geschätzt.

Ausgehend von den so bestimmten Parameterwerten werden in Anlehnung an CHOPRA/ZIEMBA (1993) über eine Simulationsstudie Sensitivitätsbetrachtungen bzgl. der erwarteten Renditen angestellt. Dazu werden die Werte des optimalen Portefeuilles für die erwarteten Renditen isoliert mit einem Faktor $(1+kz)$ multipliziert und somit verändert. Dabei ist k eine noch festzulegende vorgegebene Konstante, die je nach gewählter

Grösse möglichen Schätzfehlern ein geringeres oder stärkeres Gewicht verleiht. Die Variable z schliesslich wird als standardnormalverteilte Zufallsvariable modelliert, womit die Veränderung des Eingabewertes einen zufälligen Charakter erhält. Mit dem so zufällig veränderten Eingabeparameter wird das modifizierte Optimierungsproblem und damit ein (eventuell anderes) optimales Portefeuille bestimmt. Um den zufälligen Charakter der Parameteränderung in den Griff zu bekommen, wird eine solche Simulation mehrmals, hier mit 200 Simulationen durchgeführt.

Möchte man also die Sensitivität des optimalen Portefeuilles auf Veränderungen anlagespezifischer Renditen untersuchen, so setzt man statt des historisch ermittelten Wertes der Portefeuille-Rendite r_p für die i -te Simulation den Wert

$$r_p^i = \sum_{j=1}^n x_j r_j (1 + kz_i) \quad (3)$$

mit $i = 1, \dots, 200$. Man ersetzt also r_j durch $r_j(1+kz_i)$, wobei die Zufallsvariable z_i für jede Simulation über eine noch zu spezifizierende Zufallsauswahl neu bestimmt wird und k für einen vollständigen Simulationslauf ($i = 1, \dots, 200$) unverändert bleibt. Die Berechnungen werden in Anlehnung an die genannten Untersuchungen des amerikanischen Aktienmarktes für verschiedene Risikotoleranzgrade $t = 3$ und 4 sowie Parameter $k = 5\%$ und 10% durchgeführt.

Bei der Simulation gemäss (3) werden offensichtlich Aktientiteln mit hohen absoluten historischen Renditen höhere Schätzfehler zugeordnet. Eine Aktie mit einer Rendite von bspw. 35% liefert bei einem k von 10% eine Renditeschätzung im Renditeintervall $0,35 \cdot (1+0,1z) \geq r_i \geq 0,35 \cdot (1-0,1z)$. Mithin ergibt sich eine Schätzung für die erwartete Rendite in der Bandbreite $[0,35 + 0,035z; 0,35 - 0,035z]$. Bei einer Aktie mit einer Rendite von 3% dagegen erhält man Schätzungen aus dem deutlich kleineren Schätzintervall $[0,03 + 0,003z; 0,03 - 0,003z]$,

muss also nur marginale Schätzfehler berücksichtigen.

Um den Einfluss dieser Annahme auf die Untersuchungen beurteilen zu können, sind hier die Simulationen alternativ über die Vorschrift

$$r_{P, \text{alternativ}}^i = \sum_{j=1}^n x_j (r_j + k_{\text{alternativ}} z_i) \quad (4)$$

abermals durchgeführt worden. Man ersetzt also bei (4) nun r_j durch $r_j + k_{\text{alternativ}} z_i$. Der $k_{\text{alternativ}}$ -Wert der "alternativen" Simulation ergibt sich aus der Division der höchsten beobachteten Rendite der Betrachtungsperiode (entspricht für 1991 ca. gleich 35%) mit 5% bzw. 10% (entspricht dem k -Wert der Vorschrift (3)) zu $k_{\text{alternativ}} \approx 3,5\%$ bzw. 7%. Diese Setzung führt bei der Aktie mit der höchsten Rendite von ca. 35% zur Verwendung der gleichen Fehlersimulation bei den beiden Simulationsversionen (3) und (4). Für alle anderen Aktien unterscheiden sich die Fehlersimulationen, wobei unter der Vorschrift (4) nun für alle Aktien gleiche Prognose(un)genauigkeiten unterstellt werden.

Das betrachtete Optimierungsproblem lässt sich aufgrund der quadratischen Zielfunktion bei linearen Nebenbedingungen als quadratisches Optimierungsproblem klassifizieren. Für diesen Fall existieren besonders leistungsfähige Lösungsverfahren mit erheblich geringerem Rechenaufwand als bei den Lösungsmethoden für allgemeine konvexe Optimierungsprobleme. Algorithmen, die an den Kuhn-Tucker-Bedingungen anknüpfen, konstruieren Lösungen über ein System linearer Gleichungen mit Nichtnegativitätsbedingungen und einigen einfachen nichtlinearen Bedingungen. Im folgenden wird das Verfahren von Lemke als spezielle Technik zur Lösung der Kuhn-Tucker-Bedingungen genutzt.[17]

Aus der Vielzahl der zur Verfügung stehenden Algorithmen zur Bestimmung normalverteilter Zufallsvariablen wird die Polar-Methode angewandt.[18] Mit diesem Verfahren erhält man pro Durchlauf zwei standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Man wählt dazu jeweils zwei unabhän-

gige gleichverteilte Zufallszahlen $v_1 = 2u_1 - 1$ und $v_2 = 2u_2 - 1$, wobei u_1 und u_2 unabhängig gleichverteilt aus $[0,1]$ sind. Mit $v_3 = v_1^2 + v_2^2$ sind $z_1 = v_1 \sqrt{-2 \ln v_3 / v_3}$ und $z_2 = v_2 \sqrt{-2 \ln v_3 / v_3}$ standardnormalverteilt für $v_3 \geq 1$. Die Zufallszahlen erhält man aus den in den angewandten Programmen vorhandenen Pseudozufallszahlengeneratoren. Die Generatoren zur Erzeugung von Zufallszahlen sind mit dem Kolmogorov-Smirnov-Test[19] überprüft worden.

3.2 Merkmale der Datenbasis und Berechnungsverfahren

Die der Untersuchung zugrundeliegenden Aktien müssen bestimmten Kriterien genügen. Zunächst wird hier im Gegensatz zu den vorgestellten Untersuchungen am amerikanischen Aktienmarkt keine Zufallsauswahl der Titel im Rahmen einer gewissen Grundgesamtheit durchgeführt, sondern es werden die im Deutschen Aktienindex DAX enthaltenen Aktientitel herangezogen. Die Datenerhebung bezieht sich auf den Zeitraum von 1974 bis einschliesslich 1995, so dass die Titel, für die erst nach 1974 Kurse vorhanden sind, aus der Untersuchung herausfallen. Des weiteren müssen bei jeder ausgewählten Aktie über 80% der Kurse in jedem Jahr Handelskurse gewesen sein. Aufgrund der angegebenen Restriktionen umfasst die Untersuchung somit die Titelauswahl des DAX per 1995 ohne Henkel und VIAG, mithin 28 Aktientitel. Der vorliegenden empirischen Untersuchung liegen tägliche Kursdaten zugrunde, die freundlicherweise von der Karlsruher Kapitalmarktdatenbank zur Verfügung gestellt wurden. Die Schätzung der Kovarianzmatrix erfolgt ex post aus täglichen logarithmierten Renditen. Die Schätzperiode umfasst ein Jahr, es liegt somit ein Stichprobenumfang von ca. 250 Tageskursen pro Jahr vor. Um die Auswahl des Jahres für die Durchführung der Sensitivitätsstudie begründen zu können, sind einige Besonderheiten bzw. Merkmale der vorhandenen Datenbasis zu beachten.

Pro Jahr liegen $(28^2 - 28)/2 = 378$ Korrelationen vor. Im Zeitraum 1974 bis 1995 waren unter der Gesamtzahl von 8316 Korrelationen lediglich 4 negative Korrelationen, zuletzt 1979, zu beobachten. In allen Fällen war die Lufthansa AG beteiligt. Die höchste zu beobachtende Korrelation tritt im Jahr 1987 zwischen Deutsche Bank AG und Dresdner Bank AG mit einem Korrelationskoeffizienten von 0,91 auf. Die Korrelationen steigen im Zeitablauf.[20] So liegen die durchschnittlichen Korrelationen in den Jahren 1974 bis 1985 bei rund 0,40, im Jahr 1986 schliesslich bei 0,49. In den Jahren 1987 bis 1990 liegen diese deutlich höher zwischen 0,59 und 0,65. Der durchschnittliche Korrelationskoeffizient für 1991 über alle Aktien bestimmt sich zu 0,68, der sich in den darauffolgenden Jahren leicht niedriger stabilisiert auf 0,52 (1992), 0,53 (1994) bzw. 0,49 (1995). Die Bandbreite der Korrelationen ist bei der vorliegenden Untersuchung somit deutlich breiter als bei CHOPRA/ZIEMBA (0,05 bis 0,65) oder auch als bei KALLBERG/ZIEMBA (-0,01 bis 0,45).

