RUDI ZAGST, FRANK HERMANN, WOLFGANG SCHMID*

Univariate und bivariate GARCH-Modelle zur Schätzung des Beta-Faktors

1. Einleitung

Trotz vieler Kritikpunkte ist das von SHARPE (1964), LINTNER (1965) und MOSSIN (1966) entwickelte Capital Asset Pricing Model (CAPM) das wohl bekannteste Modell zur Erklärung des Zusammenhangs zwischen der erwarteten Rendite und dem Risiko eines Wertpapiers. Unter teilweise sehr restriktiven Annahmen, wie zum Beispiel der Nichtberücksichtigung von Transaktionskosten und Steuern, der Zugrundelegung von Erwartungswert und Varianz als einzigen Entscheidungskriterien oder der Prämisse homogener und zeitunabhängiger Erwartungen bezüglich der Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen der Rendite, wird im Gleichgewicht ein linearer Zusammenhang zwischen erwarteter Rendite und systematischem Risiko (Beta) gefunden, die sogenannte Grundgleichung des CAPM.

Bezeichnet R die Rendite einer Aktie mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2, R_M die Rendite des sogenannten Marktportefeuilles mit Erwartungswert μ_M und Varianz σ_M^2, C_M die Kovarianz zwischen R und R_M sowie r den risikolosen Zins, und definiert man den Beta-Faktor als $\beta = C_M / \sigma_M^2$, so ist die Grundgleichung gegeben durch

$$\mu = r + \beta(\mu_M - r) = \alpha + \beta\mu_M \tag{1}$$

* Für wertvolle Anregungen danken wir dem anonymen Gutachter. Rudi Zagst, Department of Economics, University of Ulm, D-89069 Ulm, Fax 0049 - 731 - 502 37 37.

mit $\alpha = r\,(1 - \beta)$. Das Beta einer Aktie erweist sich somit als Mass der Sensitivität zwischen den erwarteten Renditen der Aktie und des Marktportefeuilles.

Ein entscheidender Nachteil dieser Modellbildung ist die oben bereits erwähnte Konstanz der Verteilungsmomente im Zeitablauf. Die von ENGLE (1982) und BOLLERSLEV (1986,1987) entwikkelten ARCH- und GARCH-Modelle ermöglichen eine einfache Modellierung einer zeitabhängigen Varianz. Dabei beschränken sie sich allerdings auf eine abhängige Variable. Zahlreiche Fragestellungen, die die Bewertung von Vermögenstiteln zum Gegenstand haben, sind jedoch nur in einem multivariaten Kontext zu klären. Dies gilt insbesondere für die im Beta-Faktor enthaltene Kovarianz zwischen Aktien- und Marktrendite.

Die folgende Graphik verdeutlicht exemplarisch, dass die zeitliche Variation des Beta-Faktors signifikant ist. Die dabei berechneten "aktuellen" Betas werden analog zu der in Abschnitt 2.4 gegebenen Formel (9) für jeden Zeitpunkt t aus den jeweils 30 aktuellsten Daten ermittelt.

In dieser Arbeit wollen wir zu den bereits bekannten Methoden zur Schätzung zeitvariabler Beta-Faktoren (vgl. BOS/NEWBOLD (1985) und CHOU et al. (1992)) eine weitere Modellierungsmöglichkeit vorstellen. Dabei wird auf den von BABA et al. (1991) entwickelten multivariaten GARCH(p,q)-Ansatz zurückgegriffen. Die resultierenden Schätzer werden mit dem empirischen

Beta-Faktor nach BLUME (1975) verglichen. Es zeigt sich, dass im Falle nachweisbarer GARCH-Effekte genauere Schätzer erzielt werden. Als Gütekriterium diente dabei der mittlere quadratische Abstand der Schätzwerte zu den über den Prognosehorizont gebildeten aktuellen Betas. Unsere Untersuchung bezieht sich auf die DAX-Werte des Zeitraumes vom 3.2.1994 bis zum 21.11.1994. Der Prognosezeitraum erstreckt sich vom 22.11.1994 bis zum 4.1.1995.

