© Schweizerische Gesellschaft für Finanzmarktforschung (pp. 59–73)

WALTER GRUBER UND LUDGER OVERBECK*

„Nie mehr Bootstrapping“

1. Einleitung

Dem Aufbau von Diskont- bzw. Zero-Zinskurven kommt eine zentrale Bedeutung bei der Bewertung aller zinsabhängigen Finanzinstrumente (straight Bonds, Floater, structured Notes, Caps, Floors, Swaps, etc.) zu. Während diese Kurven im kurzfristigen Bereich direkt aus den Geldmarktfutures ableitbar sind, wird im mittel- und langfristigen Bereich ein relativ umständliches Verfahren, das sog. Bootstrapping herangezogen. Hier werden die Diskontfaktoren bzw. die Zero-Rates iterativ aus den gegebenen Par-Rates oder aus Preisen gehandelter Bonds abgeleitet.
In diesem Artikel wird eine neue Vorgehensweise zur Bestimmung von Diskontfaktoren und Zero-Rates aus Par-Rates oder Preisen von Coupon-Bonds vorgestellt. Diese kann unter denselben Voraussetzungen wie das bekannte Bootstrapping-Verfahren angewendet werden und weist hiergegenüber zwei wichtige Vorteile auf: Zum Einen beruht sie auf expliziten Formeln für jeden Diskontfaktor bzw. Zero-Rate, eine iterative Ermittlung ist somit nicht notwendig. Zum Anderen ist es dank der expliziten Formeln möglich, Sensitivitäten der Diskontfaktoren oder Zero-Rates bzgl. Änderungen der Par-Rates bzw. der Couponraten und Bondpreise anzugeben.

* Die Autoren danken Jürg Tobler und Heinz Zimmermann für wertvolle Hinweise und Verbesserungsvorschläge. Dr. Walter Gruber, Roland Eller Consulting. Dr. Ludger Overbeck, Deutsche Bank, Stabsbereich Controlling, Risiko-Controlling (Konzern).

2. Problemstellung: Diskont- und Zinskurven zur Bewertung von Finanzinstrumenten

Die Entwicklung zuverlässiger Verfahren für das Risikomanagement stellt im Zuge der zunehmenden Bedeutung der Marktrisiken eine der wichtigsten Aufgaben einer handelsaktiven Bank dar. Dabei kommt der Quantifizierung und Absicherung von Zinsänderungsrisiken innerhalb dieses Komplexes eine besondere Bedeutung zu, da diese in der Regel den weitaus grössten Teil der Marktrisiken ausmachen[1]. Aus diesem Grund ist die exakte Bewertung von Zinsprodukten von grosser Wichtigkeit. Neben den traditionellen Bonds (straight Bond und Floater) sind dies zum einen unbedingte Zinstermingeschäfte (wie z.B. Zinsswaps, Zinsfutures und Forward Rate Agreements) und zum anderen Zinsoptionen (wie z.B. Caps, Floors, Swaptions), die ihrerseits als eingebettete Optionen wiederum Bestandteile von sog. strukturierten Finanzprodukten sein können (wie z.B. Gläubiger- und Schuldnerkündigungsrechte).
Die Basis einer jeden Bewertung eines zinsabhängigen Finanzinstrumentes ist dabei die Kenntnis einer Diskont- oder einer Zero-Zinskurve für

das gesamte interessierende Laufzeitenspektrum. Ist eine solche Kurve ermittelt, so ist für jeden gewünschten Zeitpunkt der heutige Wert einer Geldeinheit mit dieser Fristigkeit (Diskontkurve) bzw. die entsprechende Verzinsung (Zero-Zinskurve) bekannt. Deshalb ist die Frage, wie eine solche Funktion sinnvollerweise entwickelt werden soll, von zentraler Bedeutung. Dabei ist die Aufgabe, eine solche Funktion zu generieren, in der Regel zweigeteilt.

Zunächst sind aus den verfügbaren Marktdaten für einzelne diskrete Gitterpunkte Diskontfaktoren bzw. Zero-Rates[2] zu bestimmen. Während im Geldmarktbereich diese Grössen direkt aus den Geldmarktinstrumenten (wie z.B. Geldmarktsätzen und Kursen von Geldmarktfutures) ableitbar sind, wird im Kapitalmarktbereich bislang das sog. Bootstrapping-Verfahren verwendet. Dabei werden die Diskontfaktoren bzw. die Zero-Rates iterativ aus den quotierten Par-Rates oder den Preisen liquider Bonds relativ aufwendig ermittelt.

Basierend auf den bestimmten Werten an den Gitterpunkten kann dann mittels sog. „Curve-Fitting-Ansätze“ für jeden Zeitpunkt eine Diskont- bzw. Zero-Zinsfunktion ermittelt werden. Dabei haben die gängigen Interpolationsmethoden (wie z.B. lineare, geometrische Interpolation, Cubic Splines) zwar den Vorteil, dass sie relativ einfach zu implementieren sind. Sie haben jedoch oft den entscheidenden Nachteil, dass die hieraus ermittelten Forward-Kurven unbrauchbar sind. Eine bessere Möglichkeit ist hier in der Regel durch die Verwendung exponentieller Regressionsansätze gegeben.[3][4]

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, mit Ein- oder Mehrfaktormodellen die Zinsentwicklung stochastisch zu modellieren und die Modellparameter anhand der aktuellen Zero-Rates zu adjustieren.[5]

Hauptgegenstand des vorliegenden Artikels ist die Darstellung einer Methode, die alternativ zum Bootstrapping verwendet werden kann. Sie beruht auf expliziten Formeln für jeden Diskontfaktor und ist unter denselben Voraussetzungen wie das Bootstrapping anwendbar. Damit werden zwei wichtige Vorteile gegenüber dem Bootstrapping evident: Einerseits ist eine iterative Ermittlung nicht erforderlich, was insbesondere eine schnellere Berechnung impliziert, wenn nicht alle, sondern nur einzelne Diskontfaktoren benötigt werden. Andererseits ist es auf Basis der expliziten Formeln möglich, Sensitivitäten der Diskontfaktoren bzgl. Änderungen von den in die Formeln eingehenden exogenen Grössen anzugeben.

Der Aufbau des Artikels ist wie folgt: Nach einer einführenden Begriffsbestimmung wird kurz die bekannte Methodik zum Aufbau einer Zero-Zinskurve im kurzfristigen Bereich mit Hilfe von Geldmarktfutures dargestellt. Anschliessend wird auf die übliche Vorgehensweise bei der Bestimmung von diskreten Diskontfaktoren im Kapitalmarktbereich eingegangen. Dabei wird dieses Verfahren in seiner allgemeinsten Form illustriert. Aus der hieraus resultierenden Kritik wird dann gezeigt, wie für diese Grössen leicht alternativ explizite Formeln hergeleitet werden können und wie diese verwendet werden können.[6]

3. Rendite, Par-Rate, Zero-Rate, Diskontfaktor und Forward-Rate

Eine zentrale Grösse zur Charakterisierung eines festverzinslichen Titels ist seine Rendite. Sie entspricht gerade dem Abzinsungsfaktor, der – verwendet zur periodenadäquaten Abzinsung aller zukünftigen Cash–Flows dieses Papiers – den aktuell gehandelten Wert inkl. Stückzinsen („Dirty Price“ oder Barwert) ergibt. Wird das Papier also in all seine zukünftigen Coupon- und Rückzahlungen „atomisiert“, so entspricht der Dirty Price gerade der Summe aller mit seiner Rendite auf den Bewertungszeitpunkt diskontierten Cash-Flows.