Aufgrund der Beziehung $\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$ sind bei den beobachteten Kovarianzen ähnliche Ergebnisse wie bei den Korrelationen zu erwarten. Zwischen 1974 und 1985 liegen die absoluten Kovarianzen zwischen -0,003 und 0,065, wobei teilweise das Maximum wie bspw. 1978 mit 0,016 sehr gering ist. Für 1986 ergibt sich eine Bandbreite von 0,019 bis 0,097, für das Jahr mit dem Oktober-Crash 1987 von 0,038 bis 0,163, für 1988 von 0,013 bis 0,060, für 1989 von 0,018 bis 0,14, für 1990 von 0,024 bis 0,090 und für 1991 schliesslich von 0,017 bis 0,087. Die durchschnittlichen Kovarianzen der Jahre 1992 bis 1995 liegen jeweils zwischen 0,01 und 0,03.

Die historischen Volatilitäten der 70er Jahre bestimmen sich extrem niedrig zu ca. 7,9% Standardabweichung p.a. Bis 1986 lagen nur wenige Varianzen über 0,09, d.h. oberhalb 30% Standardabweichung p.a. In 1987 und 1989 sind aufgrund der Aktienmarkt-Crashes mit bis zu 50% Standardabweichung p.a. relativ grosse Volatilitäten aufgetreten. Die über alle Aktien bestimmten durch-

schnittlichen Volatilitäten der Jahre 1990 bis 1995 liegen jeweils bei etwa 20%.

Anhand dieser Charakteristika soll nun die ausgewählte Schätzperiode begründet werden. Dabei werden solche Jahre von der Untersuchung ausgeschlossen, die aufgrund „aussergewöhnlicher“ Parameter verzerrte Ergebnisse liefern könnten. So legt die aufgezeigte Grössenentwicklung der Elemente der Kovarianzmatrix nahe, die Schätzperiode für die beabsichtigte empirische Untersuchung nicht aus den Jahren 1974 bis 1985 zu wählen, da dieser Zeitraum durch geringe Korrelationen und sehr niedrige Varianzen gekennzeichnet ist. Die Jahre 1987 und 1989 dagegen weisen überdurchschnittlich hohe Volatilitäten auf, so dass diese Jahre ebenfalls als ungeeignet auszuschliessen sind. Für 1990 schliesslich sind negative durchschnittliche Renditen bei allen Aktien aufgetreten. In den Jahren 1992, 1994 und 1995 liegen die maximalen Renditen unter 22% p.a., in 1993 waren aussergewöhnlich hohe Renditen zu beobachten.

Aufgrunddessen haben wir uns im folgenden auf die Schätzperiode 1991 für die weiteren Untersuchungen konzentriert. Von einer Ausdehnung auf andere bzw. weitere Perioden wird abgesehen, da daraus für die tendenziellen Ergebnisaussagen keine zusätzlichen Erkenntnisse zu erwarten sind.

Die Parameterwerte der Aktientitel der Schätzperiode 1991 werden nun noch detaillierter analysiert. So sind in der Tabelle 1 die Aktienkorrelationen für 1991 angegeben. Die Zusammensetzung des optimalen Portefeuilles ist für die drei vorgestellten Optimierungsprobleme (2) mit Nebenbedingung (2a), mit Nebenbedingungen (2a) und (2b) sowie schliesslich mit Nebenbedingungen (2a), (2b) und (2c) der Tabelle 2 bei der Parameterspezifikation $t = 4$ und der Tabelle 3 für $t = 4$ zu entnehmen. In der Abbildung 1 sind die Rendite-Risiko-Verhältnisse der DAX-Titel für die Schätzperiode 1991 abgetragen. Die Abbildung 2 enthält die effizienten Linien zum einen für den ausschliesslichen Fall der Budgetrestriktion und schliesslich für den Fall des Verbotes von Leerverkäufen wie auch der 20%-Anlagebeschränkung in einzelne Titel. Die Berechnung der effizi-