2. Verschiedene Verfahren zur Schätzung des Beta-Koeffizienten

In diesem Abschnitt sollen einige Methoden zur Schätzung des Beta-Faktors vorgestellt werden. Während man bei dem empirischen Beta-Faktor nach BLUME von konstanten Varianzen und Kovarianzen ausgeht, erlaubt das univariate GARCH(1,1)-Modell die Modellierung zeitabhängiger Varianzen, allerdings bei konstantem Beta (siehe Abschnitt 2.2). Dagegen lässt das in Abschnitt 2.3 vorgestellte GARCH-M-Modell auch zeitabhängige Beta-Faktoren zu.

Im folgenden bezeichnen wir mit r_t bzw. r_{Mt} die zwischen den Zeitpunkten t − 1 und t erzielten Aktien- bzw. Marktrenditen. Dabei gehen wir von einem Stichprobenumfang T aus. $\bar{r}$ und $\bar{r}_M$ stehen für die entsprechenden arithmetischen Mittel.

2.1 Der empirische Beta-Faktor nach BLUME

Der empirische Beta-Faktor berechnet sich aus

$$\beta_{emp} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(r_t - \bar{r})(r_{Mt} - \bar{r}_M)}{\sum_{t=1}^{T}(r_{Mt} - \bar{r}_M)^2}. \tag{2}$$

In diesem Zusammenhang haben BLUME (1975) und LEVY (1971) in ihren Arbeiten darauf hingewiesen, dass mit dem historischen Schätzer speziell für die Betas einzelner Aktien (weniger wiederum für die Betas umfangreicher Portfolios) die Tendenz unterstützt wird, ohnehin hohe Beta-Koeffizienten zu über- und sehr niedrige zu unterschätzen. Des weiteren kann für die tatsächlichen Betas des Prognosezeitraumes ein Verhalten derart festgestellt werden, dass diese im Durchschnitt dem langfristigen Mittelwert 1 näher zu sein scheinen als es der empirische Schätzer anzeigt. BLUME entwickelte bereits 1975 eine einfache Methode, historische Betas zu modifizieren, um diesem Mean-Reversion-Effekt Rechnung zu tragen (vgl. ELTON/GRUBER (1991, S. 113ff.)):

Für zwei aufeinanderfolgende Zeitabschnitte I und II ermittelt man zunächst für jede der betrachteten N Aktien i die empirischen Beta-Koeffizienten β_i^I und β_i^{II}. Aus der linearen Regression

$$\beta_i^{II} = a + b\beta_i^I + \varepsilon_i, \quad i = 1, ..., N, \tag{3}$$

schätzen wir die Koeffizienten mittels der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (OLS) und erhalten so die Schätzwerte $\hat{a}$ und $\hat{b}$. Dabei sei die Störgrösse ε_i als Weisses Rauschen angenommen. Über die Gleichung

$$\beta_{Blume,i} = \hat{a} + \hat{b}\beta_i^{II}$$

werden die historischen Schätzwerte β_i^{II} zum Beta von BLUME korrigiert, womit der Effekt verbunden ist, dass ehemals vergleichsweise hohe und niedrige Werte für β_i^{II} prinzipiell auf solche für $\beta_{Blume,i}$ adjustiert werden, welche nun näher dem langfristigen Mittelwert 1 sind. Untersuchungen von KLEMKOSKY und MARTIN (1975) zeigten, dass sich dieser Umstand in der Regel in niedrigeren Prognosefehlern niederschlägt.

2.2 Das univariate GARCH(1,1)-Modell

Betrachtet wird ein auf William F. SHARPE zurückgehendes Regressionsmodell, welches auch als Single Index Model bezeichnet wird (vgl. ELTON/GRUBER (1991, S. 100ff.)). Wir erweitern diesen Ansatz in der Hinsicht, dass der in der Regressionsgleichung auftretende Störterm einem

GARCH(1,1)-Prozess folgen soll. Die hierbei gewählten Prozessordnungen p = q = 1 konnten auf Basis des sogenannten **BIC-Kriteriums** ihre Rechtfertigung finden (zur theoretischen Herleitung vgl. CHOU (1988)):

$$\begin{aligned} & r_t = \mu + \beta_{GAR} r_{Mt} + \varepsilon_t,\ t = 2,\dots,T, \\ & \varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}, h_{t-1} \sim N(0, h_t), \\ & h_t = \alpha_{10} + \alpha_{11} \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_{12} h_{t-1}. \end{aligned} \qquad (5)$$