So ist z.B. die Rendite y_5 eines 5jährigen Papiers mit Preis DP_5 und den jährlichen Cash-Flows $CF_{51}, \ldots, CF_{55}$ implizit gegeben durch die Beziehung:[7]

$$DP_5 = \frac{CF_{51}}{(1+y_5)} + \frac{CF_{52}}{(1+y_5)^2} + \ldots + \frac{CF_{55}}{(1+y_5)^5} = \sum_{j=1}^{5} \frac{CF_{5j}}{(1+y_5)^j} \quad (1)$$

DP_5 = Dirty Price des 5jährigen Papiers
CF_{5j} = Cash-Flow des 5jährigen Papiers in Periode j (j = 1, ..., 5)
y_5 = Rendite des fünfjährigen Papiers (auch: „Yield-to-Maturity“).

Notiert das Papier „zu pari“ (d.h. ist der Preis des Papiers DP = 100%) so heisst die Rendite y entsprechend Par-Rate.
Die Diskontierung aller Cash-Flows mit der selben Rate y stellt offensichtlich eine starke Vereinfachung der Realität dar, da letztlich eine vollkommen flache Zinskurve zum konstanten Niveau y unterstellt wird; d.h. es wird eine für alle Laufzeitbereiche gleiche Verzinsung y angenommen. Damit wird implizit unterstellt, dass jeder anfallende Cash-Flow mit dieser Rate bis zum Verfall des Papiers wiederangelegt werden kann.
Weiter ist zu beachten, dass die fünfjährige Rendite y_5 oben direkt aus der spezifischen Struktur eines vorgegebenen fünfjährigen Zinspapiers abgeleitet wurde. Ein anderer Bond mit zwar gleicher Restlaufzeit und gleichem Preis jedoch abweichender Zahlungsstruktur (z.B. andere Höhe der Coupons) hat trivialerweise eine andere Rendite. Letztlich ist die Rendite somit eine aus verschiedenen produktspezifischen Informationen (Preis, Höhe und zeitlicher Anfall der Couponzahlungen und des Tilgungsbetrages) aggregierte Kennzahl.
Würde folglich ein anderer Zinstitel fünfjähriger Restlaufzeit, für den kein Marktpreis bekannt ist (z.B. ein OTC-Zinsderivat), auf der Basis von y_5 bewertet, so würden die folgenden methodischen Fehler gemacht:

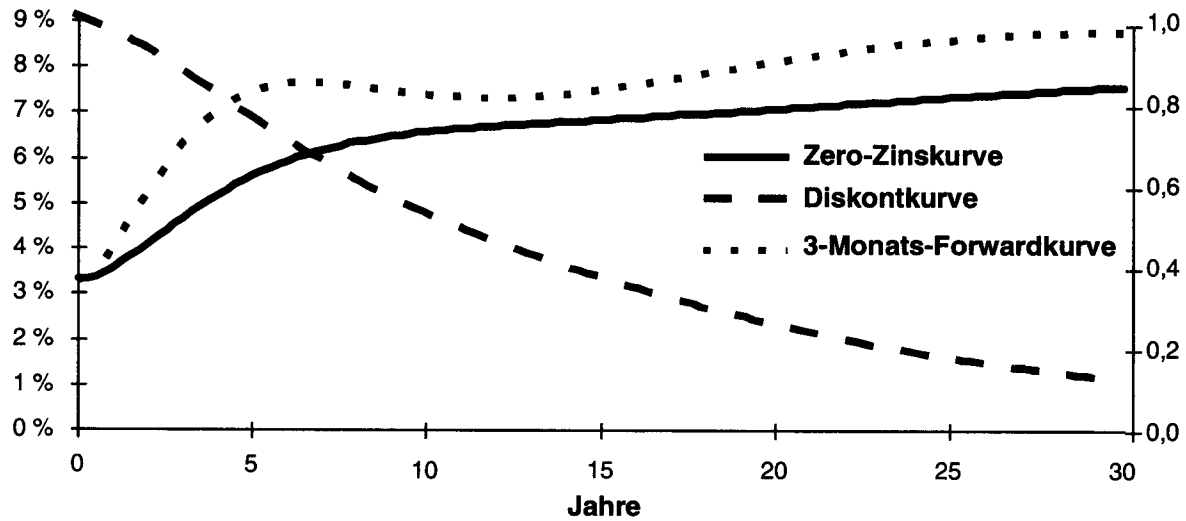
- Zugrundelegung einer flachen Zinskurve
- Bewertung des Produkts auf der Basis der Struktur eines anderen Zinsprodukts.

Aus diesen bekannten Gründen wird nach einer „neuen Zinsstrukturkurve“ gesucht, die diesen beschriebenen Unzulänglichkeiten nicht unterliegt, jedoch gleichzeitig in der Lage ist, die Preise von am Markt gehandelten Produkten zu replizieren.
Zinsprodukte, die den o.a. Schwächen nicht unterliegen, sind Zero-Bonds. Hier wird die gesamte Verzinsung zusammen mit dem Nominalbetrag zur Fälligkeit ausbezahlt. Bei der Bestimmung der Rendite eines Zero-Bonds sind somit insbesondere keine Annahmen bzgl. der Wiederanlage von Cash-Flows zu beachten. Diese „wiederanlagefreie“ Verzinsungsrate wird dementsprechend als Zero-Rate (auch: Spot-Rate) bezeichnet. Würde am Kapitalmarkt für jede beliebige Fristigkeit ein Zero-Bond gehandelt, so wären über die Preise der einzelnen Zero-Bonds die Diskontfaktoren direkt gegeben.[8] Hieraus könnte – bei Kenntnis der Zinskonvention[9] und der Tageszählkonvention[10] – die Zero-Zinskurve leicht bestimmt werden. Da eine Couponanleihe (bzw. straight Bond) wiederum als Portfolio einzelner Zero-Bonds interpretiert werden kann,[11] ergibt sich der mit den Diskontfaktoren $d_1, d_2, \ldots, d_5$ oder den Zero-Rates $z_1, z_2, \ldots, z_5$ bestimmte Wert des fünfjährigen straight Bonds einfach durch:[12][13]

$$DP_5 = CF_{51}\,d_1 + CF_{52}\,d_2 + \ldots + CF_{55}\,d_5 = \sum_{j=1}^{5} CF_{5j}\,d_j = \frac{CF_{51}}{(1+z_1)} + \frac{CF_{52}}{(1+z_2)^2} + \ldots + \frac{CF_{55}}{(1+z_5)^5} = \sum_{j=1}^{5} \frac{CF_{5j}}{(1+z_j)^j} \quad (2)$$

