

Lower Partial Moments in Mean-Varianz-Portefeuilles

1. Einleitung

„Neue Informationen bringen die Menschen viel eher dazu, Gefahren höher, aber seltener dazu, sie niedriger einzuschätzen“[1]. Wendet man diese Aussage auf Finanzinvestitionen an, so erklärt sich in Informationsgesellschaften das zunehmende Interesse an Risikosteuerungsinstrumenten wie sie z.B. die Portefeuille-Theorie bietet.

Die zunehmende Orientierung am Verlustrisiko hat bereits zu ersten Anwendungen entsprechender Risikomaße geführt. So bieten führende Portefeuille-Software-Hersteller wie BARRA (London)[2] und SSI (New York) in neuerer Zeit Software an, die als Risikomaß die Semivarianz verwendet.

Vor dem Hintergrund des zunehmenden Risikobewußtseins und der verstärkten Anwendung der Portefeuilletechniken wird im folgenden versucht, Beziehungen zwischen den klassischen Portefeuilles nach MARKOWITZ[3] und denen auf der Basis anderer Risikomaße, insbesondere in der Form von Lower-Partial-Momente aufzuzeigen.

* Der Autor dankt einem anonymen Gutachter sowie Priv. Doz. Dr. Franz Baur von der Universität Augsburg für wertvolle Anregungen. L. Schubert, Fachhochschule Konstanz, Brauneggerstr. 55, 78462 Konstanz, Tel.: 0049 - 7531 - 206429, Fax.: 0049 - 7531 - 206427, EMail: schubert@fh-konstanz.de.

2. Shortfall-Risk

Um Risiken von Portefeuilles bzw. assets zu messen wird das klassische Volatilitätsmaß der Standardabweichung bzw. der Varianz verwendet. Bereits 1952, ein paar Monate nach Veröffentlichung der Arbeit zum klassischen Mean-Varianz-Portefeuille durch MARKOWITZ[4] schlug ROY[5] einen anderen Maßstab in der Form eines target-shortfall-risks zur Risikomessung vor. MARKOWITZ[6] selbst erschien die Betrachtung anderer Risikomaße mathematisch unhandlich.

Will man bei der Auswahl eines Portefeuilles eine bestimmte zu erzielende Mindestrendite (target $\tau \in \mathbb{R}$) die maximal mit der Wahrscheinlichkeit α unterschritten werden soll, berücksichtigen, so kann die durch die shortfall probability

$$P(R < \tau) \leq \alpha, \text{ mit } 0 < \alpha < 1 \quad (1)$$

ausgedrückt werden. R stellt dabei die Renditezufallsvariable dar. Ist $R \sim N(\mu_r, \sigma_r)$ verteilt, so kann diese wie folgt standardisiert werden, so daß die shortfall-probability durch

$$(\tau - \mu_r)/\sigma_r \leq z_\alpha \quad (2)$$

mit z_α : Fraktilwert der $N(0,1)$ -Verteilung zu α beschrieben werden kann.

Löst man die obige Ungleichung nach μ_r auf, so erhält man

$$\mu_r \geq \tau - z_\alpha \sigma_r. \quad (3)$$

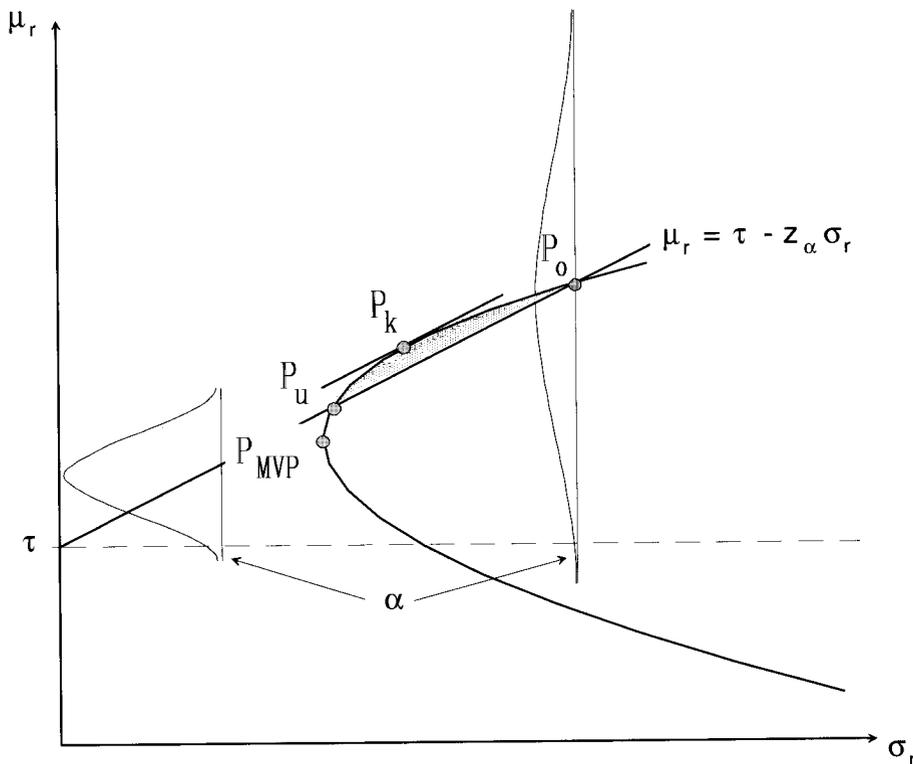
Mit τ und α bzw. z_α ist die shortfall probability durch eine Gerade – wie in Abbildung 1 – darstellbar.

Alle Portefeuilles, deren Renditeerwartungswerte μ_r und Standardabweichungen σ_r auf der in Abbil-

dung 1 eingezeichneten Geraden liegen, besitzen eine Wahrscheinlichkeit von α eine Rendite kleiner als die Mindestrendite τ zu erreichen. Portefeuilles mit darüber liegenden Renditeerwartungswerten μ_r beinhalten eine entsprechend geringere Wahrscheinlichkeit die Mindestrendite zu unterschreiten.

Für die Auswahl eines effizienten Portefeuilles unter target-shortfall-Restriktionen wurden 3 Möglichkeiten vorgeschlagen.

Abbildung 1: Klassische Portefeuilledarstellung mit down-side-risk-Restriktion



TELSER[7] regte an, P_0 in Abbildung 1 auszuwählen, d.h. das Portefeuille mit der höchsten Rendite μ_r unter Einhaltung der target-shortfall-Restriktion; dabei ist die Mindestrendite τ und die shortfall-probability α vorgegeben:

maximiere μ_r mit $P(R < \tau) \leq \alpha$.

KATAOKA[8] schlug vor, die Mindestrendite τ unter Einhaltung der vorgegebenen shortfall-probability α zu maximieren:

maximiere τ mit $P(R < \tau) \leq \alpha$.

Seinem Vorschlag entsprechend würde in Abbildung 1 das Portefeuille P_k ausgewählt.