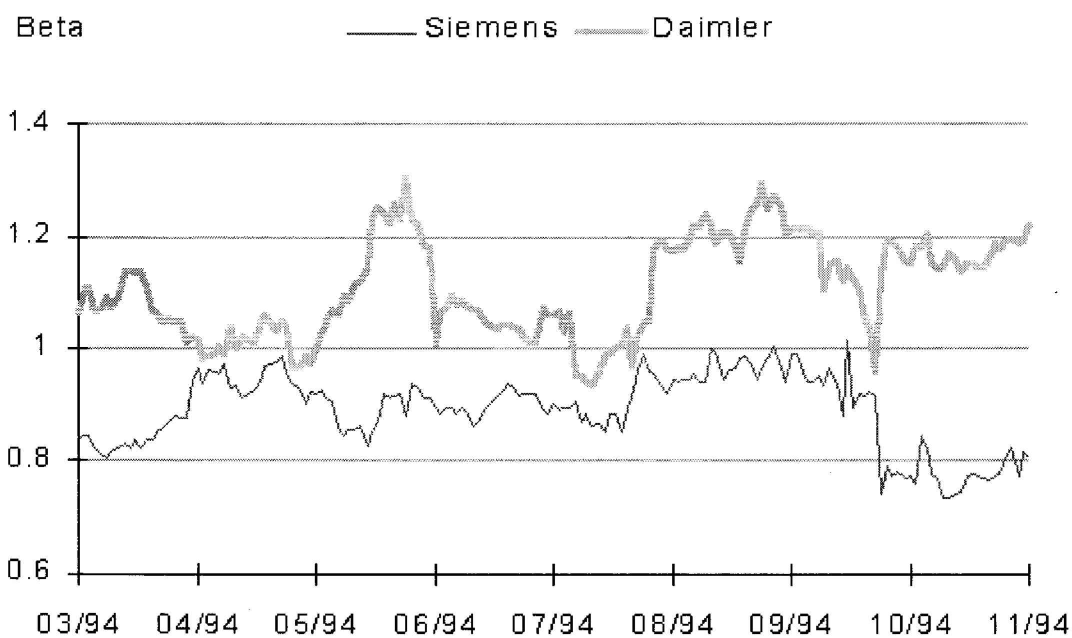
Dabei bedeute die Symbolik $\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}, h_{t-1} \sim N(0, h_t)$, dass unter der Kenntnis von ε_{t-1} und h_{t-1} die Grösse ε_t einer Normalverteilung mit (bedingtem) Erwartungswert 0 und (bedingter) Varianz h_t folgt.

Dieses Modell entspricht dem univariaten GARCH(1,1)-Modell im Anhang mit

$$y_t = r_t,\ X_t = (1, r_{Mt}),\ \beta_1 = \mu \text{ und } \beta_2 = \beta_{GAR}. \qquad (6)$$

Zahlreiche empirische Untersuchungen haben gezeigt, dass univariate GARCH(1,1)-Prozesse eine äusserst effektive und vielseitig einsetzbare Modellierungsmöglichkeit darstellen (vgl. AKGIRAY (1989) und HEYNEN/KAT (1994)). Das im folgenden verwendete bivariate GARCH(1,1)-M-Modell zeichnet sich dadurch aus, dass das häufig bei finanzwirtschaftlichen Daten auftretende Phänomen der Korrelation explizit berücksichtigt wird.

Abbildung 1: Beta-Faktoren der Siemens- und Daimler-Aktie im Zeitablauf (auf 30-Tage-Basis beruhend)



2.3 Das bivariate diagonale GARCH(1,1)-M-Modell

Für Situationen innerhalb der Finanztheorie, in denen eine Austauschbeziehung zwischen Risiko und erwarteter Rendite in Form einer zeitabhängigen Risikoprämie besteht, steht mit sogenannten **GARCH-in-Mean-Modellen (GARCH-M-Modellen)** eine wichtige Verfeinerung der linearen GARCH-Modelle zur Verfügung. Die Austauschbeziehung zwischen Risiko und erwarteter Rendite wird dadurch berücksichtigt, dass die bedingten zweiten Momente als erklärende Variable in die Regressionsgleichung mit aufgenommen werden. Dadurch kann erreicht werden, dass eine Erhöhung der bedingten (Ko-)Varianz – welche ein erhöhtes Risiko der Anlageform anzeigt – mit einem ebenfalls steigenden bedingten Erwartungswert der abhängigen Variablen (Rendite) einhergeht. In Anlehnung an die Arbeit von BOLLERSLEV et al. (1988) lautet das relevante bivariate GARCH-Modell (vgl. Anhang):