Jede einzelne Zahlung des straight Bonds wird mit den fristigkeitsgerechten Zero-Zinssätzen abdiskontiert. Auf analoge Weise liesse sich der aktuelle Wert eines beliebigen deterministischen Zahlungsstroms (z.B. Annuitätenanleihe, Zinsfuture, Forward Rate Agreement) bestimmen.
Neben der Darstellung der Zinsstruktur durch Diskontfaktoren oder Zero-Rates gibt es noch eine dritte Möglichkeit: Die Definition der Zinsstruktur über die Forward-Rates. Eine Forward-

Abbildung 1: Diskont-, Zero-Zins- und Forwardkurve



Rate (auch: Terminzins) kann als „zukünftige Zero-Rate aus heutiger Sicht“ interpretiert werden und ergibt sich aus einer einfachen Arbitrageüberlegung:

Ein Investor soll heute eine Geldeinheit bis zu einem Zeitpunkt t_2 anlegen. Dabei sollen ihm zwei Anlagemöglichkeiten zur Verfügung stehen:

1. Anlage der Geldeinheit direkt zum Termin t_2
2. Anlage der Geldeinheit zunächst zum Termin t_1 (mit $t_1 < t_2$). Danach wird diese Geldeinheit einschliesslich der bis zu t_1 erhaltenen Zinsen zum bereits jetzt vereinbarten Zinssatz $F_{1,2}$ bis zum Termin t_2 nochmals angelegt.

Aus Arbitrageüberlegungen muss der Endwert beider Anlagemöglichkeiten („Total Return“) identisch sein. Die heute vereinbarte Verzinsung $F_{1,2}$ für den Zeitraum von t_1 nach t_2, die keine Arbitragemöglichkeiten zulässt und damit konsistent zu den aktuellen Zero-Rates ist, wird Forward-Rate von t_1 nach t_2 genannt.

Die drei Grössen Diskontfaktor, Zero-Rate und Forward-Rate sind letztlich äquivalente Darstellungen der Zinsstruktur. Die formalen Zusammenhänge zwischen Diskontfaktoren, Zero-Rates und Forward-Rates bei jährlich diskreter und stetiger Verzinsung im Kapitalmarkt sind im Anhang 1 beschrieben.

Im Folgenden wird vorgestellt, wie eine Zero-Zins- und eine Diskontkurve für das gesamte Laufzeitspektrum aufgebaut werden kann. Dabei wird unterschieden in:

- Bis zu einem Jahr: Aufbau mit Geldmarktfutures
- Über ein Jahr: Bootstrapping oder alternativ: Verwendung neuer expliziter Formeln.

4. Aufbau von Zero-Zinskurven im kurzfristigen Bereich

Es wird nun kurz die bekannte Methodik des Aufbaus einer Zero-Zinskurve im kurzfristigen Bereich aus Geldmarktfutures vorgestellt.[14] Dabei werden beispielhaft für den deutschen Zinsmarkt die an der LIFFE gehandelten 3-Monats-Euromarkfutures verwendet. Der Euromarkfuture ist ein standardisiertes Forward Rate Agreement und beinhaltet das Recht und die Pflicht, zu seiner Fälligkeit 1 Mio. DM für drei Monate in Höhe der entsprechenden Forward-Rate aufzunehmen. Dabei ist diese Forward-Rate implizit im gehandelten

Tabelle 1: Ermittlung von Zero-Rates mit Euromark-Futures

Euromark-future	Fälligkeit	Kontraktlaufzeit (in Tagen)	Futures-Preis	Implizite Forward-Rate	Zero-Rate	Gesamtlaufzeit (in Tagen)
Stub-Rate		88			3,75%	88
Mrz 98	17.03.98	91	96,04	3,96%	3,88%	179
Jun 98	16.06.98	91	95,98	4,02%	3,95%	270
Sep 98	15.09.98	90	95,82	4,18%	4,04%	360

Kurs enthalten, da der Preis des Euromarkfutures entsprechend der Konvention 100 - Forward-Rate quotiert ist.[15] Pro Jahr stehen vier unterschiedliche Fälligkeiten zur Verfügung.[16] Insgesamt werden 12 Fälligkeiten gehandelt, wovon jedoch in der Regel lediglich die ersten sechs bis sieben Kontrakte als hochliquide und damit für den Aufbau der Zero-Zinskurve geeignet angesehen werden können. Soll lediglich der Laufzeitbereich bis zu einem Jahr aufgebaut werden, so genügen die ersten drei bis vier Kontrakte.[17]

Um aus einer Forward-Rate eine Zero-Rate errechnen zu können, ist die Kenntnis der sog. Stub-Rate notwendig. Dies ist gerade die Zero-Rate mit Fälligkeit bis zum Beginn des ersten Futures. In der Regel wird hier ein auf diesen Zeitpunkt linear interpolierter LIBOR-Satz verwendet. Insgesamt bestimmt sich eine Zero-Rate z_i mit Fristigkeit t_i wie folgt:

$$z_i = \left(\left(1+z_1\times\frac{t_1}{360}\right)\times\left(1+F_{1,2}\times\frac{t_2-t_1}{360}\right)\times\ldots \times\left(1+F_{i-1,i}\times\frac{t_i-t_{i-1}}{360}\right)-1\right)\times\frac{360}{t_i} \qquad (3)$$

mit:

$t_1, \ldots, t_{n-1}$: Fälligkeiten der Euromarkfutures

t_n: Gesamtlaufzeit des letzten Euromarkfutures

z_i: Zero-Rate mit Fristigkeit t_i ($i = 1, \ldots, n$) wobei z_1 die Stub-Rate ist

$F_{i-1,i}$: Forward-Rate von t_{i-1} nach t_i ($i = 1, \ldots, n$).

Das Beispiel aus Tabelle 1 zeigt die Konstruktion der Zero-Zinskurve über die Euromarkfutures für den 19. Dezember 1997:

Beispielsweise ergibt sich oben die Zero-Rate mit Fälligkeit 270 Tage aus:

$$z_{270\text{Tage}} = \left(\left(1+3{,}75\%\times\frac{88}{360}\right)\times \left(1+3{,}96\%\times\frac{91}{360}\right)\times\ldots \times\left(1+4{,}02\%\times\frac{91}{360}\right)-1\right)\times\frac{360}{270} = 3{,}95\%$$

Während im kurzfristigen Bereich Zero-Rates (und damit Diskontfaktoren) anhand der dargestellten Methodik relativ leicht gewonnen werden können, wird im Kapitalmarktbereich üblicherweise das im folgenden illustrierte Bootstrapping-Verfahren verwendet.

