

Numerische Methoden in der Optionspreistheorie: Monte Carlo und Quasi-Monte Carlo Methoden

1. Einleitung

Im vorliegenden Aufsatz wird die Anwendung von Monte Carlo und Quasi-Monte Carlo Methoden in der Finanzmarkttheorie diskutiert. Im ersten Abschnitt werden die methodischen Grundlagen der herkömmlichen Monte Carlo Methode dargelegt. Anschliessend werden Quasi-Monte Carlo Methoden diskutiert, welche erst kürzlich für finanzmarkttheoretische Anwendungen entdeckt wurden. Es zeigt sich, dass Quasi-Monte Carlo gegenüber der probabilistischen Monte Carlo Methode den Vorteil einer schnelleren Konvergenz aufweisen. Zudem verringert sich die Rechenzeit und damit die Rechenkosten dank der Eigenschaft der Quasi-Monte Carlo Methode, dass die generierten Zahlenfolgen deterministischer Natur sind. Die Vorteile gegenüber der herkömmlichen Monte-Carlo Methode werden an verschiedenen Beispielen illustriert.

2. Einführung

Optionen lassen sich aus der heutigen Finanzwelt nicht mehr wegdenken. Seit 1973 der Artikel von Fischer BLACK und Myron SCHOLEs erschie-

nen ist, sind immer wieder neue Optionsmodelle mit immer komplexeren Payoffstrukturen entwickelt worden. Der Nachteil dieser Modelle liegt darin, dass sie nicht mehr einfache analytisch geschlossene Formeln zulassen. Nur über die Verwendung numerischer Methoden erhält man für diese Optionsmodelle quantitative Resultate[1]. Ziel dieses Aufsatzes ist die Darstellung zweier numerischer Methoden, nämlich der Monte Carlo (MC) Methode und der Quasi-Monte Carlo Methode.

Die MC Methode wird schon seit längerer Zeit für Anwendungen im Finanzbereich verwendet. BOYLE schlug 1977 als erster die MC Methode zur Berechnung gewöhnlicher europäischer Optionspreise vor. Eine andere weit verbreitete numerische Methode ist die Lattice-Methode. Die Lattice-Methode beinhaltet z.B. binomiale und trinomiale Methoden. Lattice-Methoden sind äusserst effizient zur Berechnung einfacher Calls und Puts. Bei der Bewertung von Optionen mit komplexen Payoffstrukturen lässt die Effizienz jedoch stark nach. Insbesondere bei pfadabhängigen (path-dependent) Optionen wächst der Rechenaufwand von Lattice-Methoden exponentiell mit der Tiefe des Baumes respektive mit der Anzahl Zeitschritte an, was eine Berechnung für grosse Baumtiefen fast unmöglich macht. Wenn n die Baumtiefe eines nicht-geschlossenen Binomialbaumes ist, dann beträgt der Berechnungsaufwand 2^n . Mit anderen Worten: Wird die Baumtiefe um 1 vergrössert, so

* Der Autor dankt den Gutachtern Heinz Müller und Heinz Zimmermann für die wertvollen Kommentare. Markus Leippold, s/bf-HSG, Merkurstr.1, 9000 St. Gallen, Tel.: 071 - 220 30 66.

verdoppelt sich der Rechenaufwand resp. der Zeitbedarf. Gerade bei der Bewertung von pfadabhängigen Optionen oder bei gewissen Zinsstrukturmodellen, welche den Zinsprozess mit einem nicht-geschlossenen Baum modellieren (z.B. HEATH/JARROW/MORTON), drängt sich wegen der dimensionsunabhängigen Konvergenzeigenschaft die Anwendung von MC-Simulationen oder die Kombination der beiden Methoden auf.

Als grosser Vorteil der MC Methode erweist sich ihre Flexibilität: beliebige stochastische Prozesse können dem Basiswert bzw. der Option zugrunde gelegt werden. Natürlich läuft man dabei schnell einmal die Gefahr, dass von Prozessspezifikationen ausgegangen wird, welche ökonomisch gesehen keinen Sinn machen und beispielsweise die Bedingung der Arbitragefreiheit verletzen.

Bis vor kurzem wurde ein schwerwiegender Nachteil der MC Methode darin gesehen, dass amerikanische Optionen nur über die Zuhilfenahme von Methoden der dynamischen Programmierung bewertet werden können. HULL (1993) vertritt noch den Standpunkt, dass mittels der Monte Carlo Methode grundsätzlich keine amerikanischen Optionen bewertet werden können. Der Aufsatz von TILLEY (1993) und neuere Arbeitspapiere von GRANT/VORA/WEEKS (1995a) und (1995b) zeigen jedoch, wie durch die Kombination von Monte-Carlo-Simulationen mit der Methode der dynamischen Programmierung amerikanische Optionen berechnet werden können.

Ein Nachteil der einfachen MC-Methode, der angesichts der Fortschritte auf dem Gebiet der Computerleistung jedoch nur temporärer Natur sein dürfte, ist, dass der Rechenaufwand gemessen in Computerzeit für die Erzeugung der benötigten Menge Zufallszahlen immens gross wird. Um gute Approximationen zu erhalten, sind je nach Anwendungsbereich bis zu 1 Mio. Simulationen durchzuführen. Zur Verringerung dieses Rechenaufwandes wurden verschiedene *Variance Reduction Methods* entwickelt, auf die im Abschnitt 3.2 genauer eingegangen wird[2]

In jüngster Zeit wurde die sogenannte Quasi-MC Methode für finanzmarkttheoretische Anwendungen „entdeckt“[3]. Die zahlentheoretische Fundierung von Quasi-Zufallszahlen in der Mathematik liegt bereits einige Jahre zurück[4]. Die Grundidee liegt im Gebrauch von rein deterministischen Zahlenfolgen und nicht etwa von Zufallszahlen (*pseudo-random numbers*) wie bei MC Simulationen. Die bessere Konvergenzeigenschaft von solchen Zahlenreihen erlaubt die Verringerung des Rechenaufwandes. Als zusätzlicher Vorteil erweist sich die Eigenschaft deterministischer Schätzfehler. Dagegen sind bei der MC Methode die Schätzfehler probabilistischer Natur, was dazu führt, dass man nie genau weiss, wie nahe man mit der Schätzung am „wahren“ Wert liegt.

Der Aufbau des Aufsatzes ist folgender: Im nächsten Abschnitt wird kurz die Grundidee der MC Methode vorgestellt. Anhand eines möglichst einfachen Beispiels – der Bestimmung des Wertes einer Calloption – werden einige Simulationen durchgeführt. Zudem wird gezeigt, mit welchen „Tricks“ die Effizienz der Schätzung verbessert werden kann. In Abschnitt 4 wird auf die Quasi-MC Methode eingegangen. Deren Eigenschaften werden graphisch analysiert. Im letzten Abschnitt folgen ein paar Anwendungen, so z.B. die Berechnung des Wertes einer Option mit stochastischer Volatilität des Basispreises sowie die Simulation einer mehrperiodigen Protective Put Strategie.

3. Monte Carlo Methoden

Im vorliegenden Artikel werden MC Methoden für zufallsbedingte Simulationen verwendet. Die MC Simulation ist eine numerische Methode zur Approximation eines erwarteten Wertes einer Zufallsvariable oder eines Zufallsvektors. Von zufallsbedingten oder stochastischen Simulationen wird dann gesprochen, wenn mindestens eine Modellvariable durch einen Zufallsprozess erzeugt wird, sodass das ganze System einem stochastischen Einfluss unterliegt.

Die mittels der Simulation gewonnen Erkenntnisse über das Verhalten des Systems erlauben es, Rückschlüsse auf reale Zusammenhänge zu ziehen, wenn das Modellexperiment dem vorgegebenen System hinreichend ähnlich ist. Mit den hier diskutierten MC Methoden lassen sich unterschiedliche Probleme untersuchen. Darunter fallen zum Beispiel die Lösung von Differential- und Integralgleichungen mit Hilfe statistischer Experimente sowie die Generierung von Stichproben von vorgegebenen stochastischen Prozessen. Das Anwendungsfeld der MC Methoden reicht dabei weit über die Ökonomie hinaus.