Tabelle 1: Korrelationsmatrix für die Schätzperiode 1991

	DAX	ALV	BAS	BAY	BHW	BMW	BVM	CBK	CON	DAI	DBC	DBK	DGS	DRB	HFA	KAR	KFH	LHA	LIN	MAN	MET	MMW	PRS	RWE	SCH	SIE	THY	VEB	VOW
DAX	1.00	0.78	0.75	0.79	0.76	0.75	0.77	0.81	0.45	0.80	0.66	0.85	0.62	0.82	0.75	0.72	0.69	0.65	0.74	0.73	0.74	0.75	0.72	0.82	0.62	0.85	0.72	0.80	0.83
ALV	0.78	1.00	0.76	0.73	0.78	0.75	0.73	0.80	0.39	0.77	0.61	0.61	0.84	0.82	0.73	0.71	0.69	0.71	0.64	0.70	0.73	0.73	0.67	0.77	0.68	0.83	0.70	0.80	0.79
BAS	0.75	0.76	1.00	0.88	0.74	0.70	0.68	0.74	0.38	0.76	0.60	0.78	0.65	0.75	0.88	0.69	0.62	0.55	0.67	0.66	0.64	0.69	0.64	0.73	0.64	0.79	0.70	0.75	0.78
BAY	0.79	0.73	0.88	1.00	0.73	0.72	0.70	0.77	0.38	0.75	0.66	0.78	0.61	0.76	0.86	0.69	0.60	0.58	0.68	0.71	0.66	0.72	0.64	0.75	0.63	0.79	0.70	0.75	0.79
BHW	0.76	0.78	0.74	0.73	1.00	0.71	0.86	0.82	0.36	0.71	0.58	0.83	0.57	0.80	0.72	0.69	0.62	0.54	0.66	0.72	0.66	0.70	0.64	0.75	0.59	0.77	0.67	0.75	0.76
BMW	0.75	0.75	0.70	0.72	0.71	1.00	0.71	0.78	0.35	0.78	0.66	0.78	0.63	0.77	0.70	0.71	0.62	0.66	0.70	0.68	0.65	0.70	0.67	0.71	0.66	0.76	0.69	0.71	0.80
BVM	0.77	0.73	0.68	0.70	0.86	0.71	1.00	0.81	0.34	0.72	0.61	0.84	0.56	0.80	0.66	0.71	0.65	0.57	0.67	0.69	0.64	0.71	0.64	0.75	0.63	0.78	0.70	0.74	0.76
CBK	0.81	0.80	0.74	0.77	0.82	0.78	1.00	1.00	0.41	0.76	0.69	0.91	0.59	0.88	0.76	0.74	0.71	0.69	0.73	0.73	0.71	0.80	0.69	0.81	0.68	0.85	0.74	0.83	0.83
CON	0.45	0.39	0.38	0.38	0.36	0.35	0.34	0.41	1.00	0.38	0.40	0.43	0.37	0.43	0.36	0.37	0.41	0.38	0.44	0.36	0.39	0.37	0.35	0.38	0.30	0.43	0.35	0.40	0.41
DAI	0.80	0.77	0.76	0.75	0.71	0.78	0.72	0.76	0.38	1.00	0.59	0.83	0.63	0.79	0.73	0.71	0.68	0.63	0.72	0.70	0.71	0.75	0.68	0.74	0.67	0.85	0.77	0.76	0.87
DBC	0.66	0.61	0.60	0.66	0.58	0.66	0.61	0.69	0.40	0.59	1.00	0.70	0.55	0.68	0.64	0.65	0.58	0.62	0.66	0.70	0.56	0.66	0.61	0.66	0.55	0.69	0.61	0.67	0.66
DBK	0.88	0.61	0.78	0.78	0.85	0.78	0.84	0.84	0.43	0.85	0.70	1.00	0.64	0.91	0.78	0.78	0.75	0.70	0.77	0.76	0.73	0.81	0.73	0.84	0.70	0.91	0.79	0.87	0.87
DGS	0.62	0.64	0.65	0.61	0.57	0.63	0.56	0.59	0.37	0.63	0.55	0.64	1.00	0.63	0.61	0.62	0.55	0.54	0.58	0.58	0.54	0.57	0.58	0.59	0.58	0.67	0.58	0.56	0.65
DRB	0.82	0.83	0.75	0.76	0.80	0.77	0.80	0.85	0.43	0.79	0.68	0.88	0.63	1.00	0.75	0.74	0.68	0.68	0.77	0.72	0.73	0.77	0.73	0.81	0.66	0.86	0.75	0.80	0.83
HFA	0.75	0.73	0.88	0.86	0.72	0.79	0.66	0.76	0.36	0.75	0.64	0.78	0.61	0.75	1.00	0.68	0.61	0.55	0.72	0.71	0.61	0.71	0.67	0.73	0.62	0.79	0.68	0.76	0.76
KAR	0.72	0.71	0.69	0.69	0.69	0.71	0.71	0.74	0.37	0.71	0.65	0.78	0.62	0.74	0.68	1.00	0.71	0.61	0.70	0.68	0.64	0.69	0.61	0.70	0.60	0.75	0.66	0.70	0.76
KFH	0.69	0.69	0.62	0.60	0.62	0.62	0.65	0.71	0.41	0.68	0.58	0.75	0.55	0.68	0.61	0.71	1.00	0.58	0.68	0.64	0.65	0.66	0.60	0.70	0.53	0.72	0.68	0.70	0.72
LHA	0.65	0.71	0.55	0.58	0.54	0.66	0.57	0.69	0.38	0.63	0.62	0.70	0.54	0.68	0.55	0.61	0.58	1.00	0.65	0.68	0.66	0.64	0.59	0.64	0.56	0.68	0.61	0.66	0.68
LIN	0.74	0.64	0.67	0.68	0.66	0.70	0.67	0.73	0.44	0.72	0.66	0.77	0.58	0.77	0.72	0.74	0.68	0.65	1.00	0.78	0.69	0.74	0.69	0.71	0.60	0.78	0.65	0.71	0.78
MAN	0.73	0.70	0.66	0.71	0.72	0.68	0.69	0.73	0.36	0.70	0.70	0.76	0.58	0.72	0.71	0.68	0.64	0.68	0.78	1.00	0.64	0.76	0.67	0.74	0.58	0.74	0.68	0.71	0.75
MET	0.74	0.73	0.64	0.66	0.66	0.65	0.64	0.71	0.39	0.71	0.56	0.73	0.54	0.73	0.61	0.64	0.65	0.66	0.69	0.64	1.00	0.66	0.59	0.69	0.56	0.74	0.64	0.69	0.73
MMW	0.75	0.73	0.69	0.72	0.70	0.70	0.71	0.80	0.37	0.75	0.66	0.88	0.57	0.77	0.71	0.69	0.66	0.64	0.76	0.76	0.66	1.00	0.67	0.74	0.62	0.81	0.81	0.74	0.80
PRS	0.72	0.68	0.64	0.64	0.64	0.67	0.64	0.69	0.35	0.68	0.61	0.73	0.58	0.73	0.67	0.61	0.60	0.59	0.69	0.67	0.59	0.67	1.00	0.71	0.58	0.75	0.68	0.69	0.69
RWE	0.82	0.77	0.73	0.75	0.75	0.71	0.75	0.81	0.38	0.74	0.66	0.88	0.59	0.81	0.73	0.70	0.70	0.64	0.71	0.74	0.69	0.74	0.77	1.00	0.62	0.82	0.73	0.84	0.79
SCH	0.62	0.68	0.64	0.63	0.59	0.66	0.63	0.68	0.30	0.67	0.55	0.70	0.58	0.66	0.62	0.60	0.53	0.56	0.60	0.58	0.56	0.62	0.58	0.62	1.00	0.69	0.62	0.61	0.69
SIE	0.85	0.83	0.79	0.79	0.77	0.76	0.78	0.85	0.43	0.85	0.69	0.87	0.67	0.86	0.79	0.75	0.72	0.68	0.76	0.74	0.74	0.81	0.75	0.85	0.69	1.00	0.78	0.86	0.87
THY	0.72	0.70	0.70	0.70	0.67	0.69	0.70	0.74	0.35	0.77	0.61	0.79	0.58	0.75	0.68	0.66	0.68	0.61	0.65	0.68	0.64	0.71	0.68	0.73	0.62	0.78	1.00	0.70	0.79
VEB	0.80	0.80	0.75	0.75	0.75	0.71	0.74	0.83	0.40	0.76	0.67	0.88	0.56	0.80	0.76	0.70	0.70	0.66	0.71	0.71	0.69	0.74	0.69	0.85	0.61	0.86	0.78	1.00	0.79
VOW	0.83	0.79	0.78	0.79	0.76	0.80	0.76	0.88	0.41	0.87	0.66	0.87	0.65	0.83	0.76	0.76	0.74	0.68	0.75	0.75	0.73	0.81	0.69	0.77	0.69	0.87	0.80	0.87	1.00

ALV = Allianz, BAS = BASF, BAY = Bayer, BHW = Bayer. Hypoth. u. Wechselbank, BMW = Bayer. Motorenwerke, BVM = Bayer. Vereinsbank, CBK = Commerzbank, CON = Continental, DAI = Daimler-Benz, DBC = Deutsche Babcock, DBK = Deutsche Bank, DGS = Degussa, DRB = Dresdner Bank, HFA = Hoechst, KAR = Karstadt, KFA = Kaufhof, LHA = Lufthansa, LIN = Linde, MAN, MET = Metallgesellschaft, MMW = Mannesmann, PRS = Preussag, RWE, SCH = Schering, SIE = Siemens, THY = Thyssen, VEB = VEBA, VOW = Volkswagen.

Abbildung 1: Rendite/Risiko-Verhältnis der DAX-Titel

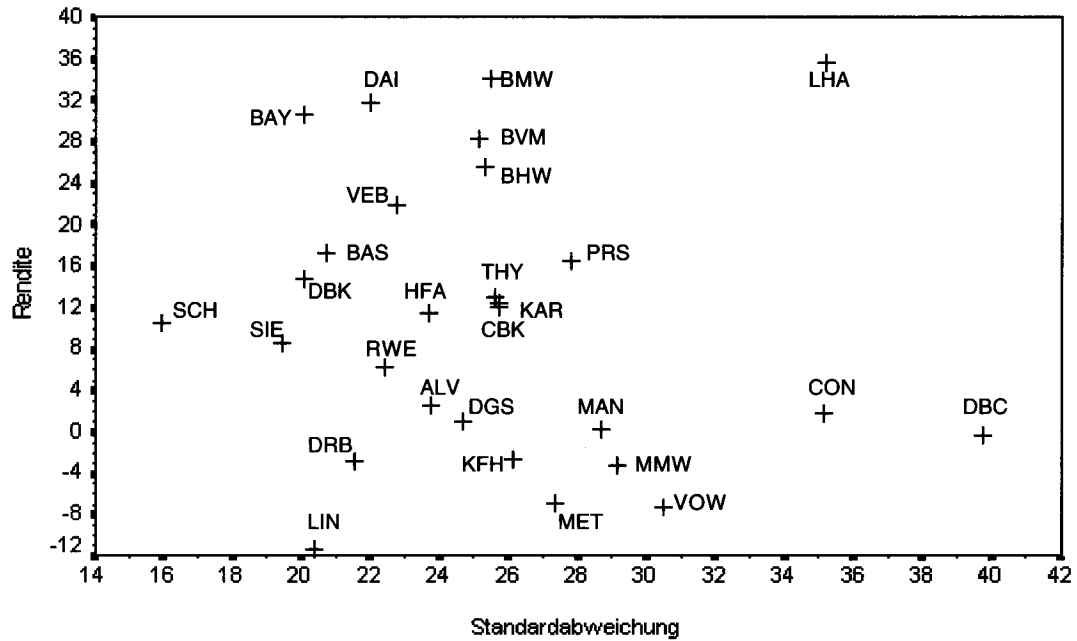
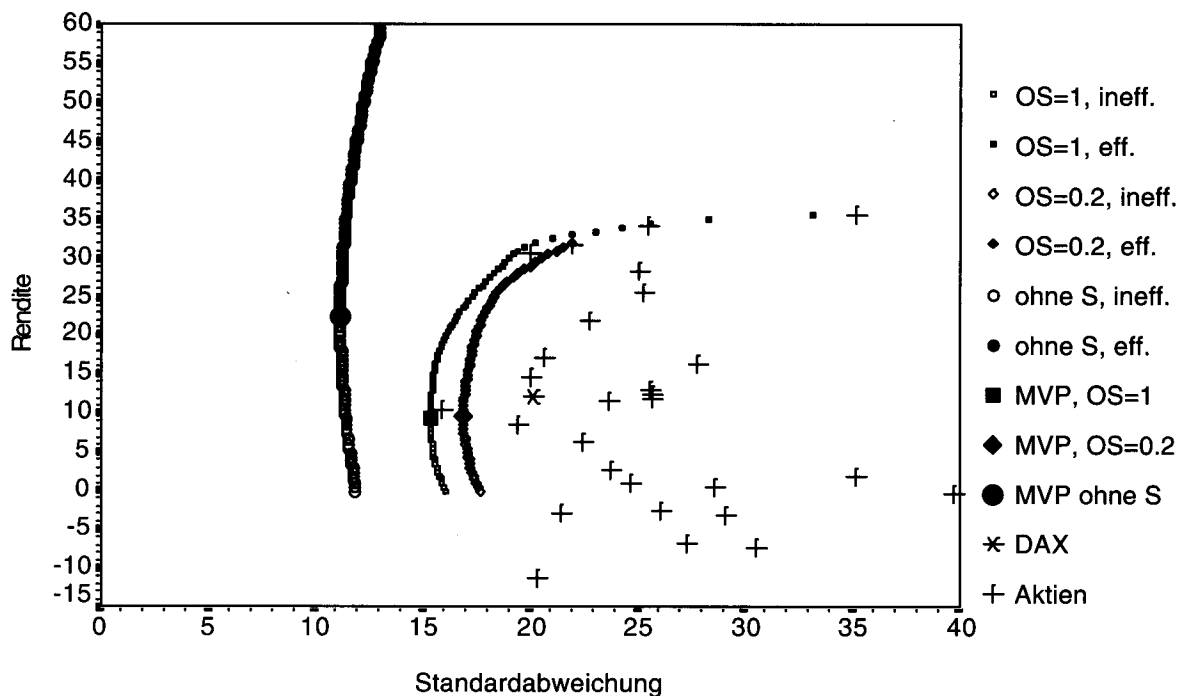