5. Bootstrapping

Sind die Diskontfaktoren bekannt, so kann der Barwert jedes beliebigen, aus deterministischen Auszahlungen aufgebauten Finanzinstrumentes einfach als Portfolio bzw. Summe der einzelnen Barwerte (also mit den jeweiligen Diskontfaktoren diskontierten Cash-Flows) bestimmt werden. Die Diskontfaktoren wiederum lassen sich – bei Kenntnis der Zins- und Tageszählkonvention – eindeutig in die Zero-Rates umrechnen. Würde nun ein – bzgl. einer interessierenden Bonitätsklasse[18] – für das gesamte Laufzeitspektrum

liquider Markt für Zero-Bonds existieren, so wäre hieraus die gesamte Diskontkurve direkt gegeben. In der Realität ist der Markt für Nullcouponanleihen jedoch ausgesprochen „dünn“; liquide Anleihen weisen vielmehr unterschiedlichste Zahlungsstrukturen auf.[19] Doch oft bietet auch der Markt für Treasuries und Pfandbriefe aufgrund partieller Illiquiditäten in längeren Laufzeitbereichen schlechte Informationen. Eine andere Möglichkeit besteht in der Verwendung der quotierten Swap-Sätze, die in der Regel im Bereich bis zu zehn Jahren sehr enge Geld-Brief-Spannen aufweisen. So hat die Festzinsseite eines Zinsswaps in der Regel mehrere Couponzahlungen bis zu dessen Fälligkeit. Der „Preis“ eines solchen Swaps wird direkt über diesen festen Coupon („Swap-Rate“) angegeben. Werden also die quotierten annualisierten Swap-Rates zur Ermittlung der Diskontfaktoren herangezogen, so werden implizit Bonds mit „geraden“ Laufzeiten, die zu pari notieren und einen Coupon in Höhe der entsprechenden Swap-Rate aufweisen, verwendet.[20] Stehen die Swap-Rates nicht für jedes Jahr zur Verfügung, so werden sie üblicherweise aus den benachbarten Swap-Rates linear interpoliert.

Die Bestimmung der Diskontfaktoren aus diesen Informationen wird in der Regel über das Bootstrapping-Verfahren vorgenommen. Dieses Verfahren basiert üblicherweise auf folgenden Restriktionen:[21]

(R1) Es werden straight Bonds zugrundegelegt.[22]
(R2) Alle Bonds notieren zu pari.
(R3) Die Auszahlungstermine aller Bonds stimmen überein.
(R4) Man befindet sich am Anfang einer ganzen Couponperiode.
(R5) Es wird eine bestimmte Zinskonvention unterstellt.
(R6) Es wird eine bestimmte Tageszählkonvention zugrundegelegt.

Im Folgenden wird das Bootstrapping in seiner allgemeinsten Form illustriert. Alternativ werden im nächsten Kapitel explizite Formeln vorgestellt, die gegenüber dem Bootstrapping verschiedene Vorteile aufweisen. Beide Methoden lassen sich unter der einzigen Restriktion (R3) anwenden.

Weitere Restriktionen sind nicht notwendig. Wennngleich diese Voraussetzung für sich gesehen immer noch sehr restriktiv ist, hat dies eine hohe praktische Relevanz, da wesentlich mehr Bonds zur Erzeugung einer Diskont- bzw. Zero-Zinskurve herangezogen werden können als unter Beachtung aller obigen Restriktionen.

Seien nun allgemein DP_i, $(i = 1, ..., n)$ die heutigen Preise von Bonds (incl. der aufgelaufenen Stückzinsen) von denen das i-te Papier zu den Zeitpunkten $t_1 < t_2 < ... < t_i$ die Cash-Flows CF_{ij}, $(j = 1, ..., i)$ bewirkt.

Dann ist der erste, zum Zeitpunkt t_1 fällige Bond, gerade ein Zero-Bond und es gilt:

$$DP_1 = CF_{11}\, d_1 \quad \Leftrightarrow \quad d_1 = \frac{DP_1}{CF_{11}}. \tag{4}$$

Der zweite, zum Zeitpunkt t_2 fällige Bond mit Preis DP_2 kann als „Portfolio“ zweier Zero-Bonds mit den Nominalbeträgen CF_{21} bzw. CF_{22} mit den Fälligkeiten t_1 bzw. t_2 interpretiert werden, von

Tabelle 2: Zur Berechnung der Diskontfaktoren verwendete Bonds

	Coupon	Laufzeit	Clean Price	aufgelauf. Zinsen[23]	Dirty Price
Bond 1	6,00%	30.06.98	1,0079	0,030833	1,038733
Bond 2	4,20%	30.06.99	0,9929	0,021583	1,014483
Bond 3	7,30%	30.06.00	1,0522	0,037514	1,089714
Bond 4	4,25%	30.06.01	0,9687	0,021840	0,990540

denen der erste Zero-Bond den heutigen Wert $CF_{21}d_1$ und der zweite Zero-Bond den heutigen Wert $CF_{22}d_2$ besitzt. Der unbekannte Diskontfaktor d_2 kann analog wieder durch die Beziehung

$$DP_2 = CF_{21}\,d_1 + CF_{22}\,d_2 \quad \Leftrightarrow$$
$$d_2 = \frac{DP_2 - CF_{21}d_1}{CF_{22}} \tag{5}$$

ermittelt werden.
Sind schliesslich die Diskontfaktoren $d_1, \ldots, d_{i-1}$ berechnet, so kann hieraus wiederum d_i bestimmt werden:[24]

$$DP_i = CF_{i1}\,d_1 + \ldots + CF_{ii-1}\,d_{i-1} + CF_{ii}\,d_i \quad \Leftrightarrow$$
$$d_i = \frac{DP_i - \sum_{j=1}^{i-1} CF_{ij}\,d_j}{CF_{ii}} \qquad i = 1,\ldots,n \tag{6}$$

Legt man neben der Restriktion (R3) zusätzlich (R1) zugrunde und betrachtet straight Bonds mit den Preisen DP_i, den Coupons r_i und den Couponzahlungszeitpunkten t_j, (j = 1, ..., i), so lautet (6):[25]

$$d_i = \frac{DP_i - r_i \sum_{j=1}^{i-1} d_j}{1 + r_i} \qquad i = 1,\ldots,n. \tag{7}$$

Wird Bootstrapping auf der Basis der jährlichen Swap-Rates durchgeführt, so vereinfacht sich diese Iterationsformel noch weiter. In diesem Fall wird implizit von Pari-Bonds mit den jeweiligen Couponzahlungen $r_1, \ldots, r_n$ zu den Zeitpunkten 1, 2, ..., n Jahre ausgegangen (zusätzliche Restriktionen (R2) und (R4)).[26]

$$d_i = \frac{1 - r_i \sum_{j=1}^{i-1} d_j}{1 + r_i} \qquad i = 1,\ldots,n. \tag{8}$$

Bislang wurde die Zinsstruktur lediglich über die Diskontfaktoren dargestellt. Diese Vorgehensweise hat den wesentlichen Vorteil, dass keine Aussage bzgl. der Zins- und der Tageszählkonvention getätigt werden muss. Bei Spezifikation dieser Konventionen können die Formeln (6) bis (8) leicht in Bootstrapping-Formeln für die Zero-Rates übergeführt werden.[27]
Beispielhaft soll das Bootstrapping für den Fall (7) illustriert werden:
Am 5. Januar 1998 sollen Diskontfaktoren auf der Basis der vier gehandelten straight Bonds aus Tabelle 2 ermittelt werden:[28]
Die Diskontfaktoren d_1 (Fristigkeit 30.06.98) bis d_4 (Fristigkeit 30.06.01) ergeben sich dann iterativ wie folgt:

$$d_1 = \frac{DP_1}{1 + r_1} = \frac{1{,}038733}{1{,}06} = 0{,}979937$$

$$d_2 = \frac{DP_2 - r_2 d_1}{1 + r_2} = \frac{1{,}014483 - 0{,}042 \times 0{,}979937}{1{,}042} = 0{,}934094$$

$$d_3 = \frac{DP_3 - r_3 d_1 - r_3 d_2}{1 + r_3} = \frac{1{,}089714 - 0{,}073 \times 0{,}979937 - 0{,}073 \times 0{,}934094}{1{,}073} = 0{,}885358$$

$$d_4 = \frac{DP_4 - r_4 d_1 - r_4 d_2 - r_4 d_3}{1 + r_4} = \frac{0{,}990540 - 0{,}0425 \times 0{,}979937 - 0{,}0425 \times 0{,}934094 - 0{,}0425 \times 0{,}885358}{1{,}0425}$$
$$= 0{,}836035$$