Zur allgemeinen Ableitung der Technik der einfachen MC Methode wird zunächst ein Integral

$$\int g(y)f(y)dy = \bar{g}$$

betrachtet, wobei $g(y)$ eine arbiträre Funktion ist. Ferner sei $f(y)$ eine Dichtefunktion mit $\int f(y)dy = 1$. Um eine Schätzung für \bar{g} zu erhalten wird N -mal zufällig ein Wert y_i aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung $f(y)$ gezogen. Der geschätzte Wert von \bar{g} ist dann gegeben durch

$$\hat{g} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(y_i)$$

mit der Standardabweichung

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (g(y_i) - \hat{g})^2}$$

Aufgrund des *zentralen Grenzwertsatzes* lässt sich festhalten, dass die MC Methode probabilistische Fehlergrenzen der Form $O(N^{-1/2})$ zur Folge hat, und zwar *unabhängig* von der Dimension des zu schätzenden Integrals. Weiter gilt aufgrund des *schwachen* und *starken Gesetzes der grossen Zahl*[5]:

$$\lim \Pr\{\hat{g} - \bar{g} > \varepsilon\} = 0, \quad \varepsilon > 0$$

$$\text{bzw.} \quad \Pr\left\{\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{g} = \bar{g}\right\} = 1$$

so dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(y_i) = E[g]$$

Der geschätzte Wert für \bar{g} ist als approximierter Wert nicht eindeutig bestimmt und hängt einerseits von der Realisation der Zufallsgrösse y_i und andererseits von der Anzahl Simulationen N ab. Da y_i bei jeder durchgeführten Simulation andere Werte annimmt, ergeben sich auch entsprechend unterschiedliche Schätzergebnisse. Die Anzahl der Schätzungen beeinflusst die Simulationsergebnisse, indem die Ergebnisausschläge abgeschwächt werden. Die Lösungen werden stabiler. Damit stellt sich die Frage, wie gross die Anzahl Simulationen sein sollte, um genügend genaue Ergebnisse zu erhalten. Für die Beantwortung dieser Frage wird das Konzept des Konfidenzintervalles herangezogen, welches ein Mass für die Approximationsgüte des Schätzergebnisses liefert.

Im *Abschnitt 3.1* wird die MC Methode anhand eines einfachen Beispiels veranschaulicht. Den Simulationen liegen jeweils *kongruente Zufallsgeneratoren*[6] zugrunde. Für das bessere Verständnis und zwecks Darstellung der Konvergenzeigenschaften wird der Wert einer europäischen plain-vanilla Option simuliert, für welche die bekannte, analytisch geschlossene Formel von BLACK-SCHOLES existiert.

3.1 Monte Carlo Simulation für eine BLACK/SCHOLES Calloption

Bestimmung des Optionspreises

Der Optionswert wird über die Simulation des Weges berechnet, den der Basiswert der Option in der Zeit beschreitet. Der Payoff einer europäischen Calloption bei Ablauf der Laufzeit beträgt

$V_T = \max\{S - X, 0\}$ bzw. bei positiver Restlaufzeit $V_t = e^{-r(T-t)}E[\max\{S - X, 0\}]$. [7] Wird nun ein Modell vorgegeben, welches die Dynamik des Basiswertes – wir nehmen eine Aktie als Basiswert an – beschreibt, so kann über die MC Simulation der erwartete Wert der Calloption bei Ausübung berechnet werden. Die Standardannahme für die Aktienkursdynamik ist die geometrische Brownsche Bewegung – im diskreten Fall in der Form $S_{t+\Delta t} = S_t e^{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}}$. Unter der Annahme von Risikoneutralität ist $\ln(S_T/S_0)$ normal verteilt und zwar mit dem Erwartungswert $(r - q - \sigma^2/2)\Delta t$ und der Varianz $\sigma^2 \Delta t$.

Jede Iteration von $S_{t+\Delta t} = S_t e^{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}}$ ergibt einen möglichen Aktienwert zum Ausübungszeitpunkt T . Je höher die Anzahl durchgeführter Iterationen, desto höher die Genauigkeit der Bewertung. Nach der MC Simulationen für die Aktienkurse besteht der nächste Schritt darin, den heutigen Wert des Calls als den abdiskontierten Durchschnitt der simulierten Callwerte zum Zeitpunkt T zu bestimmen. Über die Standardabweichung der einzelnen Callwerte kann anschliessend ein Konfidenzintervall berechnet werden. Im Falle einer Normalverteilung würde der tatsächliche Wert der Variable mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% innerhalb eines Intervalls von ± 2 Standardabweichungen um den Erwartungswert liegen. Die dazugehörigen Risikoparameter, deren Bestimmung für das Hedging einer Risikoposition unerlässlich ist, lassen sich relativ einfach über die Anwendung der Kettenregel in eine für die Simulation geeignete Form bringen. Mit v wird die abdiskontierte Payoff-Funktion der Option nach Ablauf der Laufzeit definiert:

$$v \equiv e^{-rT} \max\{S_T - X, 0\}$$

Ferner gelte $V = E[v]$. Das *Delta* lässt sich dann bestimmen als partielle Ableitung des erwarteten Payoffs der Option V nach dem Basiswert S :

$$\Delta \equiv \frac{\partial V}{\partial S}$$

$$\frac{\partial v}{\partial S_0} = \frac{\partial v}{\partial S_T} \frac{\partial S_T}{\partial S_0} = e^{-rT} 1_{\{S_T > X\}} e^{(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}\epsilon} = e^{-rT} 1_{\{S_T > X\}} \frac{S_T}{S_0}$$

wobei

$$1_{\{S_T > X\}} = \begin{cases} 1 & \text{für } S_T \geq X \\ 0 & \text{für } S_T < X \end{cases}$$

eine Indexfunktion bezeichnet.

Es kann gezeigt werden, dass die Schätzung des *Delta* unverzerrt ist [8].

$$E\left[\frac{\partial v}{\partial S_0}\right] = \frac{\partial V}{\partial S_0}$$

Analog gestaltet sich das Vorgehen bei der Bestimmung der übrigen Greek-Letters.

3.2 Variance Reduction Techniken

Einer der grossen Vorteile der MC Methode liegt darin, dass der Erwartungsfehler der Schätzung dimensionsunabhängig ist. Nachteilig erweist sich jedoch, dass die Konvergenzrate nur proportional zu $\sqrt{1/N}$ ist. Wenn man also die Standardabweichung der Schätzung um den Faktor p verringern will, dann müssen p^2 -mal mehr Simulationen durchgeführt werden, d.h. es müssten für eine Halbierung der Standardabweichung viermal mehr Simulationen durchgeführt werden. Dies führt dazu, dass die Kosten der Simulation – gemessen in Rechenzeit – im Vergleich zur verbesserten Genauigkeit überproportional anwachsen. Um die Effizienz von Computersimulationen zu verbessern, wurden verschiedene Techniken entwickelt. Im folgenden werden die *Antithetic Variates* und die *Control Variates* Techniken kurz erläutert, da sich diese häufig bei finanzmarkttheoretischen Simulationsproblemen finden. Die *Control Variates*

tes Technik lässt sich im übrigen nicht nur auf MC Simulationen, sondern auch auf die weiter unten vorgestellten Quasi-MC Simulationen anwenden.

Antithetic Variates

Die *Antithetic Variates* Methode geht von zwei korrelierten Schätzungen für \bar{g} aus und kombiniert diese auf eine bestimmte Weise. Als Beispiel werden in einem ersten Schritt eine Folge gleichverteilter Zufallszahlen $u_1, u_2, u_3, \dots \in [0,1]$ ausgewählt. Anschliessend wird eine zweite Folge über die Transformation $(1 - u_1), (1 - u_2), (1 - u_3), \dots$ generiert. Das zu schätzende Integral lautet

$$E[g] = \int_0^1 g(u) du$$

Aus den beiden Folgen von Zufallszahlen wird eine Hilfsfunktion

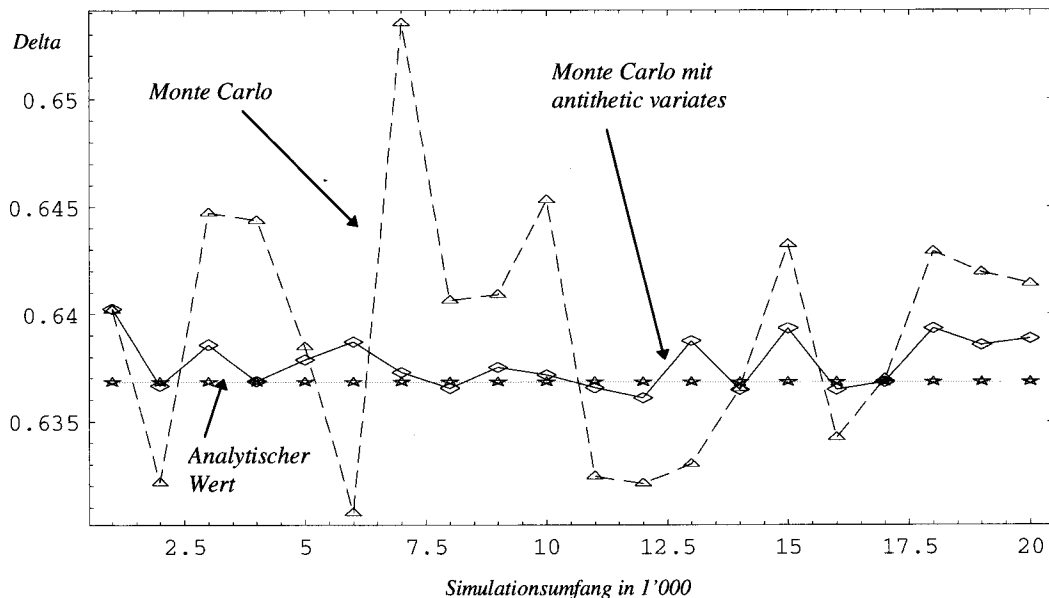
$$f = \frac{1}{2}(g(u) + g(1 - u))$$

aufgestellt, und es wird folgender Ausdruck geschätzt

$$E[g] = E[f] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(u_i) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (g(u_i) + g(1 - u_i))$$

Der Beweis für die varianzreduzierende Eigenschaft der *Antithetic Variates* wird im Anhang angeführt.