Abbildung 2: Effiziente Linien bei unterschiedlichen Anteilsbeschränkungen



OS = Anlageobergrenze in einzelne Aktie, MVP = Minimum-Varianz-Portefeuille.

enten Linien erfolgt nach dem Optimierungsproblem (1). Die effiziente Linie ohne Restriktionen verläuft erheblich weiter links als die effiziente Linie bei Leerverkaufs- wie auch oberen Beschränkungen. Bei Verbot von Leerverkäufen ist die höchste erreichbare Portefeullerendite gleich der höchsten Rendite eines einzelnen Aktientitels.

3.3 Einfluss von Veränderungen der erwarteten Rendite auf das Optimierungsergebnis

Die Tabelle 2 enthält die Ergebnisse der Simulationsrechnungen für den Parameter $t = 4$. In den ersten drei Spalten sind die DAX-Aktien mit ihren jeweiligen Renditen und Standardabweichungen angegeben, anschliessend sind die Lösungen der Optimierungsprobleme (2) über die optimalen Aktienanteile abgetragen. Die Aktienanteile im Optimum bei ausschliesslicher Setzung der Budgetrestriktion (2a) lassen sich unter Zuhilfenahme der Korrelationsmatrix in der Tabelle 1 weiter interpretieren. So ist zu beobachten, dass bei entsprechender Konstellation der Rendite/Risiko-Parameter hohe Korrelationskoeffizienten zu entgegengesetzten Kauf- bzw. Verkaufspositionen führen (DBK/CBK, DBK/DRB, DAI/VOW etc.). Die bereits zu Beginn der Arbeit getroffenen Aussagen über die Tendenz der MV-Optimierung zur Übergewichtung von ertragsstarken Aktien geringer Korrelation und geringer Renditevariabilität und zur Untergewichtung von ertragsschwachen Aktien mit hoher Korrelation und hoher Renditevariabilität lässt sich auch anhand des vorliegenden Datenmaterials beobachten.

Das Verbot von Leerverkäufen (Nebenbedingungen (2a) und (2b)) führt im Optimum zu einer deutlichen Konzentration auf wenige Aktien, bspw. wird das optimale Portefeulle für den betrachteten Zeitraum dann nahezu ausschliesslich von Schering und Bayer bestimmt. Können dagegen in jede einzelne Aktie höchstens 20 Prozent des Aktienportefeullegesamtwertes investiert werden, so führt dies natürlich zu einer stärkeren

Diversifikation (Setzung der Nebenbedingungen (2a), (2b) und (2c)).

Die Portefeullegewichte für die simulierten optimalen Portefeulles werden für die vier Parameterkonstellationen ($k = 5\%$, $x_i \leq 1$), ($k = 10\%$, $x_i \leq 1$) ($k = 5\%$, $x_i \leq 0,2$) ($k = 10\%$, $x_i \leq 0,2$) bestimmt, wobei in einer Dreiteilung jeweils die unter den 200 Simulationen maximalen, minimalen und schliesslich durchschnittlichen Portefeulleanteile aufgelistet sind. Die Zusammensetzung des optimalen Portefeulles reagiert dabei sensitiv auf (die zufälligen) Veränderungen der Aktienrenditen. So schwankt beispielsweise der Anteil von Daimler im optimalen Portefeulle bei Verbot von Leerverkäufen zwischen 0,105 und 0,000 ($k = 5\%$) bzw. zwischen 0,163 und 0,000 ($k = 10\%$). Diese starke Abweichung verschwindet erst bei Setzung der stärkeren Anteilsbeschränkung $x_i \leq 0,2$. (Siehe auch grau unterlegte Zellen der Tabelle 2). Für Siemens dagegen ist eine solche starke Divergenz im optimalen Portefeulle ausschliesslich im Falle von $x_i \leq 0,2$ zu beobachten.

Es kann also festgehalten werden, dass Aktien bei bereits geringen Veränderungen in den einzelnen Aktienrenditen gänzlich aus dem optimalen Portefeulle verschwinden bzw. mit deutlichem Anteil in das Portefeulle aufgenommen werden können. Die Zusammensetzung der optimalen Portefeulles in Abhängigkeit von unterschiedlichen Portefeullerenditen, d.h. der varianzminimalen Portefeulles bei gegebener Portefeullerendite wird in den beiden Abbildungen 3 bzw. 4 für den ausschliesslichen Fall von Leerverkaufsbeschränkungen bzw. die zusätzliche Restriktion in Form der oberen Budgetschränke dargestellt.

Die Auswirkungen von Schätzfehlern auf Rendite und Standardabweichung des Portefeulles sind dagegen eher gering. Die sich im Durchschnitt einstellenden Momente entsprechen nahezu den Grössen im Fall ohne Schätzfehler. Interessanter ist die Betrachtung der sich maximal wie auch minimal einstellenden Werte. Hier kann die Vermutung, dass die Setzung weiterer Anteilsbeschränkungen zu einer Reduktion von Schätz-

Tabelle 2: Optimale Portfeuillelegewichte bei Variation der erwarteten Renditen mit $t = 4$