$$\begin{pmatrix} r_t \\ r_{Mt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 + \gamma_1 h_{11t} + \rho_1 h_{12t} \\ \mu_2 + \gamma_2 h_{22t} + \rho_2 h_{12t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} \varepsilon_{1(t-1)} \\ \varepsilon_{2(t-1)} \end{pmatrix}, H_{t-1} \sim N(0, H_t),$$

$$H_t = \begin{pmatrix} h_{11t} & h_{12t} \\ h_{12t} & h_{22t} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} h_{11t} \\ h_{12t} \\ h_{22t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{10} + \alpha_{11}\varepsilon^2_{1(t-1)} + \alpha_{12} h_{11(t-1)} \\ \alpha_{20} + \alpha_{21}\varepsilon_{1(t-1)}\varepsilon_{2(t-1)} + \alpha_{22} h_{12(t-1)} \\ \alpha_{30} + \alpha_{31}\varepsilon^2_{2(t-1)} + \alpha_{32} h_{22(t-1)} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Wir ermitteln nun hieraus für den Prognosehorizont T* Schätzwerte für die zeitabhängigen Beta-Faktoren $\beta_{biv,\tau}$ aus der Definitionsgleichung:

$$\beta_{biv,\tau} := \frac{h_{12\tau}}{h_{22\tau}}, \ \tau \geq T+1, \ldots, T+T^*. \quad (8)$$

Die hierfür nötigen Grössen $h_{12\tau}$ und $h_{22\tau}$ können dabei rekursiv aus dem obigen Schema berechnet werden, wobei die Parameter mit Hilfe der Messungen von $t = 1, \ldots, T$ geschätzt werden.

2.4 Die konkrete Umsetzung

Anhand der T = 200 täglichen (bereinigten) Schlusskurse deutscher DAX-Werte im Zeitraum 03.02.94 – 21.11.94 wurden nun für die soeben vorgestellten vier Ansätze die Schätzwerte für den jeweiligen Beta-Koeffizienten bestimmt. Wie üblich wurden die stetigen Renditen r_t und r_{Mt} mittels $\log(S_t / S_{t-1})$ bzw. $\log(DAX_t / DAX_{t-1})$ ermittelt, wobei unter S_t der jeweilige Aktienkurs und unter DAX_t der DAX-Kurs zum Zeitpunkt t zu verstehen sind.

Der empirische Beta-Faktor β_{emp}, dessen im Sinne von BLUME erfolgte Korrektur β_{Blume} und der aus dem univariaten GARCH(1,1)-Modell zu ermittelnde Beta-Schätzwert β_{GAR} wurden mit dem statistischen Softwarepaket **TSP** (**T**ime **S**eries **P**rocessor) bestimmt, während die Schätzwerte aus dem bivariaten (diagonalen) GARCH-M-(1,1)-Ansatz mit dem Softwaretool **RATS** (**R**egression **A**nalysis and **T**ime **S**eries) berechnet wurden. Die der Ermittlung des BLUME-Betas zugrundegelegten Schätzzeiträume I und II umfassen die ersten (für I) bzw. letzten 100 Daten.

Der Prognosezeitraum erstreckt sich vom 22.11.94 – 04.01.95, das heisst es wurden T* = 30 Tage gewählt. Für jeden Zeitpunkt τ des Prognosezeitraumes wurde das "aktuelle" Beta unter Berücksichtigung der vorhergehenden T* Kursdaten bestimmt durch

$$\beta_{act,\tau} := \sum_{t=T-T^*+\tau}^{T+\tau} (r_t - \bar{r}_\tau)(r_{Mt} - \bar{r}_{M\tau}) \Bigg/ \sum_{t=T-T^*+\tau}^{T+\tau} (r_{Mt} - \bar{r}_{M\tau})^2$$

$$\text{mit } \bar{r}_\tau = \frac{1}{T^*+1} \sum_{t=T-T^*+\tau}^{T+\tau} r_t, \ \bar{r}_{M\tau} = \frac{1}{T^*+1} \sum_{t=T-T^*+\tau}^{T+\tau} r_{Mt}. \quad (9)$$