Abbildung 1: Schätzung des Deltas einer plain vanilla Option mittels MC und Antithetic Variates



Annahmen:

Aktienkurs:	$S_0 = 100$
Ausübungspreis:	$X = 100$
risikoloser Zinssatz:	$r = 5\%$
Volatilität:	$\sigma = 20\%$
Restlaufzeit:	$t = 1 \text{ Jahre}$

Zur Veranschaulichung der durch die Anwendung der *Antithetic Variates* Methode erreichten Verbesserung der Konvergenz wurde das Delta einer BLACK/SCHOLES-Option gemäss Abschnitt 3.1 geschätzt und dem aufgrund der analytischen Formel berechneten Wert gegenübergestellt. Die Ergebnisse findet man in Abbildung 1. Der heutige Wert des Basiswertes sowie der Ausübungspreis der unterstellten Calloption betragen 100, die Volatilität 20% und der risikolose Zinssatz 5%. Die Restlaufzeit beläuft sich auf ein Jahr.

Es zeigt sich, dass die *Antithetic Variates* Methode eine eindeutige Verbesserung bringt. Einerseits konvergiert der Wert schneller zum analytisch berechneten Wert des Deltas, andererseits fällt die Standardabweichung der Schätzung geringer aus. In Abbildung 2 wurde die Standardabweichung der Schätzung aufgrund der gewöhnlichen und jener mit *Antithetic Variates* verbesserten MC Methode gegenübergestellt. Dank der Anwendung dieser varianz-reduzierenden Methode, welche kaum zusätzliche Rechenzeit beansprucht, kann die Standardabweichung im angeführten Beispiel

um ungefähr 30% reduziert werden. Ohne die Anwendung der *Antithetic Variates* Methode müsste der Simulationsumfang mehr als verdoppelt werden, um die gleiche Reduktion der Standardabweichung zu erreichen.

Control Variates

Wie die *Antithetic Variates* Methode versucht die *Control Variates* Methode Korrelationen zwischen zwei Grössen auszunutzen, um die Varianz der Schätzung zu verringern. Bei der *Control Variates* Methode wird die Präzision erhöht, indem das vorliegende Problem in einen analytisch lösba- ren Teil und einen noch zu schätzenden Rest auf- gebrochen wird. Falls also das Integral

$$\int g(y)h(y)dy = G$$

mit $h(y)$ als Dichtefunktion eine analytische Lösung besitzt, so kann \bar{g} neu geschrieben werden als

Abbildung 2: Standardabweichung der MC-Schätzung des Deltas

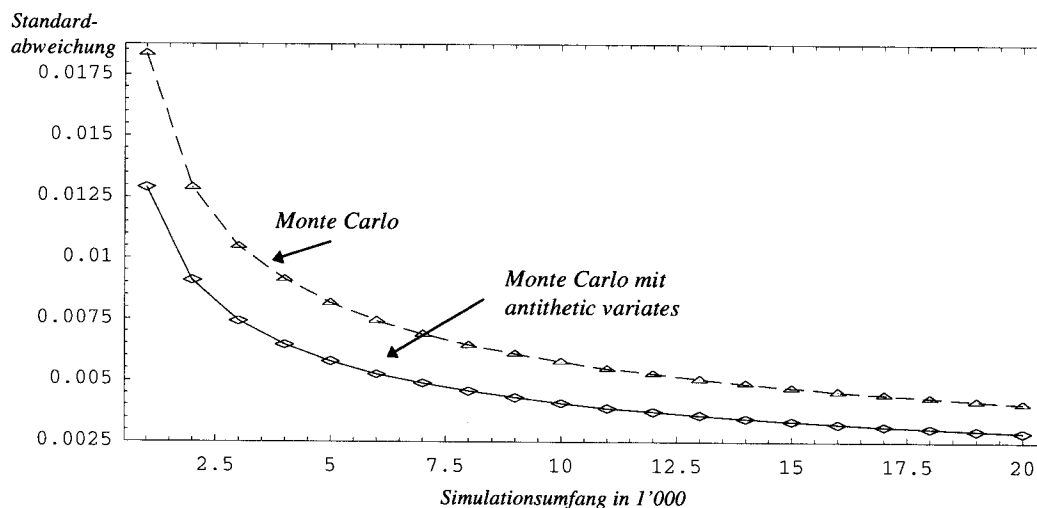
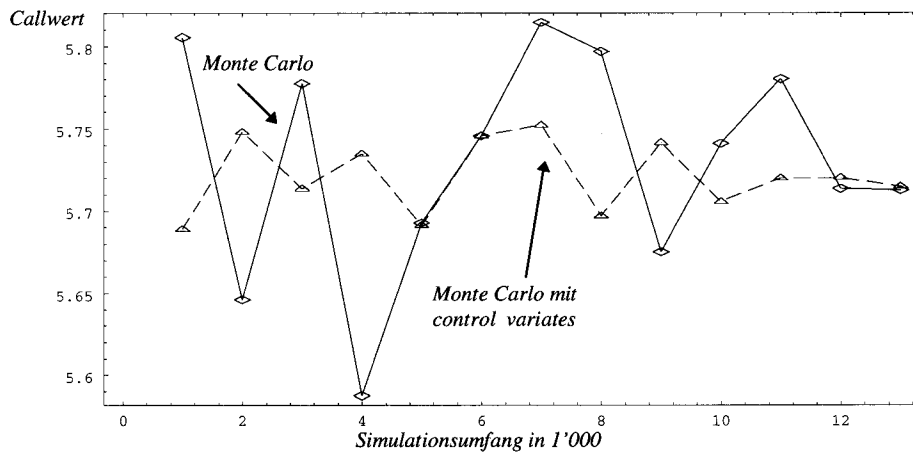


Abbildung 3: MC und Control Variates für die Bewertung einer asiatischen Option auf das arithmetische Mittel



Annahmen:
 Aktienkurs: $S_0 = 100$
 Ausübungspreis: $X = 100$
 risikoloser Zinssatz: $r = 5\%$
 Volatilität: $\sigma = 20\%$
 Restlaufzeit: $t = 0.5$ Jahre
 Averaging Periode: $m = 0.1 - 0$

$$\bar{g} = G + \int g(y)(f(y) - h(y))dy$$

Die Schätzung für \bar{g} lautet dann

$$\begin{aligned} \hat{g}^* &= G + \left(\int g(y)f(y)dy - \int g(y)h(y)dy \right) \\ &= G + (\hat{g} - \hat{G}) \end{aligned}$$

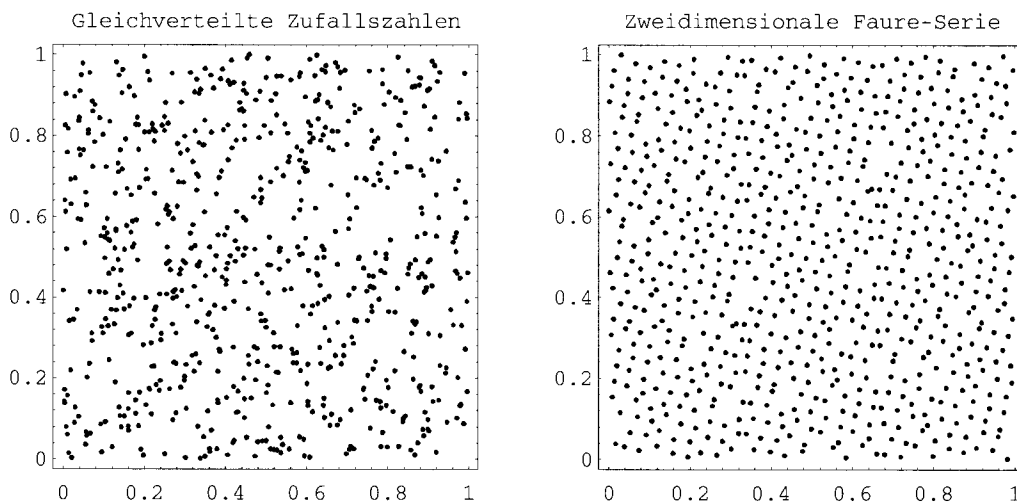
mit der Varianz

$$\text{Var}[\hat{g}] + \text{Var}[\hat{G}] - 2\text{Cov}[\hat{g}, \hat{G}]$$

Die Schätzung mittels der *Control Variates* Methode wird genau dann präziser, wenn

$$\text{Corr}[\hat{g}, \hat{G}] > \frac{\sqrt{\text{Var}[\hat{G}]/\text{Var}[\hat{g}]}}{2}$$