Tabelle 3: Mit Bootstrapping ermittelte Diskontfaktoren und Zero-Rates

Laufzeit	Restlaufzeit (Act/365)	Diskontfaktor	Zero-Rate jährlich diskret	Zero-Rate stetig
30.06.98	0,482192	0,979937	4,292656%	4,203076%
30.06.99	1,482192	0,934094	4,707254%	4,599821%
30.06.00	2,484932	0,885358	5,022079%	4,900042%
30.06.01	3,484932	0,836035	5,273171%	5,138842%

Wird für die Berechnung der Zero-Rates die Tageszählkonvention Act/365 verwendet, so ergeben sich diese im Fall der jährlich diskreten und der stetigen Verzinsung wie folgt: (Tabelle 3).
Die iterative Vorgehensweise beim Bootstrapping zur Ermittlung der Diskontfaktoren weist verschiedene Unzulänglichkeiten auf:

- Numerischer Aufwand: Für viele Problemstellungen werden nur einzelne Diskontfaktoren und nicht das gesamte Laufzeitspektrum benötigt.[29] Beim Bootstrapping kann ein einzelner Diskontfaktor d_i jedoch erst ermittelt werden, wenn alle vorangegangenen (und für die eigentliche Rechnung nicht benötigten) Diskontfaktoren $d_1, ..., d_{i-1}$ bestimmt wurden.
- Es ist nicht möglich, Sensitivitäten der Diskontfaktoren bzw. Zero-Rates bzgl. der Variation der eingehenden Grössen (Preise, Coupons) explizit anzugeben.

Es werden nun Formeln vorgestellt, die eine explizite Berechnung der Diskontfaktoren (und damit auch der Zero-Rates) in Abhängigkeit der vorgegebenen exogenen Grössen erlauben; die klassische iterative Vorgehensweise des Bootstrappings wird überflüssig. Sind solche Formeln bekannt, so ist es – neben der einfacheren numerischen Ermittlung – zudem möglich, direkt Sensitivitäten der Diskontfaktoren und Zero-Rates bzgl. der eingehenden Grössen analytisch anzugeben.

6. Herleitung von expliziten Formeln für Diskontfaktoren und Zero-Rates

Werden die in Kapitel 5 direkt iterativ gelösten Gleichungen[30] zunächst als Gleichungssystem dargestellt, so hat dies folgende Gestalt:

$$
\begin{aligned}
&DP_1 = CF_{11} d_1 \\
&\dots \\
&DP_i = CF_{i1} d_1 + \dots + CF_{ii-1} d_{i-1} + CF_{ii} d_i \\
&\dots \\
&DP_n = CF_{n1} d_1 + \dots + CF_{ni-1} d_{i-1} + CF_{ni} d_i + \dots + CF_{nn} d_n
\end{aligned}
\tag{9}
$$

oder, in Matrixschreibweise:

$$
\begin{pmatrix} DP_1 \\ \dots \\ DP_i \\ \dots \\ DP_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
CF_{11} & 0 & \dots & & & 0 \\
\dots & & & & & \\
CF_{i1} & \dots & CF_{ii} & 0 & \dots & 0 \\
\dots & & & & & \\
CF_{n1} & \dots & & & & CF_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_i \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}
$$

$$DP = C \times d \tag{10}$$

Die gesuchten Diskontfaktoren $d_1, \ldots, d_n$ zu den Zeitpunkten $t_1, \ldots, t_n$ sind somit implizit über das obige Gleichungssystem gegeben, wobei:

$DP = (DP_1, \ldots, DP_n)^T$: Barwertvektor[31]

$$C = \begin{pmatrix} CF_{11} & 0 & \ldots & & & 0 \\ \ldots & & & & & \\ CF_{i1} & \ldots & CF_{ii} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & & \\ CF_{n1} & \ldots & & & & CF_{nn} \end{pmatrix} : \qquad (11)$$

Cash-Flow-Matrix[32]

Der gesuchte Vektor der Diskontfaktoren ist damit gegeben durch:

$$d = C^{-1} DP.$$

Es ist zu beachten, dass – wie beim Bootstrapping-Verfahren in seiner allgemeinsten Form (vgl. (6)) – ausser der Restriktion (R3) keine weiteren Einschränkungen notwendig sind.
Sollen die Diskontfaktoren aus Straight Bonds mit den Preisen DP_i und den Coupons r_i ermittelt werden (vgl. (7)),[33] so sind die Elemente der Cash-Flow-Matrix gegeben durch:

$$CF_{ij} = \begin{cases} r_i & i > j \\ 1 + r_i & i = j \\ 0 & i < j \end{cases} \qquad (12)$$

Die Inverse $C^{-1} = (C^{-1}_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ lässt sich hier leicht ermitteln und ist gegeben durch (Beweis siehe im Anhang 2):

$$C^{-1}_{ij} = \begin{cases} 0 & i < j \\ \dfrac{1}{1 + r_i} & i = j \\ -\dfrac{r_i}{\prod_{k=j}^{i} (1 + r_k)} & i > j \end{cases} \qquad (13)$$

Damit sind die Diskontfaktoren gegeben durch die explizite Formel:

$$d_i = \sum_{j=1}^{i} C^{-1}_{ij} DP_j = \frac{1}{1 + r_i} \left\{ DP_i - r_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{DP_j}{\prod_{k=j}^{i-1} (1 + r_k)} \right\} \qquad (14)$$

Die explizite Formel für den Fall gegebener Swap-Rates (vgl. (8))[34] lautet damit:

$$d_i = \frac{1}{1 + r_i} \left\{ 1 - r_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\prod_{k=j}^{i-1} (1 + r_k)} \right\} \qquad (15)$$