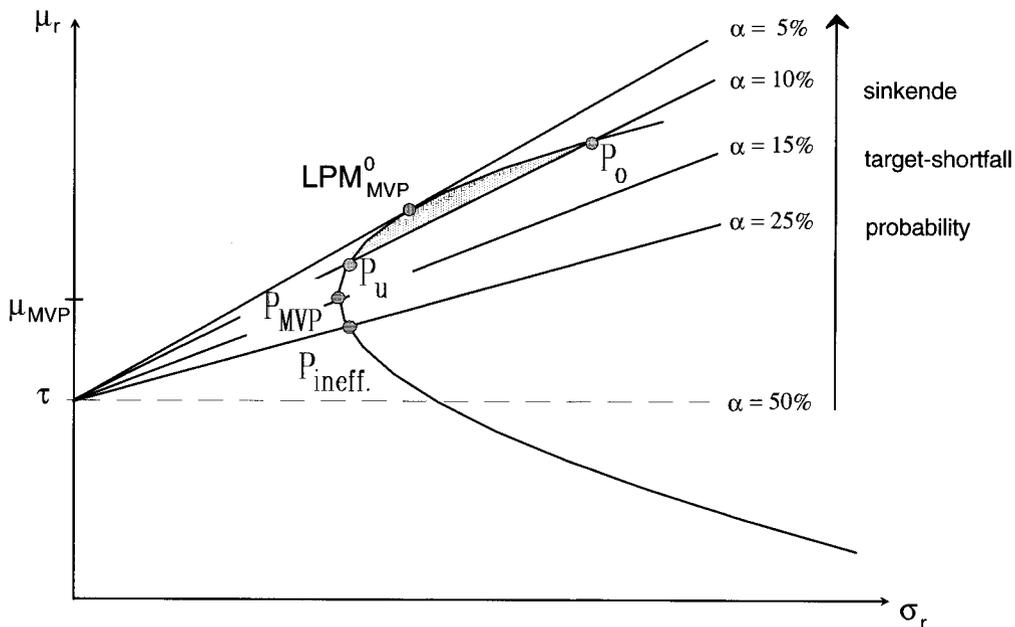
ROY[9] minimierte die shortfall-probability α unter Einhaltung der vorgegebenen Mindestrendite τ :

minimiere α mit $P(R < \tau) \leq \alpha$ d.h. minimiere $P(R < \tau)$.

Nach dem ROY-Kriterium wäre das in Abbildung 2 mit LPM^0_{MVP} bezeichnete Portefeuille optimal. Dieser Punkt wurde mit LPM^0 bezeichnet, da die shortfall probability gleichbedeutend ist mit dem Lower Partial Moment der Ordnung 0 (siehe folgendes Kapitel).

Unter target-shortfall-Restriktionen stellt das Auswahlkriterium nach TELSER das risikofreudigste und das von ROY das risikoscheueste dar.

Abbildung 2: Portefeuille mit minimaler shortfall-probability: LPM^0_{MVP}



Eine Erweiterung der 3 Ansätze auf n target-shortfall-Restriktionen

$$P(R < \tau_i) \leq \alpha_i \text{ mit } (i = 1, \dots, n) \text{ und } \alpha_i > \alpha_i'$$

falls $\tau_i > \tau_i'$ wurde in der Literatur bislang nicht diskutiert, obgleich sich dazu sinnvolle Anwendungsbeispiele für die Praxis finden lassen; z.B. eine Mindestrendite, die den Wohlstands-status quo garantiert und eine, die das Existenzminimum betrifft. Denkbar wäre auch eine Ergänzung der „safty-first“-Mindestrendite (mit $\tau_1 < \mu_{MVP}$) durch eine „chance“-Mindestrendite (mit $\tau_2 > \mu_{MVP}$).

Grundsätzlich kann die Betrachtung von Shortfall-Restriktionen einerseits als Beschränkung der effizienten Portefeuilles im Mean-Varianz-Ansatz benutzt werden. Kombiniert mit einem Auswahl-

kriterium (z.B.: von TELSER, KATAOKA oder ROY) erhält man das jeweils optimale Portefeuille.

Eine andere Art der Beschränkung der effizienten Portefeuilles zeigt LEIBOWITZ und HENRIKSSON[10]. Sie orientieren sich nicht an einer festen Mindestrendite τ , sondern an der Rendite eines Benchmark-Portefeuilles wie z.B. eines Aktienindex. Die Rendite des Index sei die Zufallsvariable R_x . Diese Rendite darf als target maximal um τ_x Prozentpunkte unterschritten werden. Als target wird nicht die Mindestrendite, sondern der Abstand zur Benchmark verwendet. Die entsprechende shortfall-probability ist dabei