Um die varianz-reduzierende Eigenschaft dieser Methode zu veranschaulichen, wurde anhand einer MC Simulation eine asiatische Option auf das arithmetische Mittel des Basiswertes über eine bestimmte Periode berechnet. Die Laufzeit der asiatischen Option beträgt ein halbes Jahr. Für die Berechnung des Basiswertes, der in die Optionsbewertung einfließt, wurde das arithmetische Mittel der letzten 30 Tage der Laufzeit des Kontraktes genommen. Zur Implementierung der *Control Variates* Methode wurde zum simulierten Wert für die asiatische Option die Differenz der Werte einer BLACK/SCHOLES-Option addiert, berechnet nach der geschlossenen Formel und geschätzt aufgrund der MC Simulation. Die Laufzeit der BLACK/SCHOLES-Option erstreckt sich dabei über die ersten fünf Monate der Laufzeit der asiatischen Option. Das Ergebnis dieser Simulation ist aus Abbildung 3 ersichtlich.

Abbildung 4: Generierung gleichverteilter Zufallszahlen in I^2 über MC bzw. Quasi-MC

Auch hier zeigt sich, dass die mit der Control Variates Methode erweiterte MC Simulation signifikant bessere Resultate liefert. Es ergeben sich weniger extreme Ausschläge als bei der herkömmlichen Methode und der geschätzte Wert konvergiert schneller gegen den „wahren“ Wert.

4. Quasi-Monte Carlo Methode

Die stochastische Natur der MC Methode führt zu einigen unerwünschten Nebenerscheinungen:

- Es gibt nur probabilistische Fehlergrenzen. $O(N^{-1/2})$ ist nur ein absoluter Wert für den durchschnittlichen Schätzfehler. Der realisierte Fehler ist eine Zufallsvariable.
- Die Regularität des Integranden ist nicht ersichtlich.
- Die Generierung von Zufallszahlen ist zeitaufwendig und nicht immer einfach.

Tatsächlich erweist sich nach genauer Analyse (vgl. NIEDERREITER (1992), Kapitel 2), dass nicht die „wahre“ Zufälligkeit der Simulationen ausschlaggebend für die Genauigkeit der Resultate ist, sondern vielmehr in einem ersten Schritt der

Grad der Gleichverteilung der Simulation innerhalb der Integrationsgrenzen. Dies führt zur Idee, die s -dimensionalen Punkte so auf eine deterministische Art und Weise zu bestimmen, dass die Räume zwischen den Punkten möglichst gering ausfallen. Genau dies ist das Grundprinzip der Quasi-MC Methode.

Während MC Methoden auf zufälligen – oder besser gesagt – pseudo-zufälligen Punkten[9] beruhen, stützen sich Quasi-MC Methoden auf die Verwendung von rein deterministischen Punkten. Das Ziel besteht darin, möglichst nahe an die Gleichverteilung zu kommen. In der Regel besitzen quasi-zufällige Punkte – oder weniger irreführend auch *low-discrepancy*-Punkte genannt – die Eigenschaft, den Raum gleichmässiger als die mittels eines herkömmlichen Zufallsgenerators simulierten Punkte auszufüllen.

Zum Vergleich der MC- und Quasi-MC Methode werden in Abbildung 4 jeweils gleichviele Punkte generiert, welche das Einheitsquadrat abdecken sollen. Links wurden die Punkte über einen Zufallsgenerator berechnet, während rechts die weiter unten beschriebene zweidimensionale FAURE-Folge verwendet wurde.

Man sieht deutlich, wie die zufälligen Punkte dazu tendieren, Clusters zu bilden bzw. Löcher offen zu lassen. Die quasi-zufälligen Punkte füllen dagegen das Einheitsquadrat gleichmässig aus. Dies lässt darauf schliessen, dass neben den deterministischen Fehlergrenzen die Quasi-MC Methode bessere Konvergenzeigenschaften als weiteren Vorteil gegenüber der MC Methode aufweist[10].

Als Mass für die Raumaufteilung dient die *Diskrepanz*. Für eine genaue Definition der Diskrepanz wird auf NIEDERREITER (1992) verwiesen. Obwohl die Frage noch ungeklärt ist, welche Punktfolgen im s -dimensionalen Raum die geringste Diskrepanz aufweisen, sind verschiedene *low-discrepancy*-Punktfolgen bekannt, wie etwa die FAURE- und die SOBOL-Folge. Ein Vergleich zwischen der SOBOL- und der HALTON-Folge zur Bewertung von MBS, findet sich in PAS-KOV/TRAUB (1995). Diese kamen zum Ergebnis, dass die SOBOL-Folge signifikant bessere Resultate hinsichtlich der Konvergenzeigenschaft liefert. Anhand der zweidimensionalen FAURE-Folge lässt sich zudem die Eigenschaft verdeutlichen,

wie gleichmässig die *low-discrepancy*-Punkte die Lücken im Einheitsquadrat schliessen. Links in Abbildung 5 werden die ersten 200 Punkte abgetragen. Auf der rechten Seite werden die Punkte 201 bis 750 hinzugefügt.

Es zeigt sich, dass die Punkte „irgendwie“ wissen, wie die Lücken zu füllen sind, welche nach den ersten 200 Punkten noch offen sind.

In der Finanzmarkttheorie werden vor allem normalverteilte Zufallszahlen benötigt. Wird die FAURE-Folge $(\phi_1^1, \phi_2^2, \dots, \phi_n^k, \dots, \phi_n^s)$ generiert, so besteht der nächste Schritt in der Transformation

$$\varepsilon_n = \Phi^{-1}(\phi_n) = (\Phi^{-1}(\phi_n^1), \dots, \Phi^{-1}(\phi_n^k), \dots, \Phi^{-1}(\phi_n^s))$$

mit Φ^{-1} als Inverse der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung[11]. In den vorliegenden Beispielen wird eine der NEWTON Methode ähnliche Approximation gewählt, wobei nicht eine lineare, sondern eine Approximation vierten Grades implementiert wurde.