Hieraus sind – entsprechend der verwendeten Zins- und Tageszählkonvention – gemäss Anhang 1 direkt explizite Formeln für die Zero-Rates im Fall der jährlich diskreten und der stetigen Verzinsung gegeben. Die den Fällen (14) und (15) entsprechenden Zero-Formeln für diese beiden Zinskonventionen sind im Anhang 3 aufgeführt.
Auf der Basis der vorgegebenen Bonds in Tabelle 2 kann nun z.B. der letzte Diskontfaktor d_4 direkt, ohne Kenntnis von d_1, d_2 und d_3, nur unter Verwendung der bereits vorgegebenen Bondpreise und Coupons, mittels (14) ermittelt werden:

$$d_4 = \frac{1}{1+r_4}\left\{DP_4 - r_4\left(\frac{DP_1}{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)} + \frac{DP_2}{(1+r_2)(1+r_3)} + \frac{DP_3}{(1+r_3)}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{1+0{,}0452}\left\{0{,}990540 - 0{,}0452\left(\frac{1{,}038733}{(1+0{,}06)(1+0{,}042)(1+0{,}073)} + \frac{1{,}014483}{(1+0{,}042)(1+0{,}073)} + \frac{1{,}089714}{(1+0{,}073)}\right)\right\}$$

$$= 0{,}836035$$

7. Sensitivitäten

Aufbauend auf den im vorigen Abschnitt entwickelten expliziten Formeln können nun leicht weiterführende Analysen durchgeführt werden.
Ein wichtiger Schritt, der erst aufgrund der im letzten Abschnitt erhaltenden expliziten funktionalen Abhängigkeit der Diskontfaktoren und Zero-Rates von Par-Rates bzw. Couponraten und Bondpreisen möglich ist, besteht in der Berechnung von Sensitivitäten.[35]
Hilfreich sind z.B. Sensitivitäten von Zero-Rates bezüglich Swap-Rates,[36] da letztere leichter am Markt zu beobachten sind, während erstere für ein Cash-Flow-orientiertes Risikomanagementsystem üblicherweise verwendet werden.
In einem Risikomanagementsystem, in dem für die entsprechenden Laufzeiten die grundlegenden Marktdaten Par-Rates sind, kann es von Vorteil sein, Sensitivitäten von Diskontfaktoren und Zero-Rates bezüglich der Par-Rates anstelle der vollständigen funktionalen Abhängigkeit zu verwenden. Dadurch entsteht nämlich eine lineare Abhängigkeit zwischen Marktdaten und Portfoliobewertungen. Ausgehend von normalverteilten Marktdaten sind die Gewinne und Verluste in diesem linearisierten Portfolio dann wieder normalverteilt. Dies erlaubt eine akkurate Anwendung der Value-at-Risk-Berechnungen basierend auf der Standardabweichung der Marktdaten.[37]
Weiterhin können z.B. die Sensitivitäten der Zero-Rates bzgl. der Par-Rates als Zwischenschritt notwendig sein, um hieraus die Sensitivitäten von Zinsderivaten (wie z.B. Bondoptionen) auf Änderungen von Bondpreisen zu analysieren.
Exemplarisch werden zunächst die partiellen Ableitungen der Zero-Rates nach den Par-Rates für den Fall der jährlichen diskreten Verzinsung angegeben.[38] Diese partiellen Ableitungen sind dann genau die Sensitivitäten der Zero-Rates bezüglich der Par-Rates:

$$\frac{\partial z_i}{\partial r_i} = \frac{1}{i}\left\{\frac{1}{1+r_i}\left\{1 - r_i\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{\prod_{k=j}^{i-1}(1+r_k)}\right\}\right\}^{-\frac{1+i}{i}} \left(\frac{1}{(1+r_i)^2}\left(1+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{\prod_{k=j}^{i-1}(1+r_k)}\right)\right) \tag{16}$$

Für $1 \le i-1$:

$$\frac{\partial z_i}{\partial r_l} = -\frac{1}{i}\left\{\frac{1}{1+r_i}\left\{1 - r_i\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{\prod_{k=j}^{i-1}(1+r_k)}\right\}\right\}^{-\frac{1+i}{i}} \left(\frac{r_i}{(1+r_i)(1+r_l)}\left(\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{\prod_{k=j}^{i-1}(1+r_k)}\right)\right) \tag{17}$$

Offensichtlich gilt:

$$\frac{\partial z_i}{\partial r_i} > 0, \quad \frac{\partial z_i}{\partial r_l} < 0 \quad (l = 1, \ldots, i-1).$$

Aus (16) und (17) ist somit direkt ersichtlich, dass eine Erhöhung der i-ten Par-Rate eine Erhöhung der entsprechenden Zero-Rate impliziert (eine steilere Par-Zinskurve bewirkt eine Zunahme der Zero-Rates), während eine Zunahme der l-ten Par-Rate ($l < i$) eine Abnahme der i-ten Zero-Rate hervorruft (eine flachere Par-Zinskurve bewirkt eine Abnahme der Zero-Rates).

Auf der Basis der Sensitivitäten (16) und (17) können weiter leicht die Auswirkungen von Par-Rate-Veränderungen auf eine einzelne Zero-Rate direkt quantifiziert werden. So haben (beliebige) Verschiebungen $\Delta_1, \ldots, \Delta_i$ der Par-Rates $r_1, \ldots, r_i$ eine Veränderung der i-ten Zero-Rate um $\sum_{l=1}^{i} \frac{\partial z_i}{\partial r_l} \cdot \Delta_l$ zur Folge.[39]

Einfacher sind die Sensitivitäten von Diskontfaktoren bezüglich der Par-Rates zu berechnen:

$$\frac{\partial d_i}{\partial r_i} = -\left(\frac{1}{(1+r_i)^2} \left(1 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\prod_{k=j}^{i-1} (1+r_k)} \right) \right) \tag{18}$$

Für $l \leq i-1$:

$$\frac{\partial d_i}{\partial r_l} = \left(\frac{r_i}{(1+r_i)(1+r_l)} \left(\sum_{j=1}^{l} \frac{1}{\prod_{k=j}^{i-1} (1+r_k)} \right) \right) \tag{19}$$

Hier verhält es sich natürlich mit den Vorzeichen genau umgekehrt. Eine Zunahme der i-ten Par-Rate induziert eine Reduzierung des i-ten Diskontfaktors. Eine Zunahme der l-ten Par-Rate ($l < i$) bewirkt eine Erhöhung des i-ten Diskontfaktors.

8. Resumee

In diesem Artikel wurde dargelegt, wie eine Diskont- bzw. Zinskurve im Geld- und Kapitalmarktbereich sinnvollerweise aufgebaut werden kann. Dabei wurde – ausgehend von einer allgemeinen Darstellung des üblicherweise im Kapitalmarktbereich zur Generierung der Diskontfaktoren verwendeten Bootstrapping-Verfahrens – motiviert, wie die Diskontfaktoren und Zero-Rates durch die Verwendung expliziter Formeln effektiver ermittelt werden können. Diese Vorgehensweise reduziert die numerische Komplexität. Zudem sind diese expliziten Formeln eine notwendige Voraussetzung, um Sensitivitätsanalysen durchzuführen. Sensitivitäten wiederum sind ein wichtiger Bestandteil moderner Risikomanagementsysteme.