$$P(R < (R_x - \tau_x)) \leq \alpha. \quad (4)$$

Abbildung 3: μ/α -Darstellung zur μ/σ -Darstellung der Abbildung 2

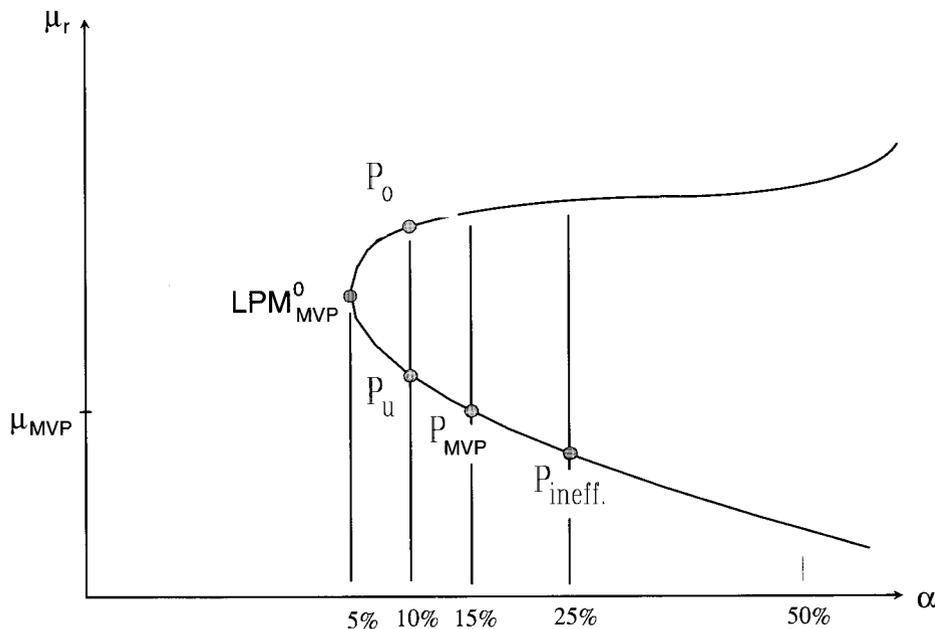
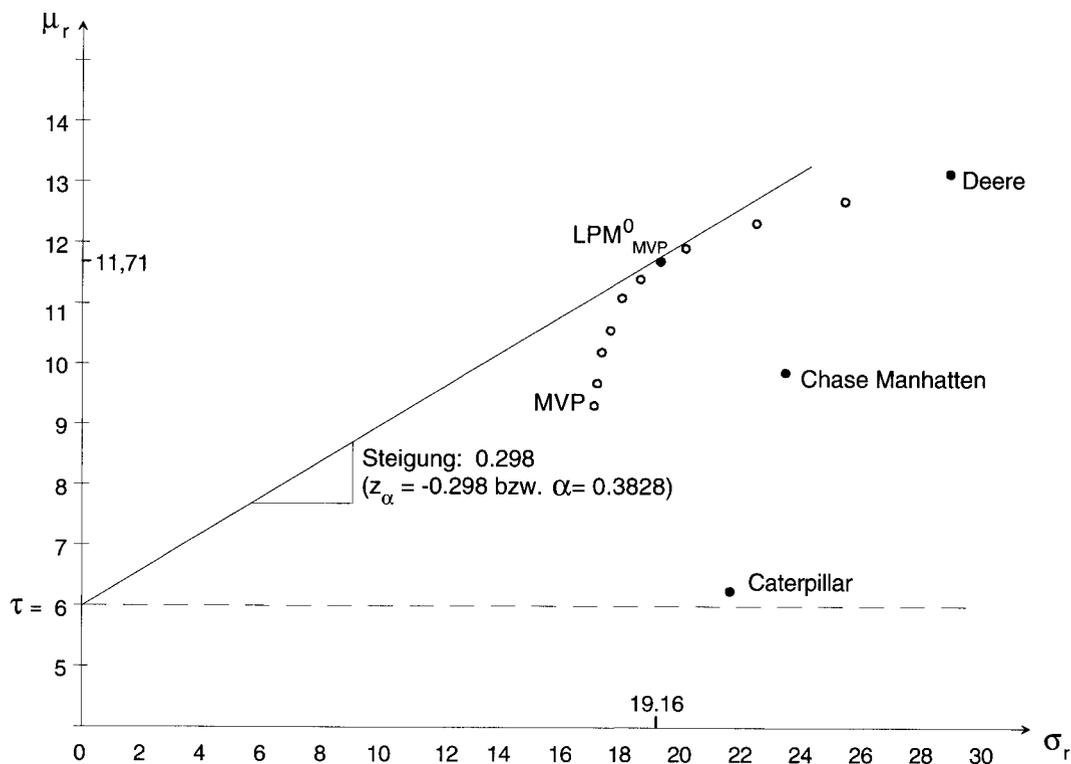


Abbildung 4: Effiziente μ/σ -Portefeuilles und Portefeuille mit minimalem shortfall-risik z.B. aus Tabelle 1

Andererseits wurde der Shortfall-Ansatz auch genutzt, statt der klassischen μ/σ -Darstellung eine μ/α -Darstellung und eine τ/α -Darstellung zu entwickeln. Dadurch wird die target-shortfall-probability nicht als Restriktion, sondern anstelle der Varianz bzw. Standardabweichung als Risikokriterium verwendet.

In der μ/α -Darstellung wird die Targetrendite τ fixiert und die Steigung der shortfall-Restriktionen $\mu_r \geq \tau - z_\alpha \sigma_r$ für unterschiedliche α bzw. z_α betrachtet. Das Portefeuille mit dem minimalen α ist in Abbildung 2 mit LPM^0_{MVP} bezeichnet. Die im LPM^0_{MVP} beginnenden effizienten Portefeuilles werden μ/α -efficient frontier genannt. Vergleicht man dazu den Punkt P_u mit P_o in Abbildung 1, so sieht man, daß beim selben Risiko α das Portefeuille P_o eine höhere Rendite als P_u erwarten läßt.

P_u ist also ein μ/α -ineffizientes Portefeuille.

In Abbildung 3 wurde versucht, zur μ/σ -Darstellung der Abbildung 2 eine μ/α -Darstellung zu skizzieren. Die α -Werte befinden sich nun auf der Abszisse.

BAUMOL[11] formulierte ein Effizienzkriterium, das der μ/α -Effizienz entspricht und zeigte, daß BAUMOL-Effizienz die Effizienz des klassischen Portefeuilles impliziert, d.h. μ/σ -effizient ist.

Der Bereich zwischen P_{MVP} und LPM^0_{MVP} in Abbildung 2 bzw. 3 ist bei gegebenem τ nicht BAUMOL-Effizient.

RUDOLF[12] verwendet eine μ/α -Portefeuille-Darstellung und zeigt, daß die zugehörige effiziente Linie einen Wendepunkt besitzt. Dies be-

deutet – im Gegensatz zum klassischen Risikomaß σ – daß nach dem Wendepunkt das Grenzrisiko je zusätzlicher Renditeeinheit abnimmt. Dies würde eine Empfehlung riskanterer Anlagen nahelegen. Der Einbezug von risikolosen Anlagen durch Übertragung der Capital Market Line im Sinne des CAPM von SHARPE-LINTNER-MOSSIN[13] führt beim μ/α -Portefeuille zum selben Anlageverhalten wie bei μ/σ -Portefeuilles.

In der τ/α -Darstellung (vgl. JAEGER/RUDOLF/ZIMMERMANN[14]) wird zu jeder möglichen Mindestrendite τ nach dem ROY-Kriterium die minimale shortfall-probability α bzw. das minimal mögliche Risiko ermittelt. Die Mindestrendite τ darf nicht größer als der Renditeerwartungswert des Portefeuilles mit der minimalen Varianz P_{MVP} gewählt werden[15]. Die τ/α -Kombinationen erhält man graphisch, indem man Tangenten an die Linie der effizienten Portefeuilles in Abbildung 2 anlegt, an den Ordinatenschnittpunkten das jeweilige τ abliest und aus der jeweiligen Tangentensteigung $-z_\alpha$ das α ermittelt.

Die „efficient shortfall frontier“ oder „ τ/α -efficient frontier“ stellt den Zusammenhang zwischen shortfall probability α und dem Target τ , die dem ROY-Kriterium genügen, dar. Auf eine separate τ/α -Darstellung wird hier jedoch verzichtet.

In der Tabelle 1 sind die Kovarianzen der Renditen von 3 Aktien (Deere, Caterpillar und Chase-Manhattan) abgebildet[16]. Als Mindestrendite τ wurde 6% festgelegt. Die μ/σ -effizienten Portefeuilles wurden durch leere Punkte angedeutet. Das nach dem ROY-Auswahl-Kriterium effiziente Portefeuille LPM^0_{MVP} ergibt sich mit $\mu_r = 11.71$ und $\sigma_r = 19.16$ (vgl. Abbildung 4). Die Steigung der Geraden beträgt $0.298 = -z_\alpha$; mit diesem Fraktilwert der $N(0,1)$ -Verteilung läßt sich die optimale shortfall-probability $\alpha = 0.3828$ ermitteln. Dies bedeutet, daß das Portefeuille LPM^0_{MVP} eine Rendite von $\mu_r = 11.71$ erwarten läßt und daß das Unterschreiten der Mindestrendite von 6% mit einer Wahrscheinlichkeit von 38.28% möglich ist.