Aktie	Rendite	Std.-abw.	Optimale Portfeuillelegewichte mit Nebenbedingungen			Portfeuillelegewichte ($k = 5\%$, $0 \leq \text{Anteile} \leq 1$)			Portfeuillelegewichte ($k = 10\%$, $0 \leq \text{Anteile} \leq 1$)			Portfeuillelegewichte ($k = 5\%$, $0 \leq \text{Anteile} \leq 0,2$)			Portfeuillelegewichte ($k = 10\%$, $0 \leq \text{Anteile} \leq 0,2$)		
			$\Sigma x_i = 1$ (=2a)	$0 \leq x_i \leq 1$ (=2a,b)	$0 \leq x_i \leq 0,2$ (=2a,b,c)	maximal	minimal	Durchschnitt	maximal	minimal	Durchschnitt	maximal	minimal	Durchschnitt	maximal	minimal	Durchschnitt
ALV	2,66	23,75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
BAS	17,33	20,70	0	0,170	0	0	0	0	0	0	0	0,128	0,169	0,200	0,083	0,166	
BAY	30,55	20,07	0,774	0,328	0,200	0,375	0,273	0,327	0,424	0,217	0,325	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	
BHW	25,68	25,32	0,207	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,033	0,000	
BVM	28,23	25,14	0,065	0	0	0	0	0	0	0	0	0,038	0,000	0,004	0,084	0,010	
BMW	34,19	25,49	0,204	0	0	0	0	0	0	0	0	0,033	0,000	0,002	0,077	0,008	
CBK	11,99	25,74	-0,131	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
CON	1,87	35,17	0,025	0,011	0,039	0,016	0,007	0,012	0,021	0,002	0,012	0,041	0,036	0,039	0,043	0,039	
DAI	31,72	21,99	0,646	0,048	0,200	0,105	0,000	0,047	0,163	0,000	0,048	0,200	0,200	0,200	0,119	0,197	
DGS	1,07	24,65	-0,064	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
DBC	-0,36	39,78	-0,121	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
DBK	14,69	20,06	0,535	0	0,156	0	0	0	0	0	0	0,200	0,023	0,144	0,200	0,122	
DRB	-2,89	21,51	-0,421	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
HFA	11,49	23,69	-0,276	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
KAR	12,40	25,71	0,028	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
KFH	-2,55	26,12	0,009	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
LIN	-11,29	20,35	0,146	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
LHA	35,67	35,24	0,159	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,009	0,000	
MAN	0,37	28,68	-0,123	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
MMW	-3,22	29,18	-0,135	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
MET	-6,82	27,36	-0,166	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
PRS	16,50	27,85	0,001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
RWE	6,29	22,44	-0,065	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
SCH	10,55	15,93	0,377	0,613	0,200	0,646	0,578	0,614	0,688	0,544	0,615	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	
SIE	8,63	19,46	0,144	0	0,023	0	0	0	0	0	0	0,118	0,000	0,027	0,176	0,035	
THY	12,98	25,63	0,077	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
VEB	21,85	22,78	0,208	0	0,012	0	0	0	0,006	0,000	0,000	0,063	0	0,016	0,114	0,023	
VOW	-7,30	30,52	-0,845	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Portfeuille Rendite			84,388	18,020	20,336	18,538	17,068	17,986	19,722	16,258	17,970	21,118	19,948	20,431	21,891	19,206	
Portfeuille Std.abw.			15,783	15,815	17,543	15,884	15,706	15,814	16,065	15,631	15,822	17,644	17,503	17,558	17,766	17,450	

Abbildung 3: Portfeuillekonstruktion im Optimum bei unterschiedlichen Renditen mit $x_i \leq 1$

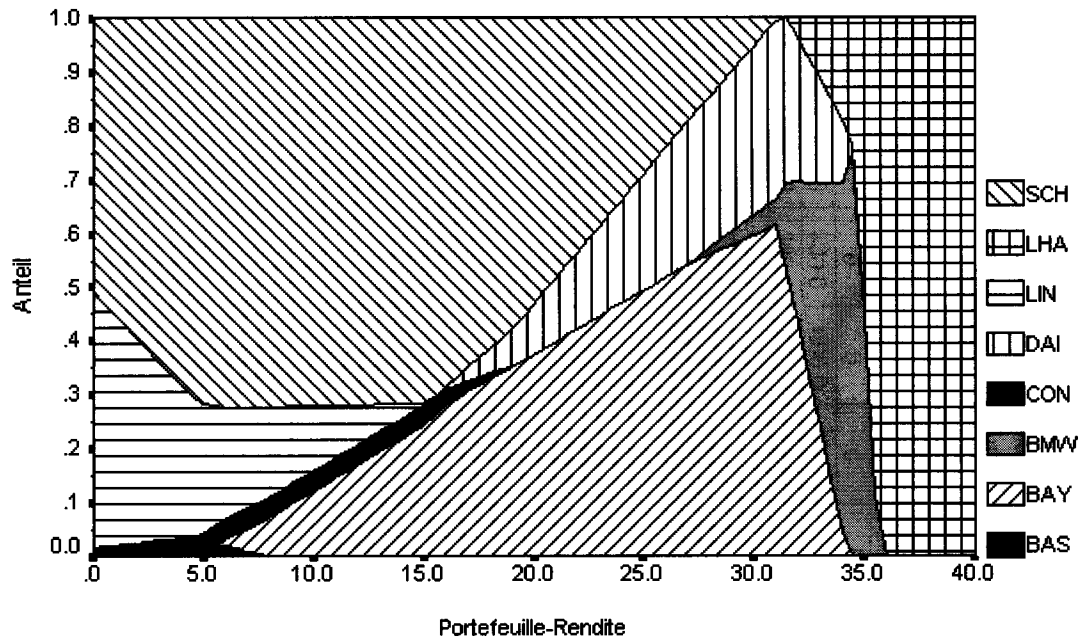


Abbildung 4: Portfeuillekonstruktion im Optimum bei unterschiedlichen Renditen mit $x_i \leq 0,2$

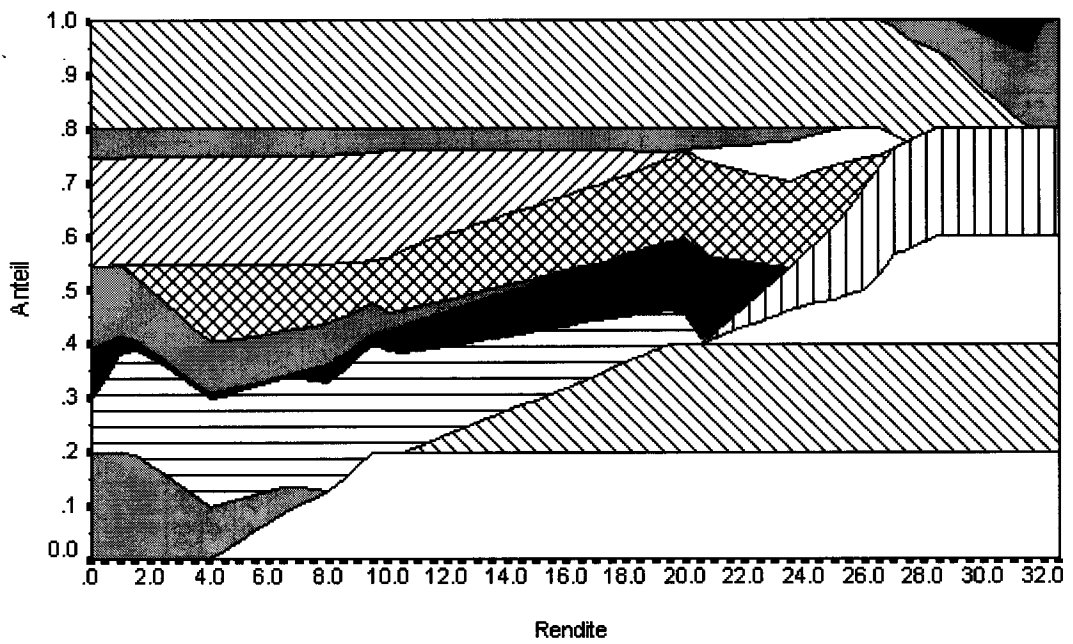
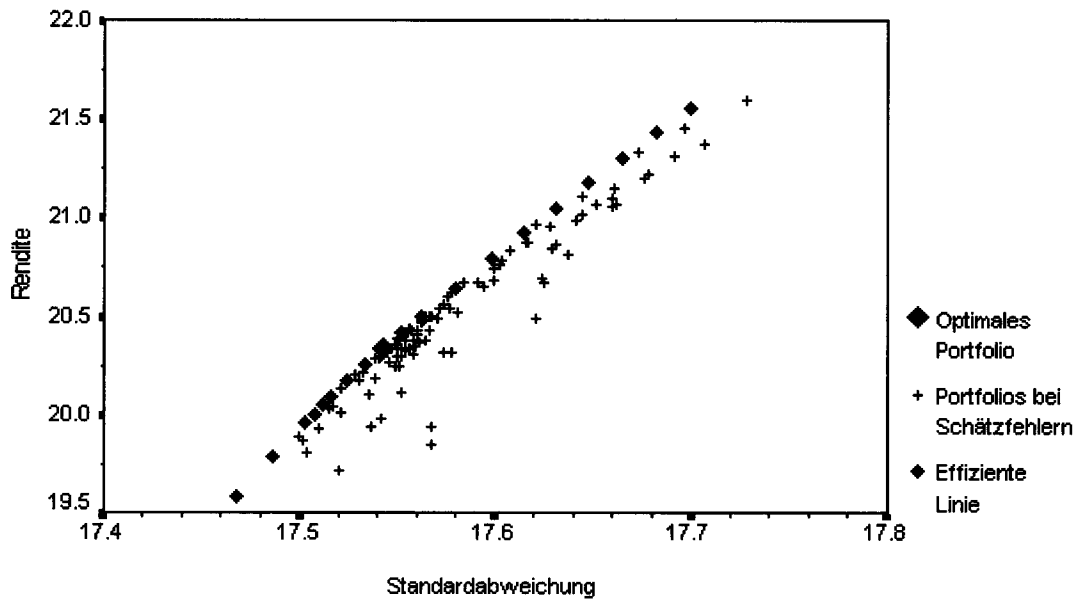
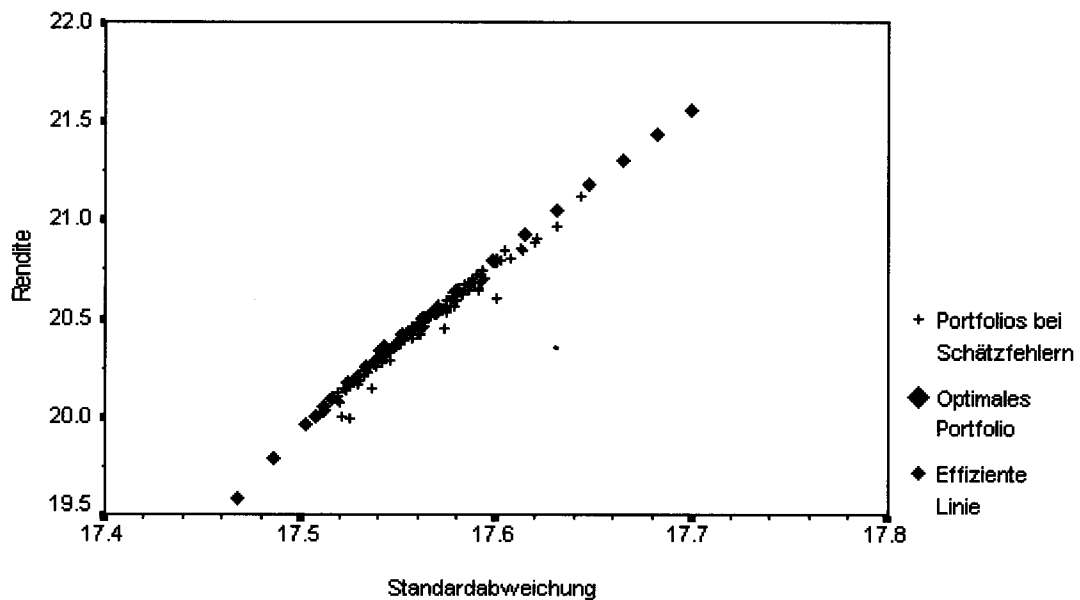