Anhang

1. Beziehungen zwischen Diskontfaktoren, Zero-Rates und Forward-Rates im Kapitalmarkt

$F_{0,i} := z_i$
$d_0 := 1$

Jährlich diskrete Verzinsung:

$$d_i = \frac{1}{(1+z_i)^{t_i}} \Leftrightarrow z_i = \sqrt[-t_i]{d_i} - 1 \tag{20}$$

$$d_j = d_i \frac{1}{(1+F_{i,j})^{t_j - t_i}} \Leftrightarrow F_{i,j} = \sqrt[t_j - t_i]{\frac{d_i}{d_j}} - 1 \tag{21}$$

Stetige Verzinsung:

$$d_i = e^{-t_i z_i} \Leftrightarrow z_i = -\frac{\ln d_i}{t_i} \tag{22}$$

$$d_i = e^{-(t_j - t_i)F_{i,j}} \Leftrightarrow F_{i,j} = \frac{\ln \frac{d_i}{d_j}}{t_j - t_i} \tag{23}$$

Notation:

z_i: Zero-Rate für Fristigkeit t_i
d_i: Diskontfaktor für Fristigkeit t_i
$F_{i,j}$: Forward-Rate von t_i nach t_j

2. Beweis zur Bestimmung der Inversen der Cash-Flow-Matrix

Es gilt: Die Inverse der Cash-Flow-Matrix C ist gegeben durch:

$$C^{-1}_{ij} = \begin{cases} 0 & i < j \\ \dfrac{1}{1+r_i} & i = j \\ -\dfrac{r_i}{\prod_{k=j}^{i}(1+r_k)} & i > j \end{cases}$$

Beweis:

Zu zeigen ist: $\sum_{l=1}^{n} C^{-1}_{il} C_{lj} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$

Für i = j und i < j ist die Behauptung offensichtlich richtig, so dass die Behauptung zu zeigen bleibt für i > j:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{n} C^{-1}_{il} C_{lj} &= \sum_{l=j}^{i} C^{-1}_{il} C_{lj} \\ &= C^{-1}_{ij} C_{jj} + C^{-1}_{ii} C_{ij} + \sum_{l=j+1}^{i-1} C^{-1}_{il} C_{lj} \\ &= -\frac{r_i(1+r_j)}{\prod_{k=j}^{i}(1+r_k)} + \frac{r_i}{1+r_i} - \sum_{l=j+1}^{i-1} \frac{r_i r_l}{\prod_{k=l}^{i}(1+r_k)} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist 0 falls:

$$\frac{1}{\prod_{k=j+1}^{i-1}(1+r_k)} + \sum_{l=j+1}^{i-1} \frac{r_l}{\prod_{k=l}^{i-1}(1+r_k)} = 1$$

Man muss also für beliebige reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_m$ zeigen, dass:

$$\frac{1}{\prod_{\rho=1}^{m}(1+x_\rho)} + \sum_{l=1}^{m} \frac{x_l}{\prod_{\rho=1}^{m}(1+x_\rho)} = 1$$

gilt.

Für m = 1 ist dies trivial. Mit Induktion nach m folgt für m > 1, dass:

$$\frac{1}{\prod_{\rho=1}^{m}(1+x_\rho)}+\sum_{l=1}^{m}\frac{x_l}{\prod_{\rho=1}^{m}(1+x_\rho)}$$

$$=\frac{\frac{1}{\prod_{\rho=1}^{m-1}(1+x_\rho)}+\sum_{l=1}^{m-1}\frac{x_l}{\prod_{\rho=1}^{m-1}(1+x_\rho)}+x_m}{1+x_m}$$

$$=\frac{1+x_m}{1+x_m}=1 \qquad \text{q.e.d.}$$

3. Explizite Formeln für Zero-Rates

a) Verwendung der Restriktionen (R1) und (R3)

Jährlich diskrete Verzinsung:

$$z_i=\sqrt[-t_i]{d_i}-1$$

$$=\sqrt[-t_i]{\frac{1}{1+r_i}\left\{DP_i-r_i\sum_{j=1}^{i-1}\frac{DP_j}{\prod_{k=j}^{i-1}(1+r_k)}\right\}}-1 \qquad (24)$$

Stetige Verzinsung:

$$z_i=\frac{-\ln d_i}{t_i}=$$

$$\frac{-\ln\left(\frac{1}{1+r_i}\left\{DP_i-r_i\sum_{j=1}^{i-1}\frac{DP_j}{\prod_{k=j}^{i-1}(1+r_k)}\right\}\right)}{t_i} \qquad (25)$$

b) Verwendung der Restriktionen (R1), (R2), (R3) und (R4)

Jährlich diskrete Verzinsung:

$$z_i=\sqrt[-t_i]{d_i}-1$$

$$=\sqrt[-t_i]{\frac{1}{1+r_i}\left\{1-r_i\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{\prod_{k=j}^{i-1}(1+r_k)}\right\}}-1 \qquad (26)$$

Stetige Verzinsung:

$$z_i=\frac{-\ln d_i}{t_i}=\frac{-\ln\left(\frac{1}{1+r_i}\left\{1-r_i\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{\prod_{k=j}^{i-1}(1+r_k)}\right\}\right)}{t_i} \qquad (27)$$

Um Missverständnisse zu vermeiden, erklären die Autoren ausdrücklich, dass die dargestellten Interpretationen und Meinungen ausschliesslich ihre persönlichen Auffassungen wiedergeben.

Fussnoten

[1] Vgl. Bank for International Settlement, 1996, S. 22–34.

[2] Da Diskontfaktor und Zero-Rate direkt voneinander ableitbar sind (vgl. Anhang 1), wird im Folgenden in der Regel nur auf eine der beiden Größen Bezug genommen.

[3] Z.B. die Ansätze von VASICEK und FONG (siehe VASICEK, FONG, 1982, S. 339 ff.), NELSON und SIEGEL (siehe NELSON, SIEGEL, 1987, S. 473 ff.) oder SHEA (siehe SHEA, 1984, S. 253 ff.).

[4] Bzgl. der Interpolations- und Regressionsverfahren zur Generierung stetiger Diskontkurven wird z.B. auf GRUBER, 1996, S. 49 ff., verwiesen.

[5] Als Beispiele hierfür seien die Einfaktor-Modelle von VASICEK sowie von HULL und WHITE erwähnt. Eine ausführliche Beschreibung dieser Verfahren findet sich z.B. in BÜHLER, 1995, S. 47 ff. Verschiedene Mehrfaktormodelle werden z.B. bei JARROW, 1996, S. 44 ff. beschrieben.

[6] Im Folgenden werden friktionslose Märkte (d.h. keine Berücksichtigung von Steuern und Transaktionskosten) unterstellt. Bzgl. der Berücksichtigung eines Kapitalmarkts mit Friktionen wird auf TOBLER, 1996, S. 81 ff. verwiesen. Es ist zu beachten, daß die Ermittlung eindeutiger Diskontkurven nur in friktionslosen Märkten möglich ist.

[7] Es wird hier eine jährliche diskrete Verzinsung unterstellt.

[8] Der Diskontfaktor d_i mit Fristigkeit t_i ist gerade als der Preis eines Zero-Bonds mit Nennwert 1 und Restlaufzeit t_i definiert.

[9] Z.B. halbjährlich diskrete, jährlich diskrete, stetige Verzinsung.

[10] Z.B. 30/360, Act/360, Act/Act.

[11] Die Nominalbeträge und Fristigkeiten der einzelnen Zero-Bonds entsprechen jeweils gerade dem gezahlten Coupon bzw. dessen zeitlichen Anfall; lediglich der Nominalbetrag des letzten Zero-Bonds (Fristigkeit = Restlaufzeit des straight Bonds) ist durch die Summe aus Coupon- und Rückzahlungsbetrag des straight bonds gegeben.

[12] Es wird wieder eine jährliche diskrete Verzinsung unterstellt.

[13] Vgl. auch TOBLER, 1996, S. 4 ff.

[14] Eine ausführlichere Darstellung wird z.B. von DREESBACH, 1998, S. 448 ff. vorgenommen.