Diese Grössen vergleichen wir mit den entsprechenden Schätzwerten von β_{emp}, β_{Blume}, β_{GAR} und $\beta_{biv,\tau}$, die wir unter dem Symbol $\beta_{*,\tau}$ zusammenfassen. Ein naheliegendes Gütekriterium ist nun der **Mean Square Error (MSE):**

$$\mathrm{MSE} := \frac{1}{30}\sum_{\tau=1}^{30}\left(\beta_{*,\tau} - \beta_{act,\tau}\right)^2. \tag{10}$$

Es wurde untersucht, wie gut sich das univariate GARCH-Modell zur Beschreibung der Renditen eignet. Mittels einem Test von Box-Ljung wurde überprüft, ob eine Fehlspezifikation des Modells vorliegt (vgl. BROCKWELL/DAVIS (1991, S. 298ff.)). Für die dabei verwendete Q-Statistik wurden 20 bzw. 30 Residuen berücksichtigt. Grosse Q-Werte sind ein Indiz dafür, dass das Modell umformuliert werden sollte. Für eine genauere Quantifizierung wurde für jeden Q-Wert auch der zugehörige p-Wert (beobachtetes Signifikanzniveau) ermittelt. Liegt dieser p-Wert unterhalb eines vorgegebenen Signifikanzniveaus, so ist das Modell nicht geeignet und muss modifiziert werden. Mit dem von BOLLERSLEV (1986) angegebenen LM-Test wurde auf GARCH(1,1)-Effekte geprüft, d.h. die Nullhypothese lautet "$\alpha_{12} = 0$". Grosse LM-Werte deuten auf die Existenz von GARCH-Effekten hin. Kritische Werte für spezielle Signifikanzniveaus sind am Ende der folgenden Tabelle angegeben. Sie gibt eine Übersicht über die gewonnenen Ergebnisse für alle 30 DAX-Werte, welche mit den entsprechenden Reuters-Kürzeln bezeichnet sind. Für die während des Prognosehorizonts variierenden $\beta_{biv,\tau}$ wurde aus Gründen der Vergleichbarkeit die Schätzung für $\tau = 201$ in der Tabelle angegeben.

Zum Signifikanzniveau von 10% schliesst man anhand der zur Q-Statistik Q(30) gehörenden p-Werte, dass bei 10 der 30 Aktienkurse zur Beschreibung der Daten ein univariater GARCH(1,1)-Ansatz nicht geeignet ist. In diesem Fall ist es effektiver, auf eine allgemeinere (bivariate Prozesse) bzw. andere Modellbildung (Ansatz von BLUME) überzugehen. Dies spiegeln die ermittelten MSE-Werte gut wider. Der minimale MSE tritt jeweils viermal bei β_{biv} bzw. β_{Blume} auf, in einem Fall ist $\beta_{biv} \approx \beta_{GAR}$ (für BAYG) und einmal ist $\beta_{emp} \approx \beta_{GAR}$ (für DBCG).

Bei den verbleibenden 20 Aktienkursen liefert achtmal β_{biv} und je viermal eine der anderen Schätzmethoden den niedrigsten MSE. Dies kann noch wie folgt genauer aufgeschlüsselt werden. Geht man von $\alpha = 0.1$ aus, so schliesst man anhand der LM-Statistik (kritischer Wert 2.705) bei 5 Kursen, dass α_{12} signifikant von 0 verschieden ist. Bei allen diesen Kursen führt der GARCH-Ansatz zum kleinsten MSE (dreimal β_{biv}, zweimal β_{GAR}). Betrachtet man die verbleibenden 15 Papiere, so kann man in allen Fällen, in denen β_{emp} die beste Schätzung liefert (viermal), nur minimale Unterschiede zu β_{GAR} feststellen, d.h. es ist $\beta_{emp} \approx \beta_{GAR}$. Die Verwendung von β_{GAR} würde nur zu einer geringfügigen Verschlechterung führen. Bei den übrigen 11 Aktien ist β_{Blume} nur viermal den GARCH-Ansätzen überlegen (β_{biv} fünfmal, β_{GAR} zweimal).