Abbildung 5: Low-discrepancy Eigenschaft der Quasi-MC

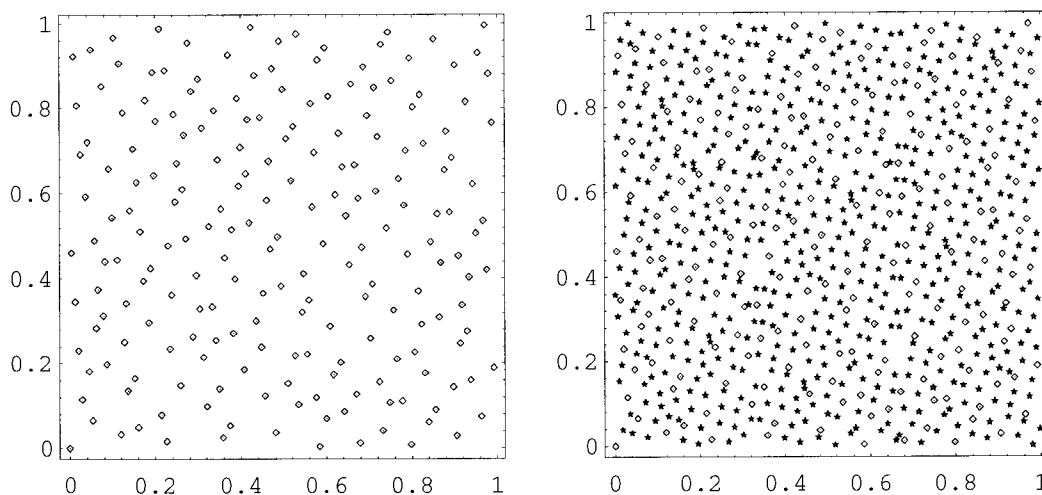


Abbildung 6: Simulation einer Standardnormalverteilung mit MC und Quasi-MC

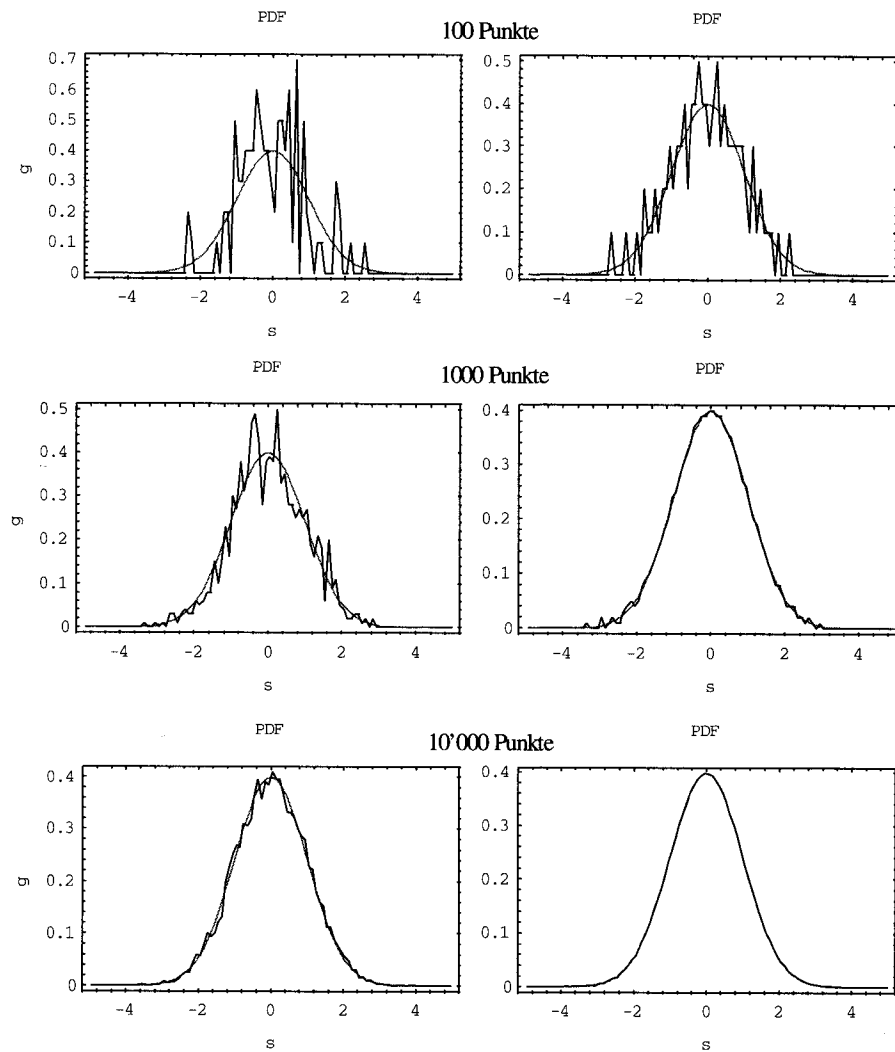


Abbildung 6 zeigt, wie schnell die Quasi-MC Methode im Vergleich zur herkömmlichen MC Methode zu einer Normalverteilung konvergiert. Links wird jeweils eine Normalverteilung mittels einer gewöhnlichen MC Methode simuliert und der Dichtefunktion der Normalverteilung gegenübergestellt. Rechts findet sich eine mittels FAURE-Folge entsprechend simulierte Normalverteilung. In der ersten Folge werden 100 Punkte, in

der zweiten 1000 Punkte und in der dritten Folge 10'000 Punkte simuliert. Schon rein graphisch zeigt sich die Überlegenheit der Konvergenzeigenschaft der Quasi-MC Methode gegenüber der traditionellen MC Methode.

5. Einige Anwendungen

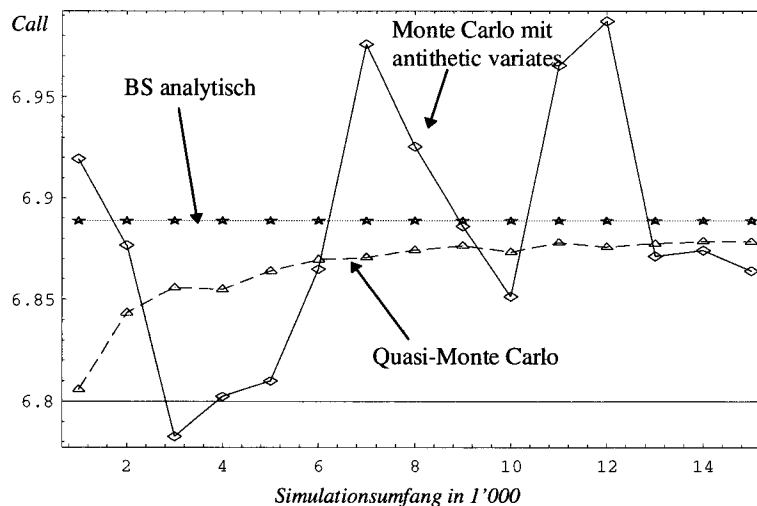
5.1 Vergleich der Monte Carlo und der Quasi-Monte Carlo Methode anhand des BLACK/SCHOLES-Modelles

Im folgenden wird die Konvergenzeigenschaft der Schätzung aufgrund der MC und der Quasi-MC Methode relativ zum mit der analytisch-geschlossenen Formel von BLACK/SCHOLES berechneten Optionswert verglichen. Zur Erhöhung der Effizienz der MC Simulation wurde die Antithetic Variates Methode angewandt. Abbil-

dung 7 stellt die Ergebnisse für die BLACK/SCHOLES Option gegenüber.

Die Vorteile der Quasi-MC Methode sind deutlich ersichtlich. Der simulierte Wert konvergiert viel schneller zu jenem Wert, der mit der analytischen Formel berechnet wurde. Nach ca. 15'000 Simulationen ist die Abweichung minimal und nimmt gleichmässig weiter ab. Bei der MC Simulation liegt der Wert nach 15'000 Simulationen zwar auch in der Nähe des BLACK/SCHOLES-Wertes, doch die Abweichung könnte sich für die weiteren Simulationen wieder erhöhen.

Abbildung 7: Simulation einer europäischen Calloption



Annahmen:

Aktienkurs:

$$S_0 = 100$$

Ausübungspreis:

$$X = 100$$

risikoloser Zinssatz:

$$r = 5\%$$

Volatilität:

$$\sigma = 20\%$$

Restlaufzeit:

$$t = 0.5 \text{ Jahre}$$

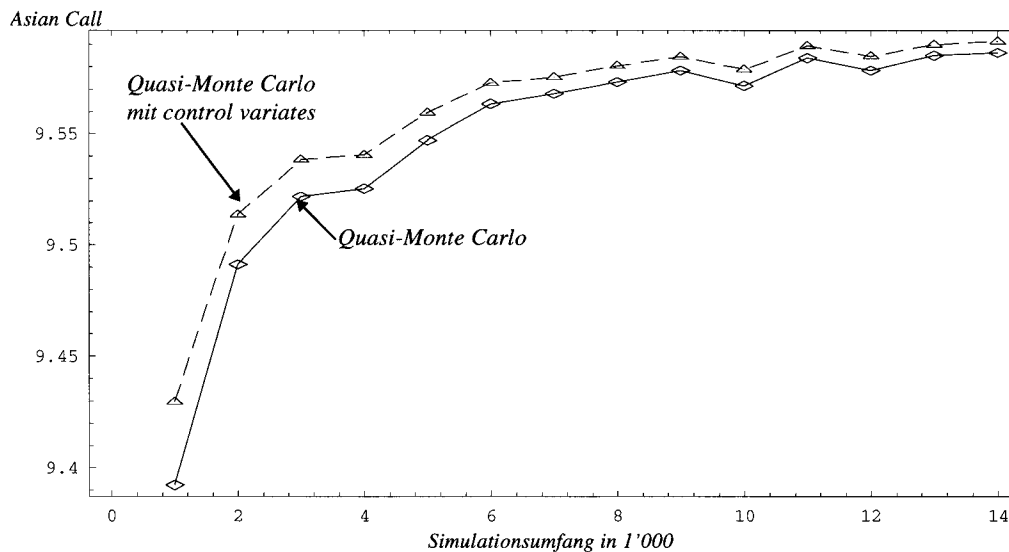
5.2 Asian Options

Während analytisch geschlossene Formeln für asiatische Optionen auf das geometrische Mittel des Basiswertes dank der Lognormalverteilung des Mittels existieren[11], sind für asiatische Optionen auf das arithmetische Mittel keine analytischen Lösungen herleitbar. Asiatische Optionen sind bei multinationalen Unternehmen vor allem dann zur Absicherung von Währungsrisiken beliebt, wenn die Unternehmen in periodischen Abständen Transaktionen tätigen. In solchen Fällen

erweist sich die Anwendung von asiatischen Optionen für das Hedging als vorteilhaft. Zudem ist es bei der Ausgestaltung von Manager-Optionen aus Gründen der Anreizverträglichkeit sinnvoller, die Performance als ein arithmetisches Mittel über eine Geschäftsperiode zu berechnen und nicht aufgrund eines einzigen Wertes nach Ablauf der Periode zu bestimmen.