Abbildung 5: Simulierte Portefeuilles in Gegenüberstellung zur „wahren“ effizienten Linie; $k = 10\%$



OS = 0.2, US = 0, $t = 4$, $k = 10\%$

Abbildung 6: Simulierte Portefeuilles in Gegenüberstellung zur „wahren“ effizienten Linie; $k = 5\%$



OS = 0.2, US = 0, $t = 4$, $k = 5\%$

OS = 0.2 und US = 0 stehen für: $0 \leq \text{Aktienanteil} \leq 0.2$.

Tabelle 3: Optimale Portfeuillelegewichte bei Variation der erwarteten Renditen mit $t = 3$ für die Simulation gemäß Formel (3) mit $k = 10\%$ im Vergleich zur Simulation (4) für $k_{\text{alternativ}} = 7\%$

Aktie	Rendite	Std.-abw.	Optimale Portfeuillelegewichte mit Nebenbedingungen		Portfeuillelegewichte ($k = 10\%$, $0 \leq \text{Anteile} \leq 1$)			Portfeuillelegewichte ($k_{\text{alternativ}} = 7\%$, $0 \leq \text{Anteile} \leq 1$)			Portfeuillelegewichte ($k_{\text{alternativ}} = 7\%$, $0 \leq \text{Anteile} \leq 0,2$)				
			$\Sigma x_i = 1$ ($=2a$)	$0 \leq x_i \leq 1$ ($=2a, b, c$)	maximal	minimal	Durchschnitt	maximal	minimal	Durchschnitt	maximal	minimal	Durchschnitt	maximal	minimal
ALV	2,66	23,75	-0,228	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
BAS	17,33	20,70	0,023	0	0,150	0	0	0,200	0,089	0,153	0,261	0,000	0,010	0,200	0,134
BAY	30,55	20,07	0,661	0,298	0,200	0,361	0,215	0,294	0,200	0,200	0,475	0,000	0,266	0,200	0,200
BHW	25,68	25,32	0,166	0	0	0	0	0	0	0	0,073	0,000	0,001	0,091	0,002
BVM	28,23	25,14	0,031	0	0	0	0	0	0,026	0,000	0,038	0,000	0,000	0,121	0,007
BMW	34,19	25,49	0,163	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,103	0,004
CBK	11,99	25,74	-0,141	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CON	1,87	35,17	0,024	0,023	0,042	0,030	0,016	0,023	0,045	0,038	0,052	0,000	0,020	0,070	0,038
DAI	31,72	21,99	0,511	0,018	0,183	0,105	0,000	0,022	0,200	0,081	0,207	0,000	0,029	0,200	0,143
DGS	1,07	24,65	-0,044	0	0	0	0	0	0,004	0	0,000	0	0	0,152	0,012
DBC	-0,36	39,78	-0,118	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
DBK	14,69	20,06	0,480	0	0,121	0	0	0	0,200	0,040	0,175	0,000	0,006	0,200	0,084
DRB	-2,89	21,51	-0,300	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,067	0,000
HFA	11,49	23,69	-0,253	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
KAR	12,40	25,71	0,019	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
KFH	-2,55	26,12	0,021	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
LIN	-11,29	20,35	0,195	0	0,029	0	0	0	0,071	0,000	0,064	0,000	0,001	0,200	0,046
LHA	35,67	35,24	0,111	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
MAN	0,37	28,68	-0,099	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
MMW	-3,22	29,18	-0,119	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
MET	-6,82	27,36	-0,133	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
PRS	16,50	27,85	-0,020	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
RWE	6,29	22,44	-0,029	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
SCH	10,55	15,93	0,413	0,660	0,200	0,717	0,610	0,661	0,200	0,200	0,811	0,511	0,653	0,200	0,200
SIE	8,63	19,46	0,184	0	0,075	0	0	0	0,200	0,000	0,187	0,000	0,007	0,200	0,098
THY	12,98	25,63	0,072	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
VEB	21,85	22,78	0,165	0	0	0	0	0	0,047	0,000	0,093	0,000	0,007	0,200	0,026
VOW	-7,30	30,52	-0,753	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Portfeuille Rendite			68,895	16,707	18,817	17,983	15,387	16,705	20,118	16,545	20,466	11,647	16,464	22,019	17,739
Portfeuille Std.abw.			13,959	15,669	17,400	15,811	15,568	15,675	17,520	17,238	16,197	15,484	15,733	17,834	17,402

Tabelle 4: Abweichungen in den Renditen

t	k	Optimierungsproblem mit Nebenbedingung	ABS _μ im Mittel	ABS _μ maximal	ABS _μ minimal	REL _μ im Mittel	REL _μ maximal	REL _μ minimal
3	0,05	(2a) und (2b)	0,1631	0,6061	0,0003	0,098	0,0362	0,0000
3	0,10	(2a) und (2b)	0,3318	1,3196	0,0033	0,0202	0,0790	0,0002
3	0,10	(2a), (2b) und (2c)	0,5783	2,2717	0,0013	0,0307	0,1207	0,0000
4	0,05	(2a) und (2b)	0,2305	0,9522	0,0002	0,0128	0,0528	0,0000
4	0,05	(2a), (2b) und (2c)	0,1834	0,7820	0,0009	0,0090	0,0385	0,0000
4	0,10	(2a) und (2b)	0,4517	1,7620	0,0007	0,0251	0,0978	0,0000
4	0,10	(2a), (2b) und (2c)	0,3798	1,5548	0,0004	0,0187	0,0765	0,0000

ABS = absolute Abweichung, REL = relative Abweichung.