3. Lower Partial Moment (LPM)

Die statistischen Momente der 1. und 2. Ordnung spannen die klassische μ/σ -Portefeuilles-Darstellung von MARKOWITZ[17] und SHARPE[18] auf. In neuerer Zeit werden LPMs häufiger als Risikomaße für Portefeuilles diskutiert[19]. Die LPMs stellen eine Übertragung der statistischen Momente auf Teilbereiche einer Verteilung dar. Im Kontext von Finanzportefeuilles ist dies der Bereich unterhalb der Mindestrendite τ .

Die Ordnung l ($l = 0, 1, \dots, \infty$) des Lower Partial Moments

$$LPM^l(R, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - r)^l f(r) dr \quad (5)$$

mit der Dichtefunktion $f(r)$ der Renditezufallsvariablen R

drückt aus, wie stark das Ausmaß der Unterschreitung der Mindestrendite τ in das LPM eingeht.

Ist die Ordnung $l = 0$, so wird das Ausmaß der Unterschreitung der Mindestrendite τ nicht berücksichtigt. Es bleibt lediglich der durch die Dichtefunktion $f(r)$ gebildete Gewichtungsfaktor, so daß die target-shortfall-probability

$$LPM^0(R, \tau) = P(R < \tau) \quad (6)$$

resultiert.

Das LPM der Ordnung $l = 1$ wird als target-shortfall-mean bezeichnet. Er drückt den Erwartungswert der Mindestrenditeunterschreitung aus; d.h. in den Fällen, in denen die Mindestrendite unterschritten wird, ist der Renditeerwartungswert

$$\tau - (LPM^1(R, \tau) / LPM^0(R, \tau)). \quad (7)$$

Das LPM der Ordnung $l = 2$ wird target-shortfall-varianz oder target-semi-varianz genannt. Ersetzt

man im LPM der Ordnung 2 den target τ durch den Renditeerwartungswert μ_r so spricht man von der sog. semi-varianz.

Auf LPM höherer Momente lassen sich die Bezeichnungen der statistischen Momente übertragen, so daß sich eine target-shortfall skewness (Ordnung $l = 3$), eine target-shortfall-kurtosis (Ordnung $l = 4$) etc. ergibt. Bei der Ordnung $l = \infty$ kann vom target-shortfall-maximum gesprochen werden.

Im vorigen Kapitel wurde einerseits die Beschränkung der μ/σ -Portefeuilles durch die target-shortfall Restriktion in Kombination mit einem Auswahlkriterium betrachtet und andererseits die Möglichkeit, die shortfall-probability als Risikomaßstab in einer μ/α -oder μ/LPM^0 -Darstellung zu verwenden.

Bei LPMs (jeder Ordnung) hat sich dabei das ROY-Kriterium als Auswahlkriterium durchgesetzt. Deshalb wird unter einem LPM-Portefeuille dasjenige verstanden, das bei gegebener Mindestrendite τ das kleinste LPM besitzt. Um dieses LPM-Portefeuille von den μ/LPM -effizienten Portefeuilles abzuheben wird hier das LPM-Portefeuille mit LPM_{MVP} bezeichnet.

Die μ/LPM -Darstellungen lassen sich zu jeder Ordnung analog zur Abbildung 3 bilden. Da nur die Wahrscheinlichkeit der Unterschreitung der Mindestrendite und nicht das Ausmaß der Unterschreitung in das LPM^0 eingeht, wird es zur Erfassung des Risikos als unzureichend kritisiert[20]. Dieser Mangel ist bei den LPM^l ($l > 0$) nicht vorhanden. Ferner bilden diese konvexe „ μ/LPM -efficient frontieres“. Für $l = 0$ dagegen besitzt die „ μ/LPM -efficient frontieres“ einen Wendepunkt, wie im vorherigen Kapitel bereits erwähnt.

Die Annahmen bzgl. der Nutzenfunktionen u der Investoren sind bei LPM allgemeiner – als beim μ/σ -Portefeuille – im Rahmen der „stochastischen Dominanz“ charakterisierbar. Die Ordnung des LPM korrespondiert mit der Ordnung der „stochastischen Dominanz“[21]. LPM^0 ist adäquat für Investoren, die den höheren dem niedrigeren Wohlstand vorziehen ($u' > 0$), LPM^1 entspricht Investoren mit risikoaversen Nutzenfunktionen

($u' > 0$, $u'' < 0$) und LPM^2 bezieht zudem Schiefenpräferenzen mit ein ($u' > 0$, $u'' < 0$, $u''' > 0$).

Die Betrachtung der LPM wird i.d.R. auf die Ordnung $l = 0, 1, 2$ beschränkt. Ohne Ordnungsbeschränkung gilt folgende Beziehung zwischen μ/LPM -effizienten Portefeuilles und μ/σ -Portefeuilles:

Satz:

Die Renditen von n Aktien R_i ($i = 1, \dots, n$) seien multivariat normal verteilt. Ist ein Mean- $\text{LPM}^l(R, \tau)$ -Portefeuille effizient mit ($l \in \mathbb{N}$ und $\tau \in \mathbb{R}$) oder ($l = 0$ und $\tau \leq \mu$), so ist es auch ein Mean-Varianz effizientes Portefeuille.

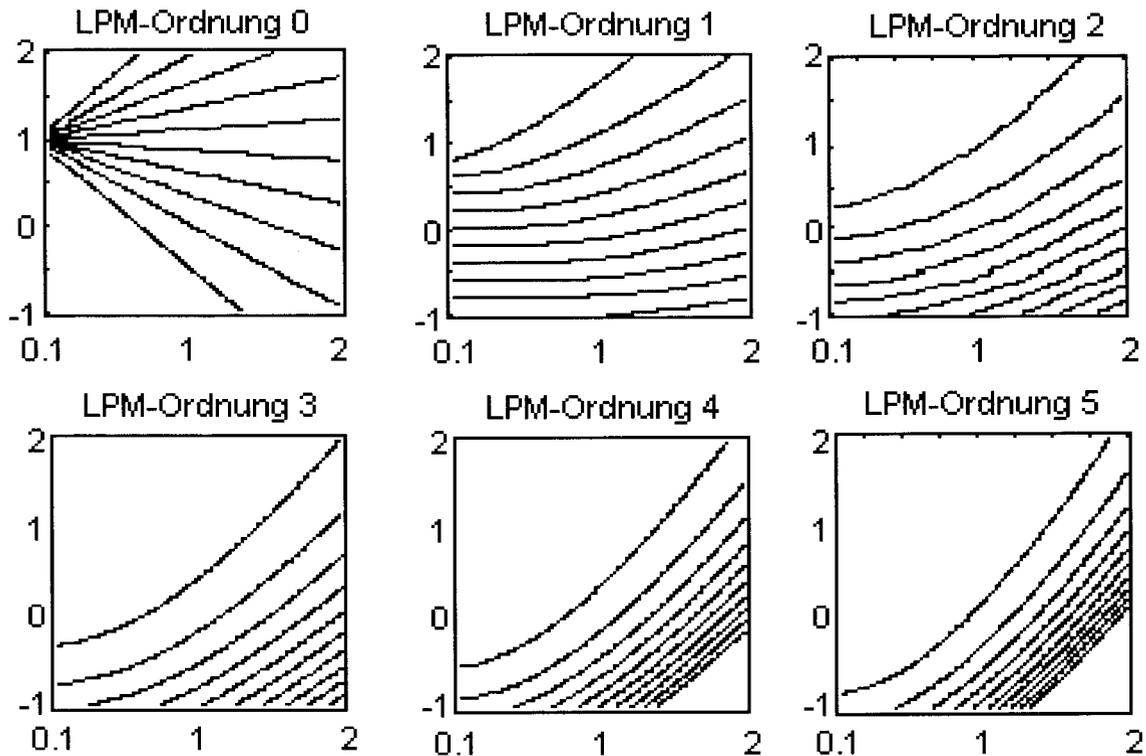
Dabei sei das l -te „Lower-Partial-Moment“:

$$\text{LPM}^l(R, \tau) = 1/\sqrt{2\pi}\sigma \int_{-\infty}^{\tau} (\tau-r)^l e^{-(r-\mu)^2/2\sigma^2} dr.$$

Beweis: (vgl. Anhang)

Unter der Annahme normalverteilter Renditen bieten also die μ/LPM -Darstellung keine weiteren effizienten Portefeuilles über die der μ/σ -Darstellung hinaus. Trotzdem ermöglichen die μ/LPM -Darstellungen evtl. zusätzliche Informationen aus dem Verlauf der efficient frontier wie es im Kapitel zum shortfall-risk angedeutet wurde. Um die Lage der $\text{LPM}_{\text{MVP}}^l$ und damit die der μ/LPM^l -effizienten Portefeuilles im μ/σ -Kontext abzuschätzen wurden die LPM-Höhenlinien für $\tau = 1$ und $l = 0, 1, \dots, 5$ im μ/σ -Raum mit der Computer-Algebra-Software „Mathematica“ dargestellt (vgl. Abbildung 5). Dabei wurden der Abszissenachse σ und der Ordinatenachse μ zugeordnet. Von links oben nach rechts unten nimmt dabei der Wert der Höhenlinien zu. Für das LPM der Ordnung 0 resultieren lineare Höhenlinien, wie bereits in Abbildung 2 dargestellt.

Die linke obere Ecke entspricht Portefeuilles, die abgesichert sind mit einer Rendite, die größer als τ ist. Falls eine perfekte Absicherung ($\sigma = 0$) vorliegt, ist das LPM aufgrund des resultierenden Nenners ($\sigma = 0$) problematisch zu handhaben.

Abbildung 5: Höhenlinien der LPM-Funktion im μ - σ -Raum für $\tau = 1$ und $l = 0, 1, 2, 3, 4$ und 5 

Jede der Höhenlinien in Abbildung 2 könnte eine Restriktion im μ/σ -Raum darstellen, die wie in Abbildung 1 die μ/σ -effizienten Portefeuilles einschränkt. Das LPM_{MVP} ist jeweils – entsprechend dem ROY-Kriterium – der Berührungspunkt der (nicht eingezeichneten) μ/σ -effizienten Linie und der Höhenlinie mit dem geringsten LPM.

Die Krümmung der Höhenlinien läßt vermuten, daß

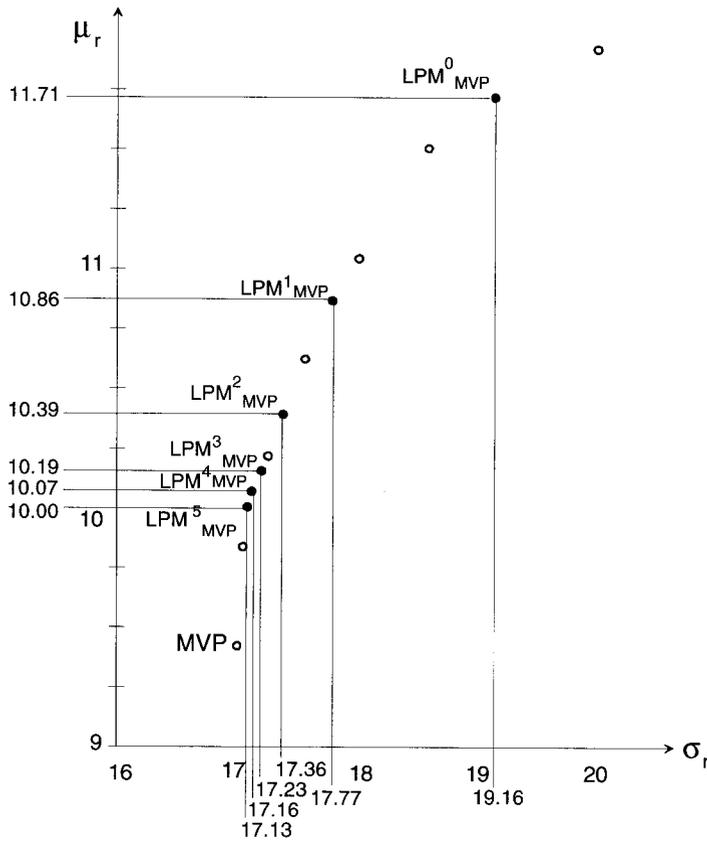
$$\mu_{MVP}^l \geq \mu_{MVP}^{l+1} \geq \mu_{MVP} \quad \text{mit } l = 0, 1, \dots, \infty$$

und μ_{MVP}^l bzw. μ_{MVP} : Renditeerwartungswert der LPM_{MVP}^l bzw. des minimalen Varianzpunktes.

Diese vermutete Ordnung wird durch ein abschließendes Rechenbeispiel gestützt. Dazu werden die in Tabelle 1 enthaltenen Daten verwendet. In Abbildung 6 ist ein Ausschnitt aus Abbildung 4 zu sehen, in dem zusätzlich die LPM_{MVP}^l für $l = 0, 1, \dots, 5$ eingezeichnet wurden.

Die rechts in Abbildung 6 angegebenen minimalen LPM-Werte sind zum Teil schwer interpretierbar. Lediglich das minimale LPM zur Ordnung 0 und 1 lassen sich sinnvoll deuten. $LPM_{MVP}^0 = 0,39281$ besagt, daß die Wahrscheinlichkeit eine Rendite unter der Mindestrendite von 6% zu erreichen 0,39281 ist. $LPM_{MVP}^1 = 4,9218$ drückt aus, daß die Unterschreitung der Mindestrendite mit einem Erwartungswert von 4,9218% geschieht. Falls das Desaster der Unterschreitung also eintritt kann eine Rendite von $6\% - (4,9218\% / 0,39281) = -6,5297217\%$ erwartet werden (vgl. (7)).