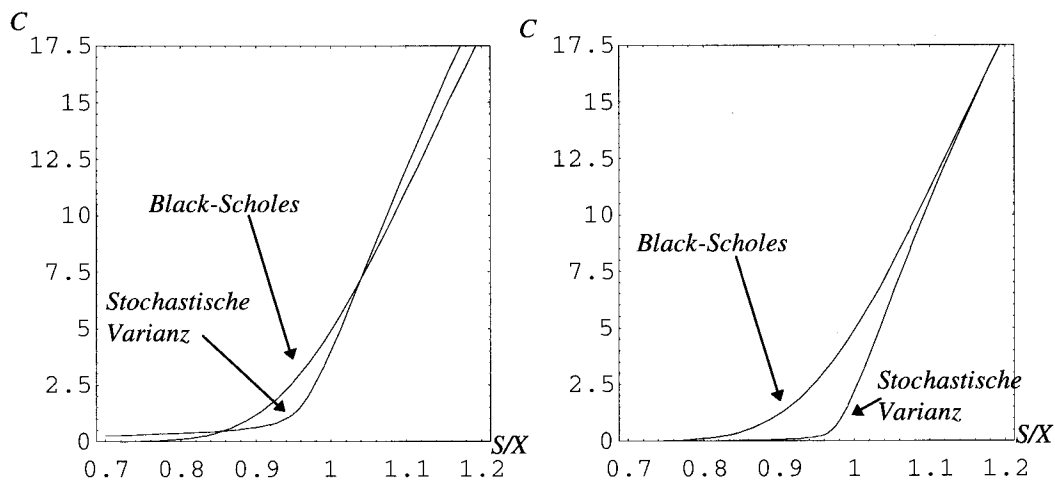
In Abbildung 8 wird anhand der Quasi-MC Methode eine dreijährige asiatische Option auf das arithmetische Mittel berechnet. Das arithmetische Mittel wird jeweils mit den realisierten Werten des

Abbildung 8: Quasi-MC und Control Variates für die Bewertung einer asiatischen Option



Annahmen:
 Aktienkurs: $S_0 = 50$
 Ausübungspreis: $X = 50$
 risikoloser Zinssatz: $r = 5\%$
 Volatilität: $\sigma = 20\%$
 Restlaufzeit: $t = 2$ Jahre
 Averaging: *halbjährlich*

Abbildung 9: Volatility Smile I



Annahmen:

Aktienkurs: $S_0 = 100$
 Ausübungspreis: $X = 100$
 risikoloser Zinssatz: $r = 5\%$
 Volatilität: $\sigma = 20\%$
 Restlaufzeit: $t = 0.274$ Jahre
 Volatilitätsparameter $\zeta = 3$
 Volatilitätsdrift $\mu = 0$
 Korrelation Aktie-Varianz $\rho = -0.5$

$S_0 = 100$
 $X = 100$
 $r = 5\%$
 $\sigma = 20\%$
 $t = 0.274$ Jahre
 $\zeta = 1$
 $\mu = 0$
 $\rho = -0.5$

Underlying nach einem Semester berechnet. Um die Konvergenzeigenschaft zu verbessern, wird die *Control Variates* Methode angewandt. Für den Modellinput werden die Annahmen der vorangegangenen Beispiele übernommen. Es zeigt sich, dass die Control Variates Methode zwar eine Verbesserung herbeiführen kann, dass diese aber geringer ausfällt als bei der herkömmlichen MC-Methode.

5.3 Das HULL/WHITE Modell mit stochastischer Volatilität

Seit der Publikation von BLACK/SCHOLES (1973) wurde immer wieder die Frage erörtert, ob und allenfalls wie die Annahme einer konstanten Volatilität aufzuheben sei. HULL/WHITE haben

das Problem stochastischer Volatilitäten in ihrem 1987 erschienenen Artikel gelöst. Ausgangslage im HULL/WHITE Modell bilden die stochastischen Prozesse für den Aktienkurs

$$dS = \phi S dt + \sigma S dw$$

und die Aktienkursvarianz

$$d\sigma^2 = \mu \sigma^2 dt + \zeta \sigma^2 dz$$

wobei die Wiener Prozesse dw und dz die Korrelation ρ besitzen. Die Prozessspezifikation für die Varianz garantiert, dass diese nie negativ wird. HULL/WHITE leiten für europäische Optionen über die von GARMAN (1977) aufgestellten Differentialgleichungen eine Lösung her, welche auf einer Reihenentwicklung des Optionspreises basiert.

Daneben präsentieren sie aber auch die Resultate von MC Simulationen[12]. Diese basieren in einer risikoneutralen Welt auf dem Differenzgleichungssystem der Form

$$S_i = S_{i-1} \exp \left[\left(r - \frac{\sigma_{i-1}^2}{2} \right) \Delta t + \varepsilon_{1,i} \sigma_{i-1} \sqrt{\Delta t} \right]$$

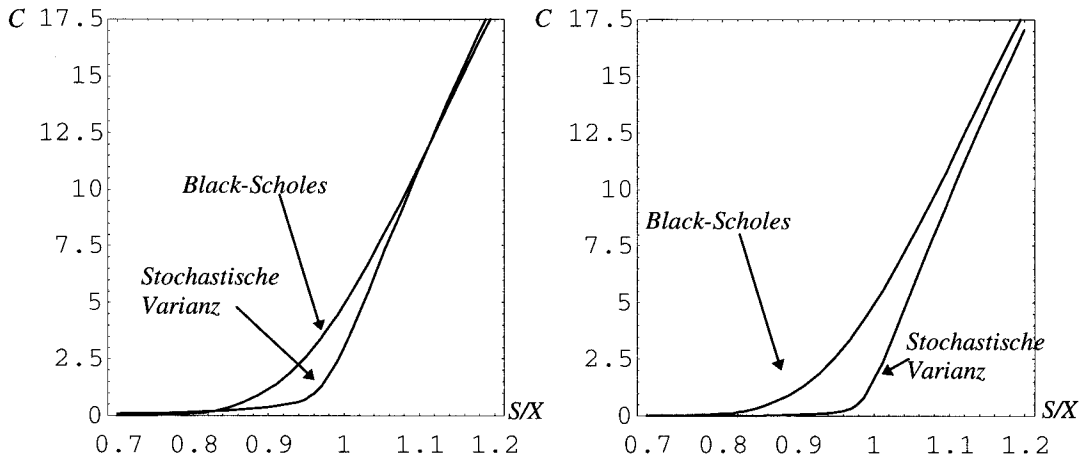
$$\sigma_i^2 = \sigma_{i-1}^2 \exp \left[\left(\mu - \frac{\zeta^2}{2} \right) \Delta t + \rho \varepsilon_{1,i} \zeta \sqrt{\Delta t} + \sqrt{1-\rho^2} \varepsilon_{2,i} \zeta \sqrt{\Delta t} \right]$$

Der Wert einer Calloption ergibt sich dann aus $e^{-rt} \max[S_n - X, 0]$. Für das folgende Simulationsbeispiel wird von einer Calloption mit einer Restlaufzeit von 100 Tagen ausgegangen. Das Zeitintervall des Aktienkurspfades wird auf einen Tag festgelegt. Dies macht die Generierung einer 100-dimensionalen FAURE-Folge notwendig. Zur

Verbesserung der Genauigkeit der Simulation wird die *Control Variates Technique* verwendet. Für jeden Zeitpunkt werden jeweils 2'500 Simulationenwerte berechnet. Die Ergebnisse und ein Vergleich zum BLACK/SCHOLES Modell sind in den Abbildungen 9 und 10 zusammenfassend dargestellt. Dabei wird in Abbildung 9 von folgenden Annahmen ausgegangen:

Die Simulationsergebnisse erweisen sich als konsistent mit den Resultaten von HULL/WHITE (1987): Europäische at-the-money Calloptionen werden durch das BLACK/SCHOLES Modell überbewertet, währenddessen tief in-the-money liegende Optionen in der Regel unterbewertet werden. Dieses Phänomen ist in der Finanzmarktliteratur unter dem Begriff „Volatility Smile“ bekannt. Die Resultate sind vor allem stark abhängig von der Wahl der Inputparameter. In Abbildung 10 werden folgende Annahmen getroffen:

Abbildung 10: Volatility Smile II



Annahmen:

Aktienkurs: $S_0 = 100$
 Ausübungspreis: $X = 100$
 risikoloser Zinssatz: $r = 5\%$
 Volatilität: $\sigma = 20\%$
 Restlaufzeit: $t = 0.274$ Jahre
 Volatilitätsparameter $\zeta = 2$
 Volatilitätsdrift $\mu = 0$
 Korrelation Aktie-Varianz $\rho = 0.25$

$S_0 = 100$
 $X = 100$
 $r = 5\%$
 $\sigma = 20\%$
 $t = 0.274$ Jahre
 $\zeta = 1$
 $\mu = 0$
 $\rho = 0.25$

Wiederum kann ein „Volatility Smile“ beobachtet werden. Im Gegensatz zur Abbildung 9 kann es wie auf der linken Seite in Abbildung 10 dazu kommen, dass in-the-money Optionen durch das BLACK-SCHOLES Modell durchwegs überbewertet werden.