Tabelle 5: Abweichungen in den Zielfunktionswerten

t	k	Optimierungsproblem mit Nebenbedingung	ABS _Z im Mittel	ABS _Z maximal	ABS _Z minimal	REL _Z im Mittel	REL _Z maximal	REL _Z minimal
3	0,05	(2a) und (2b)	0,0169	0,1303	0,0000	0,0002	0,0020	0,0000
3	0,10	(2a) und (2b)	0,0653	0,5305	0,0002	0,0010	0,0081	0,0000
3	0,10	(2a), (2b) und (2c)	0,1099	0,4891	0,0003	0,0013	0,0060	0,0000
4	0,05	(2a) und (2b)	0,0265	0,1754	0,0002	0,0006	0,0039	0,0000
4	0,05	(2a), (2b) und (2c)	0,0369	0,2367	0,0028	0,0007	0,0042	0,0000
4	0,10	(2a) und (2b)	0,1027	0,7089	0,0000	0,0023	0,0159	0,0000
4	0,10	(2a), (2b) und (2c)	0,1483	0,7007	0,0053	0,0026	0,0124	0,0000

ABS = absolute Abweichung, REL = relative Abweichung

risiken führt, bestätigt werden. Nimmt man als Mass für eine solche Reduktion die Spanne zwischen maximaler und minimaler Rendite (wie auch Standardabweichung), so nimmt diese Differenz im Übergang von den Fällen $x_i \leq 1$ zu $x_i \leq 0,2$ ab. Die Grösse potentieller Schätzfehler, symbolisiert durch $k = 5\%$ bzw. 10% fällt dabei im Falle des ausschliesslichen Verbots von Leerverkäufen noch deutlich ins Gewicht, verliert aber bei der schärferen Bedingung $x_i \leq 0,2$ an Wirkung. Der Einfluss der Grösse k wird hier durch die Abbildungen 5 und 6 verdeutlicht, in denen der „wahren“ effizien-

ten Linie simulierte optimale Portefeuilles mit Schätzfehlern gegenübergestellt werden.

Die Ergebnisse der Rechnungen für $t = 3$ aus der Tabelle 3 ähneln in der Tendenz stark denen für $t = 4$ der Tabelle 2. In der Tabelle 3 werden zusätzlich die beiden Fehlersimulationen gemäss der Ausdrücke (3) und (4) gegenübergestellt. Hier ist an den Zahlen deutlich zu erkennen, dass bei gleichbleibender Schätzgenauigkeit, d.h. bei Anwendung der Simulation (4) die maximalen und minimalen Fehler extremere Werte annehmen (Siehe beispielhaft Schering und Bayer in den grau

unterlegten Zellen der Tabelle 3). Gleichzeitig bleiben aber auch hier die grundsätzlichen Aussagen erhalten. Die durchschnittlichen Grössen wiederum liegen bei beiden Simulationsansätzen auf einem ähnlichen Niveau.

Die diskutierten Ergebnisse werden in den Tabellen 4 und 5 zusammengefasst, die die absoluten Abweichungen $ABS_{\mu} = |\mu_{P_{opt}} - \mu|$ und

relativen Abweichungen $REL_{\mu} = \frac{|\mu_{P_{opt}} - \mu|}{\mu_{P_{opt}}}$ in

den Renditen bzw. den analogen Grössen

$ABS_Z = |Z(X_{opt}) - Z(X)|$ und $REL_Z = \frac{|Z(X_{opt}) - Z(X)|}{Z(X_{opt})}$

in der Zielfunktion des Optimierungsproblems (2) enthalten.[21] Über die Anzahl der Simulationen werden auch hier wiederum gemittelte Abweichungswerte bzw. maximale und minimale Werte berechnet.

In den beiden Tabellen tritt die Wirkung verstärkter Schätzgenauigkeiten ($k = 5\%$ bzw. 10%) deutlich hervor, wobei die Auswirkungen bei dem erreichten Zielfunktionswert relativ gesehen grösser sind. Die Abweichungen in den Portfeuillerenditen (Tabelle 4) sind im Maximum sehr hoch, was die Renditesensitivität der MV-Optimierung unterstreicht. Die Setzung weitergehender Anteilsbeschränkungen schränkt zwar den Einfluss des Schätzrisikos generell ein (siehe Tabellen 2 und 3), die Masse für die Abweichungen reduzieren sich aber nur bei Setzung von $t = 4$. Bzgl. der Zielfunktionswerte wie auch bei geringerer Risikotoleranz greift diese Reduktion zumindest im Mittel nicht. Die Abweichungen in den Zielfunktionswerten steigen mit zunehmender Risikotoleranz ($t = 3$ bzw. 4) an, die Tendenz in den Renditeabweichungen ist nicht eindeutig.

4. Zusammenfassung

Die vorliegende simulationsgestützte Sensitivitätsanalyse der MV-Optimierung hinsichtlich der Aktienrenditen arbeitet mit empirischem Datenmate-

rial ausgewählter DAX-Aktien. Die Spezifikation auf Renditeschätzrisiken wird durch die existierende Literatur begründet, die die Bedeutung der Schätzrisiken in der MV-Optimierung eindeutig bei der Bestimmung des ersten Verteilungsmoments sieht.

Als Ergebnisse lassen sich ableiten, dass die Anwendung der Portfolio Selection auf die DAX-Titel für den betrachteten Zeitraum 1991 ebenfalls einer starken Renditesensitivität unterliegt. Dabei reagiert insbesondere die Zusammensetzung des optimalen Portefeuilles sehr stark auf Veränderungen der Aktienrenditen, womit die Ergebnisse von BEST/GRAUER (1991) bestätigt werden können. Gleichzeitig ist aber der Einfluss entsprechender Veränderungen auf Rendite wie auch Standardabweichung des simulierten optimalen Portefeuilles zu relativieren, da hier im Mittel lediglich relativ geringe Abweichungen gegenüber dem „wahren“ optimalen Portefeuille festgestellt werden können. Die strengere Setzung von Anteilsbegrenzungen zeigt auch bei den DAX-Aktien Effekte einer Reduktion von Schätzrisiken.

Die vorliegende Arbeit bestätigt den Grossteil der Ergebnisse amerikanischer Untersuchungen auch für den deutschen Aktienmarkt. Für die Praxis des Portfolio Management lässt sich daraus schliessen, dass die Schätzrisiken der MV-Optimierung bezüglich der Zusammensetzung des optimalen Portefeuilles erheblich sind. Gleichzeitig wird dadurch die Anwendbarkeit der MV-Optimierung aber nicht entscheidend in Frage gestellt, da die Auswirkungen der Schätzfehler auf die letztlich interessierenden Parameter Portfolio-Rendite und -Standardabweichung nur gering sind und im Mittel nahezu verschwinden. Beachtet man insbesondere die in der Praxis häufig gesetzten Anlage-restriktionen wie bspw. maximal zulässige Branchen- bzw. Einzeltitelgewichtungen, so verliert das Schätzproblem im Rahmen der Anwendung der Markowitz-Optimierung weiter an Gewicht.

Anhang

Spezifikation des Risikotoleranzparameters

Die Klasse der zweiparametrischen HARA- (hyperbolic absolute risk aversion) Risikonutzenfunktionen mit einer Risikoaversion $r(W)$ der

Form $r(W) = \frac{1}{t + bW}$ ergeben in ihrer Beschrän-

kung auf CARA- (constant absolute risk aversion)

Nutzenfunktionen, d.h. mit $r(W) = \frac{1}{t}$, aus der allge-

meinen Bedingung $u(W) = \int \exp\left(-\int r(W)dW\right)dW$

die Restriktion auf Nutzenfunktionen exponentieller Gestalt $u(W) = -\exp(-1/tW)$.

Unterstellt man den Investoren eine Nutzenfunktio-

on der Gestalt $u(W) = \frac{1}{\gamma W^\gamma}$ mit $\gamma < 1$, so erhält

man für den Risikotoleranzparameter $t = 1/(1 - \gamma)$,

d. h. t ist gleich dem Reziproken der relativen Ri-

sikoaversion. Man spricht bei u dann im allgemei-

nen von der Potentialnutzenfunktion (Power Utility

Function). Der Faktor t muss positiv sein, damit

effiziente Portfolios ausgewählt werden. Je grö-

sser t , desto grösser ist die Risikotoleranz des In-

vestors.