Abbildung 6: LPM-Portefeuilles im Beispiel aus Tabelle 1



Minimale LPM:
(Bei gegebenem Target = 6%)

$$LPM^0 = 0,38281$$

$$LPM^1 = 4,9218$$

$$LPM^2 = 98,826$$

$$LPM^3 = 2541,3$$

$$LPM^4 = 77421$$

$$LPM^5 = 26812 \cdot 10^2$$

4. Zusammenfassung

Bei normalverteilten Renditen bietet die Verwendung von Risikomaßen in der Form von LPMs keine μ /LPM-effizienten Portefeuilles, die nicht auch μ/σ -effizient sind. In diesem Sinne kann man die Betrachtung von LPM als überflüssig bezeichnen. Da dagegen nicht jedes μ/σ -effiziente Portefeuille μ /LPM-effizient ist, macht der Einbezug von LPMs dann Sinn, falls ein Investor unter Risiko ein Maß im Sinne z.B. der target-shortfall-probability oder des target-shortfall-mean versteht. Dann wäre z.B. die Auswahl des MVP für diesen Investor ineffizient.

Trotzdem kann der Erkenntnisgewinn durch Einbezug von LPM bei normalverteilten Renditen als sehr gering bezeichnet werden im Gegensatz zu dem bei log-normalverteilten- oder allgemein asymmetrisch verteilten Renditen, die hier nicht einbezogen wurden. In diesen Fällen befinden sich die LPM-effizienten Portefeuilles nicht – wie in Abbildung 6 – ausschließlich auf der μ/σ -effizienten Linie, sondern unterhalb; wie stark, hängt von den Schiefen der Verteilungen ab. In empirischen Untersuchungen wurden häufig leichte Schiefen festgestellt. Neben der adäquaten Risikoerfassung ermöglichen LPM als Entscheidungskriterien in diesen Fällen auch höhere durchschnittliche Renditen[22].

Tabelle 1: Statistische Momente zu 3 Aktien und ausgewählte effiziente Portefeuilles (unten)

Covarianz	Caterpillar	Chase-M.	Deere
Caterpillar	467.13906	150.96359	281.62968
Chase-M.	150.96359	547.09210	8.2139691
Deere	281.62968	8.2139691	829.92391

	Rendite Erwartung	Rendite Standardabw.
MVP:	9.3922	16.9962
	9.8151	17.06162
LPM⁵_{MVP}	10.00	17.13
LPM⁴_{MVP}	10.07	17.16
LPM³_{MVP}	10.19	17.23
	10.2379	17.2562
LPM²_{MVP}	10.39	17.36
	10.6608	17.5757
LPM¹_{MVP}	10.86	17.77
	11.0836	18.0135
	11.5065	18.5997
LPM⁰_{MVP}	11.71	19.16
	11.9293	20.0218
	12.3521	22.3571
	12.7750	25.3547
Deere	13.1978	28.8084

Caterpillar	6.2523	21.6134
Chase-M	9.87435	23.3900
Deere	13.1978	28.8084

Anhang

Satz:

Die Renditen von n Aktien R_i ($i = 1, \dots, n$) seien multivariat normalverteilt. Ist ein Mean-LPM ^{l} (R, τ)-Portefeuille effizient mit ($l \in \mathbb{N}$ und $\tau \in \mathbb{R}$) oder ($l = 0$ und $\tau \leq \mu$), so ist es auch ein Mean-Varianz effizientes Portefeuille.

Beweis zum Satz (1. Teil)

Annahme:

$X \sim N(\mu_x, \sigma)$ und $Y \sim N(\mu_y, \sigma)$ seien die Renditen zu Portefeuille P_x bzw. P_y mit $\mu_x > \mu_y$; die zugehörigen Dichten seien $f(x)$ bzw. $f(y)$. Zudem sei $\tau \in \mathbb{R}$.

Behauptung:

P_x ist ein Mean-LPM ^{l} -effizientes Portefeuille und P_y ineffizient bzw. $LPM^l(Y, \tau) > LPM^l(X, \tau - \delta_\mu)$ für $l \in \mathbb{N}_0$, $\tau \in \mathbb{R}$ und mit $\delta_\mu = \mu_x - \mu_y$.

Beweis:

a) $LPM^l(Y, \tau) > LPM^l(Y, \tau - \delta_\mu)$:

LPM ^{l} (Y, τ) läßt sich durch 2 Teilintegrale ausdrücken und mit $\delta_\mu > 0$ resultiert

$$\begin{aligned}
 LPM^l(Y, \tau) &= \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - y)^l f(y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\tau - \delta_\mu} (\tau - y)^l f(y) dy + \int_{\tau - \delta_\mu}^{\tau} (\tau - y)^l f(y) dy \quad (A1) \\
 &\geq \int_{-\infty}^{\tau - \delta_\mu} (\tau - \delta_\mu - y)^l f(y) dy \\
 &\quad + \int_{\tau - \delta_\mu}^{\tau} (\tau - y)^l f(y) dy. \quad (A2)
 \end{aligned}$$

Da $\int_{\tau - \delta_\mu}^{\tau} (\tau - y)^l f(y) dy > 0$ ergibt sich aus (A1)

und (A2)

$$\begin{aligned} \text{LPM}^l(Y, \tau) &= \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - y)^l f(y) dy \\ &> \int_{-\infty}^{\tau - \delta_{\mu}} (\tau - \delta_{\mu} - y)^l f(y) dy = \text{LPM}^l(Y, \tau - \delta_{\mu}). \quad (\text{A3}) \end{aligned}$$

$$\text{b) } \text{LPM}^l(Y, \tau - \delta_{\mu}) = \text{LPM}^l(X, \tau):$$

Substituiert man y durch
 $x = y + \delta_{\mu}$ ($\Leftrightarrow y = x - \delta_{\mu}$) in

$$\begin{aligned} \text{LPM}^l(Y, \tau - \delta_{\mu}) &= \\ &= 1/\sqrt{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\tau - \delta_{\mu}} (\tau - \delta_{\mu} - y)^l e^{-(y - \mu_y)^2/2\sigma^2} dy, \quad (\text{A4}) \end{aligned}$$

so erhält man mit $dx/dy = 1$ und den Integralgrenzen
 $x = \tau$ ($\Leftrightarrow y = \tau - \delta_{\mu}$) bzw. $x = -\infty$ ($\Leftrightarrow y = -\infty$)

$$= 1/\sqrt{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - x)^l e^{-(x - \delta_{\mu} - \mu_y)^2/2\sigma^2} dx, \quad (\text{A5})$$

Mit $\mu_y = \mu_x - \delta_{\mu}$ resultiert

$$\begin{aligned} &= 1/\sqrt{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - x)^l e^{-(x - \mu_x)^2/2\sigma^2} dx \\ &= \text{LPM}^l(X, \tau). \quad (\text{A6}) \end{aligned}$$

Mit $\text{LPM}^l(Y, \tau) > \text{LPM}^l(X, \tau - \delta_{\mu}) = \text{LPM}^l(X, \tau)$ besitzt Portefeuille P_y das größere Risiko und mit der vorausgesetzten geringeren Renditeerwartung μ_y ist P_y im Vergleich zu P_x ineffizient.