5.4 Mehrperiodige Protective Put Strategie

Im folgenden wird die Berechnung der erwarteten Rendite einer *pfadabhängigen Protective Put* Strategie anhand der Quasi-Monte Carlo Methode gezeigt. Mittels einer Protective Put Strategie kann ein Portfolio über den Kauf einer Putoption gegen adverse Wertveränderungen abgesichert werden. Die Implementierung dieser Strategie erweist sich in der Praxis oft als schwierig, wenn sich der Investor über eine längere Anlageperiode mit börsengehandelten Kontrakten absichern will. Der Grund dafür liegt in der mangelnden Verfügbarkeit von Putoptionen, deren Restlaufzeit den gewünschten Anlagehorizont abdecken. Somit ist für die Durchführung einer Protective-Put-Strategie der Kauf neuer Kontrakte innerhalb des Anlagehorizontes notwendig, was die Strategie pfadabhängig macht. Die Absicherungskosten zum Zeitpunkt, in dem eine neue Putoption gekauft werden muss, werden aufgrund der unsicheren Ausübungspreise der in der Zukunft zu kaufenden Optionskontrakte stochastisch. Zur Berechnung der erwarteten Rendite zu Beginn des Anlagehorizontes lässt sich keine geschlossene Formel herleiten. Somit müssen für die vorliegende Problemstellung anstelle analytischer Lösungen numerische Methoden verwendet werden. Für die Simulation wird die Quasi-Monte Carlo Methode verwendet, da sie eine einfache und schnelle Lösung des vorliegenden Problems bietet. Auf den Vergleich mit der herkömmlichen Monte Carlo Methode wird verzichtet. Grundsätzlich lassen sich dieselben Aussagen über das Konvergenzverhalten und den Simulationsaufwand wie in den vorangegangenen Beispielen machen.

Für eine anschauliche Darstellung des Simulationsaufbaus wird folgende vereinfachte Situation angenommen:

Ausgangslage bildet das Vermögen W_0 eines Investors. Die Investitionsmöglichkeit besteht nur aus einem Aktientitel S und einer Putoption P auf die Aktie. Der Investor verfügt über einen Zeithorizont von $T = 2.5$ Jahren. Am Markt werden nur Putoptionen mit einer Laufzeit von $m = 1/2$ Jahren gehandelt. Zur Absicherung der Aktieninvestition kauft der Investor halbjährlich eine neue Putoption. Dabei legt er annahmegemäss jeweils für jede einzelne Subperiode m ein Absicherungsniveau von 95% des Vermögens W_t ($t = 0,1,..,4$) zum Zeitpunkt t fest. Für das Vermögen gilt dann im Zeitpunkt t :

$$W_t = S_t + \max[0, X_{t-1} - S_t]$$

d.h., das Vermögen des Investors setzt sich zusammen aus der Aktienkursentwicklung bis zur Periode t einerseits, und dem Payoff der in Periode t abgelaufenen Putoption mit Laufzeit m andererseits. Der Ausübungspreis der Putoption wird eine Periode vorher, in $t - 1$, festgelegt. Für die folgende Investitionsperiode von der Dauer eines halben Jahres (m) wird eine neue Putoption gekauft, welche nach Verfall ein Gesamtvermögen im Umfang von 95% des heutigen Vermögens garantiert soll. Der Ausübungspreis der neu gekauften Option beträgt somit 95% W_t . Der Rest des Vermögens bleibt in Aktien investiert. Formal ausgedrückt lautet die oben beschriebene Strategie:

$$S_t = (W_{t-1} - P(W_{t-1}, X_{t-1}, \Delta t = 0.5)) \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \alpha \epsilon \sqrt{\Delta t}\right]$$

$$X_{t-1} = 95\% W_{t-1}$$

wobei mit W das Vermögen, mit S der Aktienkurs, mit r die Rendite auf einer risikolosen Anlage und mit X der Ausübungspreis der Putoption P mit einer Laufzeit von 0.5 Jahren bezeichnet wird.

Für die Simulation mit der Quasi-Monte Carlo Methode, bei welcher die Zeitintervalle auf einen Tag festgelegt und 500 Aktienpfade generiert wurden, ergeben sich folgende Werte:

Tabelle 1: Simulationsergebnisse für die mehrperiodige Protective Put Strategie

$r = 0.05; \sigma = 0.2; W_0 = 100$			
Perioden:	Erwartungswert (Periodendurchschnitt)	Volatilität (Periodendurchschnitt)	max. Vermögensverlust
Periode 1	0.0383501	0.124848	95.00%
Periode 2	0.0391095	0.130196	90.25%
Periode 3	0.039858	0.135652	85.74%
Periode 4	0.0406294	0.1414	81.45%
Periode 5	0.0414249	0.147326	77.38%

Daraus ist – wie zu erwarten war – ersichtlich, dass mit zunehmender Zeit der durchschnittliche Erwartungswert und die durchschnittliche Varianz der Rendite der Portfoliostrategie pro Periode zunehmen. Die zunehmende Volatilität wird durch den zunehmenden maximalen Vermögensverlust induziert. Nach Ablauf der Anlageperiode von 2.5 Jahren kann das Vermögen maximal auf 77.38% ($=0.95^5$) seines Anfangswertes schrumpfen.

6. Zusammenfassung

MC Methoden bilden in der Anwendung der modernen Finanzmarkttheorie ein wichtiges Instrumentarium für komplexe Problemstellungen, welche keine analytisch geschlossene Formeln zulassen. Quasi-MC Methoden ermöglichen die signifikante Verbesserung der Genauigkeit und Verlässlichkeit von herkömmlichen MC Methoden. Die Grundidee liegt bei der Quasi-MC Methode in der Verwendung deterministischer Zahlenfolgen (quasi-Zufallszahlen). Dies führt zu besseren Konvergenzeigenschaften und deterministischen Fehlergrenzen, währenddem bei der MC Methode der Schätzfehler eine Zufallsvariable ist. In der Zahlentheorie sind einige Folgen von Quasi-Zufallszahlen bekannt, welche die oben angeführten Eigenschaften aufweisen. Die Simulationen in diesem Aufsatz wurden anhand der FAURE-Folge

durchgeführt. Diese Folge zeichnet sich gegenüber anderen bekannten Folgen wie z.B. gegenüber der SOBOL-Folge durch ihre Schnelligkeit und einfache Implementierung aus.

Es hat sich in verschiedenen Anwendungen wie der Bewertung komplexer Optionen und pfadabhängiger Investitionsstrategien gezeigt, dass die Quasi-MC Methode gegenüber der herkömmlichen MC Methode durchwegs bessere Resultate liefert. Zudem lassen sich die meisten *Variance Reduction* Techniken zur Verbesserung der einfachen MC Schätzungen auch problemlos auf Quasi-MC Simulationen anwenden. Dies verbessert die Konvergenzeigenschaften der Quasi-MC Methode zusätzlich. Die praktisch-relevanten Schlussfolgerungen liegen somit auf der Hand: Die Quasi-MC liefert aufgrund ihrer Konvergenzeigenschaften deutlich bessere Resultate wie die MC Methode. Zudem erlaubt die Verwendung deterministischer Zahlenfolgen eine Einsparung bezüglich Zeit- und Rechenaufwand, da dieselben Zahlen wiederholt benützt werden können. Darüberhinaus kann gezeigt werden, dass FAURE-Folgen in dem Sinne robust sind, dass ihre Teilfolgen selbst wieder gute Konvergenzeigenschaften aufweisen. Diese Teilfolgen können somit wie Pseudo-Zufallsgeneratoren verwendet werden, was die Simulationen noch einfacher und schneller macht.