Fussnoten

- [1] Siehe zu einem ausführlichen Überblick der Portfolio Selection als Grundlage des "Capital Asset Pricing Model" RUDOLPH (1979).
- [2] Vgl. STUCKI (1994), S. 510.
- [3] MICHAUD (1989), S. 33, bezeichnet Investoren, die ihre Anlageentscheidung auf Basis der Portfolio Selection treffen, auch als "estimation-error maximizers". Vgl. auch JORION (1992).
- [4] Vgl. MICHAUD (1989), S. 34.
- [5] Vgl. JOBSON/KORKIE (1981).
- [6] Vgl. KLEEBERG (1995).
- [7] Vgl. KALLBERG/ZIEMBA (1984), CHORPA/ZIEMBA (1993), BEST/GRAUER (1991).
- [8] Vgl. ALEXANDER (1995), S. 68.
- [9] Ergebnis der angestellten Überlegungen ist, dass die Effekte in der Unsicherheit der Bestimmung der Modellparameter unter gewissen Umständen marginal sind. Ungenauigkeiten in der Schätzung der Parameter haben nämlich dann keinen Einfluss auf die Gleichgewichtssituation im CAPM, wenn alle Wertpapiere in gleichem Ausmass von den Schätzrisiken betroffen sind; vgl. BARRY/BROWN (1985), S. 407-408. Sind insbesondere die Wertpapierrenditen normalverteilt, so ist die Menge der zulässigen Portfeuillekombinationen mit und ohne Schätzfehlerberücksichtigung identisch; vgl. KLEIN/BAWA (1976). Gibt es dagegen Unterschiede in der Unsicherheit der Parameter zwischen den betrachteten Wertpapieren, so beeinflussen Schätzfehler auch die Gleichgewichtssituation am Markt. COLES/LOEWENSTEIN/SUAY (1995) und BARRY/BROWN (1985) formulieren Marktgleichgewichte bei Schätzfehlerisiken. Grundsätzlicher wird der Einfluss von Schätzungenauigkeiten auf die Portfeuilleentscheidung von CLARKSON/GUEDES/THOMPSON (1996) behandelt, die an der Diskussion, ob das auf Schätzfehlern beruhende Risiko diversifizierbar ist, ansetzen.
- [10] Vgl. MERTON (1972).
- [11] Vgl. FRANKE (1983), S. 241.
- [12] Vgl. BAMBERG/SPREMANN (1981).
- [13] Die Risikoaversion der Investoren wird über Bernoulli-Nutzenfunktionen beschrieben. Möchte man beliebige Verteilungen der Periodenendpreise zulassen, dann muss man sich auf quadratische Nutzenfunktionen beschränken, um die Kompatibilität mit dem (μ, σ) -Prinzip sicherzustellen. Eine solche Nutzenfunktion ist jedoch nicht monoton steigend, was letztlich ihr Pendant in der Verletzung der Dominanzprinzipien durch das (μ, σ) -Kriterium findet. Zur Vermeidung dieses Nachteils quadratischer Nutzenfunktion werden normalverteilte Preise vorausgesetzt.
Die Wahl dieses Kapitalmarktmodells lässt sich unter anderem wie folgt motivieren: Die Wahl einer exponentiellen Nutzenfunktion garantiert die Gültigkeit des Konsistenzaxioms, womit das optimale Portfeuille unabhängig von der individuellen Anfangsausstattung ist. Das globale Konsistenzaxiom impliziert die Unabhängigkeit des optimalen Portfeuilles vom Anfangsvermögen. BAMBERG/SPREMANN (1981) können die Anforderungen des globalen Konsistenzaxioms an das Sicherheitsäquivalent reduzieren und stellen daraufhin eine lokale Bedingung auf. Diese lokale Konsistenz sichert einen marginalen Einfluss des Anfangsvermögens bzw. von Änderungen des Anfangsvermögens auf die Entscheidungssituation und schränkt die Entscheidungsparameter (als zusätzliche Bedingung gegenüber dem globalen Axiom) lediglich auf die praktisch interessanten Fälle ein. Darüber hinaus wird auch die Gültigkeit des Separationstheorems sichergestellt; vgl. FRANKE (1983), S. 244. Weiter lassen sich im Rahmen des hybriden Modells die optimale Portfeuilleentscheidung wie auch die Gleichgewichtspreise der Assets zum Periodenbeginn explizit bestimmen; vgl. BAMBERG/SPREMANN (1981).
- [14] Vgl. BAMBERG/SPREMANN (1981), S. 217.
- [15] Weitere Restriktionen, wie obere Begrenzungen für Branchen sind ebenfalls denkbar, werden hier jedoch nicht eingeführt. Vgl. WINSTON (1993), S. 28.
- [16] Verschiedene Ansätze zur Schätzung der Kovarianzmatrix findet man in einer Kurzübersicht bei WINSTON (1993), S. 30.
- [17] Vgl. HORST (1989), S. 377-380.
- [18] Vgl. KNUTH (1981), S. 117.
- [19] Vgl. KNUTH (1981), S. 45-52.
- [20] Der Anstieg der durchschnittlichen Korrelation beruht zu einem nicht unbeträchtlichen Teil auf der Einführung des DAX, kann aber auch mit einer Zunahme der Informationseffizienz des Aktienmarktes erklärt werden. Auch zählten nicht alle der ab 1989 im DAX enthaltenen Aktien vor 1987 zu den grössten 30 Werten.
- [21] Zur Fehlerabschätzung benutzen CHOPRA/ZIEMBA (1993), S. 7-8, und KALLBERG/ZIEMBA (1984), S. 81, ein sogenanntes "Cash Equivalent". Dieser, hier nicht unproblematischen Grösse liegt die Idee eines Sicherheitsäquivalents zugrunde.

Literatur

- ALEXANDER, G. J. (1995): „Efficient Sets, Short-Selling, and Estimation Risk“, *Journal of Portfolio Management* 21, Winter, pp. 64-73.
- BAMBERG, G. und K. SPREMANN (1981): „Implications of Constant Risk Aversion“, *Zeitschrift für Operations Research* 25, pp. 205-224.
- BARRY, C. B. and S. J. BROWN (1985): „Differential Information and Security Market Equilibrium“, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 20, pp. 407-422.
- BAWA, V. S., S. J. BROWN and R. W. KLEIN (1979): „Estimation Risk and Optimal Portfolio Choice“, Amsterdam: North-Holland.
- BEST, M. J. and R. R. GRAUER (1991): „On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results“, *Review of Financial Studies* 4, pp. 315-342.
- BÜHLER, A. und H. ZIMMERMANN (1994): „Instabile Risikoparameter und Portfolioselktion“, *Finanzmarkt und Portfolio Management* 8, pp.212-228.
- CHOPRA, V. K. and W. T. ZIEMBA (1993): „The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice“, *Journal of Portfolio Management* 19, Winter, pp. 6-11.
- CLARKSON, P., J. GUEDES and R. THOMPSON (1996): „On the Diversification, Observability, and Measurement of Estimation Risk“, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 31, pp. 69-84.
- COLES, J. L., U. LOEWENSTEIN and J. SUAY (1995): „On Equilibrium Pricing under Parameter Uncertainty“, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 30, pp. 347-364.
- FRANKE, G. (1983): „Kapitalmarkt und Separation“, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 53, pp. 239-260.
- HEPP, S. (1990): „The Stability of the Estimated Risk-Structure of Asset Returns“, *Finanzmarkt und Portfolio Management* 4, pp. 43-49.
- HORST, R. (1989), Nichtlineare Optimierung, in: T. Gal (Hrsg.): *Grundlagen des Operations Research* 1, New York: Springer, pp. 255-419.
- JOBSON, J. D., B. KORKIE (1981): „Putting Markowitz Theory to Work“, *Journal of Portfolio Management* 7, Summer, pp. 70-74.
- JORION, P. (1992): „Portfolio Optimization in Practice“, *Financial Analysts Journal* 48, January/February, pp. 68-74.
- KALLBERG, J. G. and W. T. ZIEMBA (1984): „Misspecification in Portfolio Selection Problems“, in: G. Bamberg and K. Spremann (Hrsg.): *Risk and Capital*, New York: Springer, pp. 74-87.
- KLEEBERG, J. M. (1995): *Der Anlageerfolg des Minimum-Varianz-Portfolios*, Bad Soden/Ts.: Uhlenbruch 1995.
- KLEIN, R. W. and V. S. BAWA (1976): „The Effect of Estimation Risk on Optimal Portfolio Choice“, *Journal of Financial Economics* 3, pp. 215-231.
- KNUTH, D. E. (1981): „The Art of Computer Programming, Vol. 2: Seminumerical Algorithms“, Reading, Massachusetts.
- MARKOWITZ, H. M. (1959): „Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments“, New York: Wiley.
- MERTON, R. C. (1972): „An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier“, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 7, pp. 1851-1872.
- MICHAUD, R. O. (1989): „The Markowitz Optimization Enigma: Is ‘Optimized’ Optimal?“, *Financial Analysts Journal* 45, January/February, pp. 31-42.
- RUDOLPH, B. (1979): „Zur Theorie des Kapitalmarktes. Grundlagen, Erweiterungen und Anwendungsbereiche des ‘Capital Asset Pricing Model (CAPM)’“, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 49, pp. 1034-1067.
- STUCKI, T. (1994): „Möglichkeiten und Grenzen eines Optimierungssystems im praktischen Portfolio Management“, *Finanzmarkt und Portfolio Management* 8, pp. 508-521.
- WINSTON, K. (1993): „The ‘Efficient Index’ and Prediction of Portfolio Variance“, *Journal of Portfolio Management* 19, Spring, pp. 27-34.