Beweis zu Satz (2. Teil)

Annahme:

$X \sim N(\mu, \sigma_x)$ und $Y \sim N(\mu, \sigma_y)$ seien die Renditen zu Portefeuille P_x bzw. P_y mit $\sigma_x < \sigma_y$; die zugehörigen Dichten seien $f(x)$ bzw. $f(y)$.

Behauptung:

P_x ist ein Mean-LPM^l-effizientes Portefeuille und P_y ineffizient bzw. $\text{LPM}^l(Y, \tau) > \text{LPM}^l(X, \tau)$ für ($l \in \mathbb{N}$, $\tau \in \mathbb{R}$) oder ($l = 0$, $\tau \leq \mu$).

Beweis:

Anhand der Zufallsvariablen $Z \sim N(\mu, \sigma)$ mit konstantem μ (ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird $\mu = 0$ gesetzt), variablem σ und der Dichte $f(z)$ wird gezeigt, daß $d(\text{LPM}^l(Z, \tau)) / d\sigma > 0$ ist.

Da die entsprechenden Voraussetzungen erfüllt sind, kann vor dem Integrieren differenziert werden.

Es ergibt sich für $d(\text{LPM}^l(Z, \tau)) / d\sigma =$

$$\begin{aligned} &= d \left[1/\sqrt{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - z)^l e^{-z^2/2\sigma^2} dz \right] / d\sigma = \\ &= -1/\sqrt{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - z)^l e^{-z^2/2\sigma^2} dz \\ &+ 1/\sqrt{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - z)^l e^{-z^2/2\sigma^2} \left(-(z^2/2)(-2/\sigma^3) \right) dz = \\ &= 1/\sqrt{2\pi\sigma^2} \left[\int_{-\infty}^{\tau} (\tau - z)^l (z^2/\sigma^2) e^{-z^2/2\sigma^2} dz \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - z)^l e^{-z^2/2\sigma^2} dz \right]. \quad (\text{A7}) \end{aligned}$$

Führt man $t = z/\sigma$ ($\Leftrightarrow z = t\sigma$) in (7) ein, so erhält man mit $dz/dt = \sigma$ und den Integralgrenzen $t = \tau/\sigma$ ($\Leftrightarrow z = \tau$) bzw. $t = -\infty$ ($\Leftrightarrow z = -\infty$)

$$1/\sqrt{2\pi\sigma^2} \left[\int_{-\infty}^{\tau/\sigma} (\tau - t\sigma)^l t^2 e^{-t^2/2} \sigma dt \right]$$

$$-\int_{-\infty}^{\tau/\sigma} (\tau - t\sigma)^l e^{-t^2/2} \sigma dt] \quad (A8)$$

Mit $k = \tau/\sigma$ (bzw. $\tau = k\sigma$) vereinfacht sich (8) zu

$$\begin{aligned} & 1/\sqrt{2\pi}\sigma^2 \left[\int_{-\infty}^k (k-t)^l \sigma^l t^2 e^{-t^2/2} \sigma dt \right. \\ & \left. - \int_{-\infty}^k (k-t)^l \sigma^l e^{-t^2/2} \sigma dt \right] = \quad (A9) \\ & = \sigma^{l-1} / \sqrt{2\pi} \left[\int_{-\infty}^k (k-t)^l t^2 e^{-t^2/2} dt \right. \\ & \left. - \int_{-\infty}^k (k-t)^l e^{-t^2/2} dt \right]. \end{aligned}$$

Durch partielle Integration und Verwendung von $u(t) = (k-t)^l t$ und $dv(t) = t e^{-t^2/2}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} & = \sigma^{l-1} / \sqrt{2\pi} \left\{ u(t) v(t) \Big|_{-\infty}^k - \int_{-\infty}^k v(t) du(t) dt \right. \\ & \left. - \int_{-\infty}^k (k-t)^l e^{-t^2/2} dt \right\} \quad (A10) \\ & = \sigma^{l-1} / \sqrt{2\pi} \left\{ (k-t)^l t (-e^{-t^2/2}) \Big|_{-\infty}^k \right. \\ & \left. - \int_{-\infty}^k [l(k-t)^{l-1} (-1)t + (k-t)^l 1] (-e^{-t^2/2}) dt \right. \\ & \left. - \int_{-\infty}^k (k-t)^l e^{-t^2/2} dt \right\}. \quad (A11) \end{aligned}$$

Da $\lim_{t \rightarrow \infty} (k-t)^l t (-e^{-t^2/2}) = 0$ wird (A11) unter der Beschränkung $l \in \mathbb{N}$ zu

$$\begin{aligned} & \sigma^{l-1} / \sqrt{2\pi} \left\{ 0 - \int_{-\infty}^k [l(k-t)^{l-1} (-1)t + \right. \\ & \left. + (k-t)^l 1] (-e^{-t^2/2}) dt \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \int_{-\infty}^k (k-t)^l e^{-t^2/2} dt \} = \\ & = l\sigma^{l-1} / \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^k (k-t)^{l-1} (-t) e^{-t^2/2} dt =: H(l,k). \quad (A12) \end{aligned}$$

Unter der Beschränkung $l = 0$ resultiert aus (A11)

$$\begin{aligned} & \sigma^{-1} / \sqrt{2\pi} \{ (-k) e^{-k^2/2} - \\ & - \int_{-\infty}^k [(k-t)^l 1] (-e^{-t^2/2}) dt \\ & - \int_{-\infty}^k (k-t)^l e^{-t^2/2} dt \} \\ & = \sigma^{-1} / \sqrt{2\pi} \{ (-k) e^{-k^2/2} \} =: H(0,k). \quad (A13) \end{aligned}$$

Anhand von $H(0,k)$ und $H(l,k)$ wird nun folgende Fallunterscheidung vorgenommen:

(Dabei ist $\tau = k\sigma$ (vgl. Zeile (A8) und (A9)) und $\tau < 0, \tau = 0, \tau > 0$ entspricht $\tau < \mu, \tau = \mu, \tau > \mu$)

a) $l = 0, \tau < 0$ bzw. $\tau = 0$ bzw. $\tau > 0$

Mit $k = \tau/\sigma$ ergibt sich aus (A13)

$$H(0,k) = \sigma^{-1} / \sqrt{2\pi} (-\tau/\sigma) e^{-\tau^2/2\sigma^2} \quad \text{bzw.}$$

$$H(0,k) \begin{cases} < 0 \text{ für } \tau > 0 \\ = 0 \text{ für } \tau = 0 \\ > 0 \text{ für } \tau < 0. \end{cases} \quad (A14)$$

b) $l \in \mathbb{N}, \tau \leq 0$

Mit $t < k$ und $k = \tau/\sigma \leq 0$ ist $t < 0$. Somit ist jeder Faktor in Zeile (A12) positiv und damit