2.5 Zusammenfassung

Unsere Untersuchungen zeigen, dass keines der betrachteten Schätzverfahren für den Beta-Faktor stets die besten Ergebnisse liefert. Dies ist aber auch nicht überraschend, da die DAX-Werte eine unterschiedliche Dynamik aufweisen und folglich zur Modellierung verschiedene Ansätze verwendet werden müssen. Es wird allerdings nachgewiesen, dass in fast allen Fällen, in denen eine GARCH-Modellierung durch einen Portmanteau-Test (Q(30)-Statistik) zum Signifikanzniveau von 10% nicht verworfen wird, diese Methoden zu den (nach unserem Gütekriterium) besten Schätzern des Beta-Faktors führen. Da der GARCH-Ansatz den Fall unabhängiger Zufallsgrössen umfasst, sollte man prinzipiell die Schätzer β_{GAR} und β_{biv} gegenüber β_{emp} bevorzugen. Nur bei sehr kleinen Koeffizienten weisst β_{emp} Vorteile auf, die aber vernachlässigbar sind. Jedoch erhält man mit dem Ansatz von BLUME bei einigen wenigen DAX-Werten bessere Schätzer als bei der GARCH-Modellierung. Diese treten ausschliesslich bei

Tabelle 1: Beta-Schätzwerte und Teststatistiken im Überblick

Titel	β_{emp} (MSE)	β_{Blume} (MSE)	β_{GAR} (MSE)	LM	Q(20)(p – W.) Q(30)(p – W.)	$\beta_{biv,201}$ (MSE)
ALVG	1.24 (0.0116)	1.04 (0.0106)	1.24 (0.0122)	3.2	24.2 (0.06) 29.1 (0.26)	1.231 (0.00929)
BASF	1.03 (0.0102)	0.987 (0.0052)	1.01 (0.0070)	7.11	30.4 (0.01) 40.8 (0.02)	1.013 (0.00485)
BAYG	1.09 (0.0086)	1.02 (0.0114)	1.067 (0.0073)	9.16	30.5 (0.01) 39.6 (0.03)	1.041 (0.0076)
BHWG	0.88 (0.0375)	0.939 (0.052)	0.896 (0.040)	0.76	21.5 (0.12) 26.5 (0.38)	0.918 (0.0396)
BMWG	0.93 (0.0161)	0.964 (0.0093)	0.931 (0.0161)	0.38	24.0 (0.07) 45.4 (0.007)	1.005 (0.0042)
BVMG	1.11 (0.0105)	1.01 (0.0086)	1.11 (0.0101)	0.54	20.6 (0.15) 25.7 (0.42)	1.177 (0.0219)
CBKG	0.956 (0.0119)	0.932 (0.0083)	0.946 (0.0103)	0.81	15.7 (0.40) 22.7 (0.59)	0.958 (0.00635)
CONG	0.88 (0.0077)	0.90 (0.0101)	0.89 (0.0087)	0.23	12.8 (0.61) 22.2 (0.62)	0.845 (0.00628)
DAIG	1.13 (0.0428)	1.036 (0.0854)	1.14 (0.038)	8.54	17.1 (0.31) 28.7 (0.28)	1.095 (0.0558)
DBCG	1.06 (0.0327)	0.98 (0.0401)	1.06 (0.0326)	0.745	24.6 (0.06) 38.8 (0.04)	1.223 (0.0466)
DBKG	0.976 (0.0139)	0.953 (0.0179)	0.982 (0.0131)	1.25	14.9 (0.46) 24.4 (0.49)	1.004 (0.0129)
DGSG	0.96 (0.0334)	1.02 (0.0394)	0.955 (0.0332)	2.74	6.1 (0.98) 10.9 (0.99)	0.903 (0.0363)
DRSD	1.06 (0.0589)	0.889 (0.0072)	0.998 (0.0338)	0.12	31.1 (0.009) 47.7 (0.004)	1.133 (0.0623)
HFAG	1.13 (0.0136)	1.057 (0.0165)	1.13 (0.0137)	0.07	6.2 (0.98) 13.6 (0.97)	1.061 (0.0151)
HNKG	0.56 (0.0305)	0.807 (0.169)	0.561 (0.0316)	0.44	18.1 (0.26) 27.1 (0.35)	0.569 (0.0508)
KARG	0.723 (0.0559)	0.841 (0.1158)	0.721 (0.0553)	0.096	12.7 (0.63) 27.8 (0.32)	0.729 (0.0785)
KFHG	0.855 (0.026)	0.796 (0.016)	0.852 (0.026)	0.358	21.8 (0.11) 44.0 (0.01)	0.829 (0.0194)
LHAG	1.05 (0.1244)	0.81 (0.0381)	1.03 (0.1129)	0.275	12.6 (0.63) 24.3 (0.50)	0.950 (0.0809)
LING	0.734 (0.0293)	0.831 (0.0716)	0.746 (0.0336)	1.55	15.4 (0.42) 27.7 (0.32)	0.840 (0.0349)
MANG	0.88 (0.0346)	0.932 (0.0203)	0.885 (0.0343)	0.54	28.4 (0.02) 47.5 (0.004)	0.958 (0.0269)
METG	1.31 (1.207)	1.21 (1.015)	1.475 (1.551)	13.07	24.2 (0.06) 49.6 (0.002)	1.092 (0.9559)
MMWG	0.929 (0.0217)	0.928 (0.0220)	0.914 (0.0251)	2.07	35.3 (0.002) 43.0 (0.01)	0.961 (0.01532)
PRSG	0.797 (0.0185)	0.934 (0.062)	0.793 (0.0178)	4.5	22.2 (0.11) 29.3 (0.25)	0.759 (0.00997)
RWEG	1.01 (0.00627)	0.961 (0.00106)	1.001 (0.00452)	0.466	6.8 (0.96) 11.4 (0.99)	0.991 (0.00504)
SCHG	0.82 (0.0124)	0.92 (0.0257)	0.816 (0.0122)	0.29	21.0 (0.14) 23.6 (0.54)	0.84 (0.0094)
SIEG	0.87 (0.0208)	0.915 (0.0149)	0.893 (0.0177)	2.36	19.9 (0.18) 27.4 (0.34)	0.859 (0.0239)
THYH	0.934 (0.0225)	0.981 (0.01126)	0.933 (0.0226)	0.55	22.7 (0.09) 30.4 (0.21)	1.123 (0.01068)
VEBG	0.92 (0.00383)	0.924 (0.00353)	0.918 (0.00397)	0.238	29.1 (0.02) 34.9 (0.09)	0.837 (0.00791)
VIAG	0.71 (0.00357)	0.84 (0.0301)	0.707 (0.00302)	0.195	11.7 (0.70) 17.7 (0.85)	0.802 (0.00496)
VOWG	0.936 (0.0472)	0.965 (0.0385)	0.961 (0.0394)	6.46	1.0 (0.99) 1.9 (0.99)	0.897 (0.0343)