Anhang**Varianzreduzierende Eigenschaft der Antithetic Variates:**

Da

$$\begin{aligned}\sigma^2(f) &= \int_0^1 (f(u) - E[f])^2 du \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}g(u) + \frac{1}{2}g(1-u) - E[g] \right)^2 du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 g(u)^2 du + \frac{1}{2} \int_0^1 g(u)g(1-u) du - E[g]^2\end{aligned}$$

und falls g eine kontinuierliche, monotone Funktion in $[0,1]$ ist, gilt

$$\sigma^2(f) \leq \frac{1}{2} \sigma^2(g)$$

genau dann, wenn

$$\int_0^1 g(u)g(1-u) du \leq E[g]^2$$

Man kann annehmen, dass die Funktion

$$G(u) = \int_0^u g(1-t) dt - E[g]u \quad \in [0,1]$$

eine nicht-wachsende Ableitung

$$G'(u) = g(1-u) - E[g].$$

Da $G(0) = G(1) = 0$, folgt $G(u) \geq 0$ für alle $u \in [0,1]$, so dass

$$\int_0^1 G(u) dg(u) \geq 0$$

Partielle Integration liefert schliesslich

$$\int_0^1 g(u) dG(u) = \int_0^1 g(u) G'(u) du$$

$$\int_0^1 g(u)(g(1-u) - E[g]) du \leq 0$$

$$\int_0^1 g(u)g(1-u) du - E[g] \int_0^1 g(u) du \leq 0$$

Fussnoten

- [1] Einige Optionspreismodelle erlauben exakte Lösungen in Form von unendlichen Reihen spezieller Funktionen. Es ist dann aber effizienter, diese Funktionen numerisch aus einer partiellen Differentialgleichung zu bestimmen, als die unendliche Reihe zu approximieren.
- [2] Beispiele davon sind: *Antithetic Variates*, *Control Variates*, *Stratified Sampling* und *Importance Sampling*.
- [3] Vgl. JOY/BOYLE/TANG (1993) und PASKOV/TRAUB (1995).
- [4] Vgl. beispielsweise SOBOL (1967)
- [5] Vgl. z.B. KARLIN/TAYLOR, pp. 19. Für eine Herleitung des Gesetzes der grossen Zahl aus dem Integralsatz von MOIVRE-LAPLACE vgl. GNEDENKO, pp. 86.
- [6] Kongruente Zufallsgeneratoren finden sich standardmässig in Tabellenkalkulationsprogrammen. Sie sind meistens so konzipiert, dass die Zahlen iterativ durch den Restwert einer Division gebildet werden. Zur Erzeugung von Zufälligkeit wird meistens als Startwert die Systemzeit auf dem Rechner gewählt.
- [7] $E[\cdot]$ bezeichnet den Erwartungswertoperator unter dem risikoneutralen Mass. Für dessen Rechtfertigung für die Optionsbewertung in der BLACK/SCHOLES-Welt vgl. HARRISON/KREPS (1979). Die Gefahr der Bewertung über MC Methoden liegt darin, dass für den simulierten Prozess kein risikoneutrales Mass existiert. Dies ist deshalb im Einzelfall stets zu überprüfen. Beispielsweise verletzt der Prozess der Form $dS_t = \mu dt + \sigma |k - S_t| dW_t$ gewisse technische Voraussetzungen für die Existenz eines risikoneutralen Masses.
- [8] Vgl. BROADIE/GLASSERMAN (1993), Appendix A, Proposition 1. Dasselbe gilt auch für die anderen Risikoparameter.
- [9] Tatsächlich ist die Generierung von reinem Zufall mittels Algorithmen nicht möglich. Die meisten Computerprogramme zur Generierung von Zufallszahlen mit der Monte Carlo Methode erzeugen die Pseudo-Zufälligkeit, indem für den hinter dem Zufallsgenerator stehenden Algorithmus jeweils ein anderer Startwert – meistens die aktuelle Uhrzeit – gewählt wird.
- [10] Auf eine formale Herleitung dieses Erkenntnis wird verzichtet und auf NIEDERREITER (1992) verwiesen.
- [11] JOY et. al. (1995) schlagen die Methode von MORO (1995) vor. Die naheliegende BOX-MULLER Transformation ist hier nicht anwendbar, da die *low-discrepancy*-Eigenschaft der FAURE-Folge zerstört würde. In den folgenden Beispielen wurde eine dem NEWTON-Verfahren verwandte Methode angewandt.
- [12] KEMNA/VORST (1990).
- [13] Inzwischen hat HESTON (1993) eine geschlossene Formel für europäische Optionen mit stochastischer Volatilität unter ganz bestimmten Annahmen vorgelegt.

Literatur

- BEASLEY, J. D. und S. G. SPRINGER (1977): „The Percentage Points of the Normal Distribution“, *Applied Statistics* 26, pp. 118–121.
- BLACK, F. und M. SCHOLES (1973): „The Pricing of Options and Corporate Liabilities“, *Journal of Political Economy* 81, pp. 637–654.
- BORTHERTON-RATCLIFFE R. (1994): „Monte Carlo Motoring“, *Risk* 7/12, pp. 53–59.
- BOYLE, P. P. (1977): „Options: A Monte Carlo Approach“, *Journal of Financial Economics* 4, pp. 323–338.
- BOYLE, P. P. (1988): „A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables“, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 23, pp. 1–12.
- BOYLE, P. P. (1993): „New Life Forms on the Option Landscape“, *Journal of Financial Engineering* 2/3, pp. 217–252.
- BOYLE, P. P., J. EVNINE und S. GIBBS (1989): „Numerical Evaluation of Multivariate Contingent Claims“, *Review of Financial Studies* 2, pp. 241–250.
- BRATLEY, P. und B. L. FOX (1988): „ALGORITHM 659: Implementing Sobol’s quasi random sequence generator“, *ACM Trans. Math. Software* 14, pp. 88–100.
- BROADIE, M. und P. GLASSERMAN (1993): „Estimating Security Price Derivatives Using Simulation“, Working Paper, Columbia University.
- BRONSTEIN, I. N., K. A. SEMENDJAJEW, G. MUSIOL und H. MÜHLIG (1995): *Taschenbuch der Mathematik*, 2. Auflage, Frankfurt am Main: Harri Deutsch Verlag.
- CHIDAMBARAN, N. K. und S. FIGLEWSKI (1995): „Streamlining Monte Carlo Simulation with the Quasi-Analytic Method: Analysis of a Path-Dependent Option Strategy“, *Journal of Derivatives* 3, 2, pp. 53–72.
- COX, J. C., S. A. ROSS und M. RUBINSTEIN (1979): „Option Pricing: A Simplified Approach“, *Journal of Financial Economics* 7, pp. 229–263.
- CURRAN, M. (1994): „Strata Gems“, *Risk* 7/3, p. 70.
- FOX, B. L. (1986): „ALGORITHM 647: Implementation and Relative Efficiency of Quasirandom Sequence Generators“, *ACM Trans. Math. Software* 12, pp. 362–376.
- GARMAN, M. B. (1977): „A General Theory of Asset Valuation Under Diffusion State Processes“, Working Paper 50, Graduate School of Business Administration, University of California, Berkeley.
- GNEDENKO, B. W. (1991): *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie* (aus dem Russischen von H.-J. Rossberg), Berlin: Akademie Verlag.
- GRANT, D., G. VORA und D. WEEKS (1995a): „Path Dependent Options: Extending the Monte Carlo Approach“, Working Paper, University of New Mexico.
- GRANT, D., G. VORA und D. WEEKS (1995b): „Simulation and the Early-Exercise Option Problem“, Working Paper, University of New Mexico.
- HARRISON, J. M. und D. KREPS (1979): „Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets“, *Journal of Economic Theory* 20, pp. 381–408.
- HESTON, S. L. (1993): „A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options“, *Review of Financial Studies* 6, pp. 327–343.
- HULL, J. (1993): *Options, Futures and other Derivative Securities*, 2. Auflage, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.
- HULL, J. und A. WHITE (1987): „The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities“, *Journal of Finance* 42/2, pp. 281–300.
- JOY, C., P. P. BOYLE und K. S. TANG (1995): „Quasi Monte Carlo Methods in Numerical Finance“, Working Paper, University of Waterloo.
- KARLIN, S. und H. M. TAYLOR (1975): *A First Course in Stochastic Processes*, Second Edition, San Diego: Academic Press.
- KEMNA A. G. Z. und A. C. F. VORST (1990): „A Pricing Model for Options Based on Average Asset Values“, *Journal of Banking and Finance* 12, pp. 113–129.
- MERTON, R. C. (1976): „Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous“, *Journal of Financial Economics*, 3, pp. 125–144.
- MORO, B. (1995): „The Full Monte“, *Risk* 7/3, pp. 57–59.
- NIEDERREITER (1992): „Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods“, CBMS-NFS 63, Philadelphia, PA: SIAM.
- PASKOV, S. H. und J. F. TRAUB (1995): „Faster Valuation of Financial Derivatives“, *Journal of Portfolio Management*, Fall, pp. 113–120.
- RIPLEY, B. D. (1987): *Stochastic Simulation*, New York: Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.
- RUBINSTEIN, R. Y. (1981): *Simulation and Monte Carlo Method*, New York: Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.
- RUBINSTEIN, R. Y. (1986): *Monte Carlo Optimization, Simulation and Sensitivity of Queueing Networks*, New York: Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.
- SOBOL, I. M. (1967): „The Distribution of Points in a Cube and the Approximate Evaluation of Integrals“, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* 19, pp. 86–112.
- TILLEY, J. A. (1993): „Valuing American Options In a Path Simulation Model“, *Transactions of the Society of Actuaries* XLV, pp. 499–520.