$H(l,k) > 0$ für $l \in \mathbb{N}$ mit $k \leq 0$ bzw. (mit $k = \tau/\sigma$) für jedes $\tau \leq 0$. (A15)

c) $l \in \mathbb{N}, \tau > 0$

(A12) kann durch zwei Integrale wie folgt ausgedrückt werden:

$$H(l,k) = l\sigma^{l-1} / \sqrt{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{-k} (k-t)^{l-1} (-t) e^{-t^2/2} dt + \int_{-k}^k (k-t)^{l-1} (-t) e^{-t^2/2} dt \right\}. \quad (A16)$$

Mit $t < -k$ und $k = \tau/\sigma > 0$ ist $t < 0$. Somit ist das erste Integral in (A16) positiv. Das zweite Integral

$$\int_{-k}^k (k-t)^{l-1} (-t) e^{-t^2/2} dt \quad (A17)$$

läßt sich wiederum in die zwei Integrale

$$\int_{-k}^0 (k-t)^{l-1} (-t) e^{-t^2/2} dt + \int_0^k (k-t)^{l-1} (-t) e^{-t^2/2} dt \quad (A18)$$

aufteilen. Ersetzt man t durch $s = (-t)$ ($\Leftrightarrow t = -s$) so ergibt sich mit $ds / dt = (-1)$ und den Integralgrenzen $s = k$ ($\Leftrightarrow t = -k$) und $s = 0$ ($\Leftrightarrow t = 0$)

$$\int_k^0 (k+s)^{l-1} s e^{-s^2/2} (-1) ds + \int_0^k (k-t)^{l-1} (-t) e^{-t^2/2} dt. \quad (A19)$$

Da $\int_a^b h(x) dx = -\int_b^a h(x) dx$ können die Integralgrenzen vertauscht werden.

Verwendet man wieder die ursprüngliche Bezeichnung t für die 1. Integrationsvariable, erhält man

$$\int_0^k (k+t)^{l-1} t e^{-t^2/2} dt + \int_0^k (k-t)^{l-1} (-t) e^{-t^2/2} dt \quad (A20)$$

$$= \int_0^k \{ (k+t)^{l-1} - (k-t)^{l-1} \} t e^{-t^2/2} dt. \quad (A21)$$

Mit $0 < t < k$ bzw. $k = \tau/\sigma > 0$ ist jeder Faktor in (A21) positiv. Damit ist auch das zweite Integral in (A16) positiv, d.h.

$H(l,k) > 0$ für $l \in \mathbb{N}$ mit $k > 0$ bzw. (mit $k = \tau/\sigma$) für jedes $\tau > 0$. (A22)

Zusammenfassung:

Mit (A14), (A15) und (A22) ist $d(\text{LPM}^l(Z,\tau)/d\sigma \geq 0$ für $(l \in \mathbb{N}, \tau \in \mathbb{R})$ oder $(l = 0, \tau \leq \mu)$.

In der Annahme zum 2. Teil des Beweises wurde für die Portefeuilles P_x und P_y $\sigma_x < \sigma_y$ vorausgesetzt. Damit ist $\text{LPM}^l(Y,\tau) > \text{LPM}^l(X,\tau)$ bzw. P_x ein Mean-LPM^l-effizientes Portefeuille.

Damit ist der Satz bewiesen.

Fussnoten

- [1] WILDARSKY (1993)
- [2] KAHN (1992)
- [3] MARKOWITZ (1952)
- [4] MARKOWITZ (1952)
- [5] ROY (1952)
- [6] MARKOWITZ (1959)
- [7] ELTON/GRUBER (1991)
- [8] ELTON/GRUBER (1991)
- [9] ROY (1952)
- [10] LEIBOWITZ/HENRICKSON (1989)
- [11] BAUMOL (1963), MARKOWITZ (1959)
- [12] RUDOLF (1994)
- [13] LINTNER (1965), MOSSIN (1966), SHARPE (1964)
- [14] JAEGER/ RUDOLF/ZIMMERMANN (1995)
- [15] JAEGER/ RUDOLF/ZIMMERMANN (1995)
- [16] siehe Software zu HAUGEN (1989)
- [17] MARKOWITZ (1952)
- [18] SHARPE (1967)
- [19] LEIBOWITZ/HENRICKSON (1989)/
LEIBOWITZ/KOGELMAN(1991)
- [20] HARLOW (1991)
- [21] HARLOW (1991)
- [22] HARLOW (1991)

Literatur

- BAUMOL, W. J. (1963): „An Expected Gain-Confidence Criterion for Portfolio Selection“, *Management Science*.
- ELTON, E. J. and M. J. GRUBER (1991): „Modern Portfolio Theorie and Investment Analysis“, Wiley, New York, 4th ed., p.p. 216ff.
- HARLOW, W. V. (1991): „Asset Allocation in a Downside-Risk-Framework“, *Financial Analysts Journal*, pp. 28–40.
- HAUGEN, R. A. (1989): „Modern Investment Theory“, Prentice Hall, New Jersey.
- JAEGER, S., M. RUDOLF and H. ZIMMERMANN (1995): „Efficient Shortfall Frontier“, *Zfbf*, Nr. 4, pp. 355–365.
- KAHN, R. (1992): „Defining Risk“, *BARRA-Newsletter*, July/August, pp.10–12.
- LEIBOWITZ, M. L. and R. D. HENRICKSON (1989): „Portfolio Optimization with shortfall Constraints“, *Financial Analysts Journal* 45, pp. 34–41.
- LEIBOWITZ, M. L. and S. KOGELMAN (1991): „Asset allocation under shortfall constraints“, *The Journal of Portfolio Management*, pp. 18–23.
- LINTNER, J. (1965): „The Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets“, *Review of Economics and Statistics* 47, pp. 13–37.
- MARKOWITZ, H. (1952): „Portfolio Selection“, *Journal of Finance*.
- MARKOWITZ, H. (1959): „Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments“, New York.
- MOSSIN, J. (1966): „Equilibrium in Capital Asset Markets“, *Econometrica* 34, pp. 261–276.
- ROY, A. D. (1952): „Safty-First and the Holding of Assets“, *Econometrica*, pp. 431–449.
- RUDOLF, M. (1994): „Efficient Frontiere and Shortfall Risk“, *Finanzmarkt und Portfolio Management*, Nr. 1, pp. 88–101.
- SHARPE, W. F. (1964): „Capital Asset Prices: A Theorie of Market Equilibriums under conditions of Risk“, *Journal of Finance* 19, pp. 425–442.
- SHARPE, W. F. (1967): „Portfolio-Analysis“, *Journal of Financial and Quantitative Ananlysis*, June.
- WILDARSKY, A. (1993): „Vergleichende Untersuchung zur Risikowahrnehmung: Ein Anfang“, in: *Bayerische Rück (Hrsg.), Risiko ist ein Konstrukt – Wahrnehmung zur Risikowahrnehmung*, Knesebeck, pp. 191–211.