Kritische Werte für LM: 2.705($\alpha = 0.1$), 3.84($\alpha = 0.05$), 6.63($\alpha = 0.01$)

Kursen auf, bei denen ein GARCH-Ansatz zur Modellierung verworfen wird oder bei denen die Koeffizienten des GARCH-Modells klein sind. Insgesamt muss allerdings hervorgehoben werden, dass die nichtlineare Zeitreihenanalyse in Form der GARCH-Modelle sehr effektive Methoden zur Beschreibung von Aktienkursen zur Verfügung stellt.

Anhang

BABA et al. (1991) führten ein multivariates GARCH(p,q)-Modell der Dimension n ein. An dieser Stelle soll auf den für diese Arbeit wichtigen Spezialfall eines bivariaten (n = 2) diagonalen GARCH(1,1)-Modells mit Regressionsanteil eingegangen werden. Dabei handelt es sich um einen zweidimensionalen Regressionsansatz, bei dem die Fehlervariablen einer speziellen Abhängigkeitsstruktur unterliegen können. Mit $y_t = (y_{1t}, y_{2t})$ bezeichnen wir die Beobachtungen der abhängigen Variablen $Y=(Y_1,Y_2)^T$ zu den Zeitpunkten $1 \leq t \leq T$. Die sogenannte Designmatrix zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$X_t = \begin{pmatrix} x_{1t}^T & 0 \\ 0 & x_{2t}^T \end{pmatrix} \qquad \text{(A1)}$$

wobei die Vektoren x_{1t}^T und x_{2t}^T den Einfluss der erklärenden Variablen widerspiegeln. Dieses Modell besitzt nun die folgende lineare Struktur:

$$y_t = X_t\beta + \varepsilon_t. \qquad \text{(A2)}$$

Dabei bezeichnet $\beta = (\beta_1, \beta_2)^T$ den Vektor der Regressionskoeffizienten und $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})^T$ den zufälligen Fehlervektor.