[15] Aufgrund des linearen Zusammenhangs zwischen Futures-Preis und Forward-Rate wird hier ein Konvexitätseffekt vernachlässigt, um den diese Forward-Rates genaugenommen bereinigt werden müßten. Aufgrund der geringen Restlaufzeiten der Futures kann dieser hier jedoch vernachlässigt werden. Eine Bereinigung der impliziten Forward-Rates um diesen Effekt wird z.B. bei GRUBER, 1996, S. 43 vorgenommen.

[16] Fälligkeiten März, Juni, September und Dezember.

[17] Soll ein längerer Bereich der Zero-Zinskurve als ein Jahr mit Geldmarktfutures aufgebaut werden, so ist aufgrund der unterschiedlichen Tageszählkonventionen im Geldmarkt (Act/360) und Kapitalmarkt (30/360) eine Adjustierung dieser Zero-Rates in sog. „Bond Equivalent Yields“ vorzunehmen; vgl. DREESBACH, 1998, S. 451.

[18] Es ist offensichtlich nur sinnvoll, Finanzinstrumente, die mit einem „ähnlichen“ Kreditrisiko behaftet sind, miteinander zu vergleichen. Deshalb müssen Finanzinstrumente auf einer bonitätsspezifischen Zinskurve bewertet werden.

[19] Neben straight Bonds können dies z.B. Annuitätenanleihen (konstante Auszahlungsbeträge, keine Rückzahlung des Nominalbetrags am Laufzeitende), Step-Up-Bonds oder Step-Down-Bonds (jährlich steigende oder fallende Coupons) sein.

[20] Es ist zu beachten, daß ein Zinsswap in einen gekauften straight Bond (Coupon = Swap Rate) und einen verkauften Floater zerlegt werden kann. Da bei Abschluß des Swaps der Floater rechnerisch einen Wert von 100% aufweist, wird die Swap-Rate gerade so gewählt, daß der straight Bond ebenfalls zu pari notiert und somit keine Ausgleichszahlung zwischen den beiden Kontrahenten eines Swaps erforderlich ist.

[21] Ein Spezialfall ist z.B. bei HULL, 1993, S. 84 ff. beschrieben.

[22] Dies bedeutet insbesondere: Alle Couponperioden sind gleich lang; konstante Couponzahlungen; Auszahlung des Nominalbetrages am Ende.

[23] Die aufgelaufenen Stückzinsen werden gemäß der Tageszählkonvention 30/360 berechnet. Sie ergeben sich z.B. für den Bond 1 durch: $\frac{185}{360} \times 0{,}06 = 0{,}030833$.

[24] Da auf der linken Seite der Gleichung (6) jeweils der gehandelte Preis des Finanzinstruments DP_i steht, ist gewährleistet, daß die iterativ ermittelten Diskontfaktoren konsistent zu den Marktpreisen ermittelt werden.

[25] $CF_{ij} = r_i$ $(j = 1, ..., i-1)$, $CF_{ii} = 1+r_i$.

[26] $DP_i = 1$ $(i = 1, ..., n)$.

[27] Vgl. Anhang 1: Ist der Diskontfaktor d_i bestimmt, so gilt für die Zero-Rate z_i: Jährlich diskrete Verzinsung: $z_i = \sqrt[-t_i]{d_i} - 1$, stetige Verzinsung: $z_i = \frac{-\ln d_i}{t_i}$.

[28] Es ist zu beachten, daß Bonds immer „clean“, d.h. ohne aufgelaufene Stückzinsen quotiert werden. Den

zum Bootstrapping benötigten Dirty Price erhält man, indem man diese Stückzinsen auf den Clean Price addiert.

[29] Dies ist z.B. der Fall, wenn als Input in ein Zinsoptionsmodell (z.B. BLACK 76) eine einzelne Forward-Rate, die sich wiederum aus zwei Diskontfaktoren bzw. Zero-Rates ermitteln läßt, benötigt wird. Die Kenntnis der Diskontfaktoren für den gesamten Laufzeitbereich ist nicht notwendig.

[30] Siehe die Gleichungen (4) bis (6).

[31] Die i-te Komponente ist durch den Dirty Price des i-ten Bonds gegeben.

[32] In der i-ten Zeile der Cash-Flow-Matrix C befinden sich die jeweiligen Cash-Flows des i-ten Bonds zu den Zeitpunkten $t_1, .., t_i$.

[33] D.h. es werden wieder die Restriktionen (R1) und (R3) verwendet.

[34] D.h.: Verwendung der Restriktionen (R1), (R2), (R3) und (R4).

[35] Im Folgenden werden die Sensitivitäten exemplarisch bzgl. der Par-Rates quantifiziert (Zugrundelegung der Restriktionen (R1), (R2), (R3) und (R4)). Es ist jedoch problemlos möglich, die entsprechenden Sensitivitäten bzgl. der Coupons oder der Barwerte zu ermitteln, indem, analog zur folgenden Vorgehensweise, die entsprechenden partiellen Ableitungen bestimmt werden.

[36] Beachte: Swap-Rates sind immer Par-Rates (vgl. Kapitel 5).

[37] Eine umfangreiche Darstellung verschiedener Value-at-Risk-Verfahren wird z.B. von JPMorgan, 1996 vorgenommen.

[38] Basierend auf der Formel (24) im Anhang 3.

[39] Richtungsableitung in Richtung des Vektors $(\Delta_1, ..., \Delta_i)$.

Literaturverzeichnis

BANK FOR INTERNATIONAL SETTLEMENT (1996): Central Bank Survey of Foreign Exchange and Derivatives Market Activity, Basel.

BÜHLER, A. (1995): Einfaktormodelle der Fristenstruktur der Zinssätze, Bern: Verlag Paul Haupt.

DREESBACH, S. (1998): „Pricing, Trading und Hedging von Short-Term-Securities mit Zinsfutures“, in: Handbuch des Risikomanagements, pp. 441–467, ed. ELLER, R., Schäffer-Poeschel-Verlag.

GRUBER, W. (1996): Aufbau und Interpolation von Diskontkurven, in: Interne Risikosteuerungsmodelle, pp. 37–68, Deutsche Bundesbank.

HULL, J. C. (1993): Options, Futures, and Other Derivative Securities, Prentice-Hall, second edition.

JARROW, R. A. (1996): Modelling Fixed Income Securities and Interest Rate Options, The McGraw-Hill Companies, Inc.

JPMorgan (1996): RiskMetrics, Technical Document, fourth edition.

NELSON, R. C. und A. F. SIEGEL (1987): „Parsimonious Modelling of Yield Curves“, in: Journal of Business 60, pp. 473–489.

SHEA, G. S. (1984): „Pitfalls in Smoothing Interest Rate Term Structure Data: Equilibrium Models and Spline Approximations“, Journal of Financial and Quantitative Analysis 19, pp. 253–269.

TOBLER, J. (1996): Schätzung von Zinsstrukturen für den SFr.-Kapitalmarkt unter Berücksichtigung von Friktionen, Bern: Verlag Paul Haupt.

VASICEK, O. A., und H. G. FONG (1982): „Term Structure Modelling using Exponential Splines“, Journal of Finance 37, pp. 339–348.