Im Gegensatz zum klassischen Regressionsansatz wird angenommen, dass ε_t einem sogenannten GARCH-Prozess ohne Regressionsanteil mit Erwartungswert 0 genügt. Dies bedeutet, dass die Verteilung von ε_t unter der Kenntnis von ε_{t-1} und H_{t-1} mehrdimensional normalverteilt ist und zwar mit Erwartungswert 0 und Kovarianzmatrix

$$H_t = \begin{pmatrix} h_{11t} & h_{12t} \\ h_{12t} & h_{22t} \end{pmatrix}.$$

Dabei geht man davon aus, dass sich H_t wie folgt rekursiv ergibt:

$$\begin{pmatrix} h_{11t} \\ h_{12t} \\ h_{22t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{10} + \alpha_{11}\varepsilon_{1(t-1)}^2 + \alpha_{12}h_{11(t-1)} \\ \alpha_{20} + \alpha_{21}\varepsilon_{1(t-1)}\varepsilon_{2(t-1)} + \alpha_{22}h_{12(t-1)} \\ \alpha_{30} + \alpha_{31}\varepsilon_{2(t-1)}^2 + \alpha_{32}h_{22(t-1)} \end{pmatrix}. \qquad \text{(A3)}$$

Die Parameter des GARCH-Prozesses sind also gegeben durch α_{10}, α_{20}, α_{30}, α_{11}, α_{21}, α_{31}, α_{12}, α_{22}, α_{32}. Für n = 1 erhält man den von BOLLERSLEV (1986) vorgestellten (univariaten) GARCH(1,1)-Prozess. Setzt man $h_t = h_{11t}$ und $\varepsilon_t = \varepsilon_{1t}$, so reduziert sich die vektorielle Varianzgleichung zu

$$h_t = \alpha_{10} + \alpha_{11}\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_{12}h_{t-1}. \qquad \text{(A4)}$$

Während BABA et al. von einer bekannten Matrix X_t ausgehen, findet man bei BOLLERSLEV et al. (1988) einen etwas modifizierten Ansatz. Bei ihnen darf X_t von den bedingten zweiten Momenten abhängen. Im speziellen ist

$$X_t = \begin{pmatrix} 1 & h_{11t} & h_{12t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & h_{22t} & h_{12t} \end{pmatrix}. \qquad \text{(A5)}$$

In diesem Fall spricht man von einem GARCH-IN-MEAN-Modell (GARCH-M-Modell). Die Schätzung der im bivariaten GARCH(1,1)-M-Modell involvierten Parameter erfolgt durch Maximierung der (bedingten) Likelihood-Funktion (vgl. BOLLERSLEV et al. (1988, S. 119–121)). Die dafür erforderlichen iterativen Methoden sind im Algorithmus von BERNDT et al. (1974) integriert.

Literatur

AKGIRAY, V. (1989): "Conditional Heteroscedasticity in Time Series of Stock Returns: Evidence and Forecast", Journal of Business 62, pp. 55–80.

ALEXANDER, C., and N. S. RIYAIT (1992): "The World According to GARCH", Technical Report, University of Sussex.

BABA, Y., R. F. ENGLE, D. KRAFT, and K. KRONER (1991): "Multivariate Simultaneous Generalized ARCH", Technical Report, Department of Economics, University of California, San Diego.

BERNDT, E. K., B. H. HALL, R. E. HALL, and J. A. HAUSMAN (1974): "Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models", Annals of Economic and Social Measurement 4, pp. 653–665.

BLUME, M. (1975): "Betas and their Regression Tendencies", Journal of Finance 10, pp. 785–795.

BOLLERSLEV, T. (1986): "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, Journal of Econometrics 31, pp. 307–327.

BOLLERSLEV, T. (1987): "A Conditionally Heteroscedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return", The Review of Economics and Statistics 69, pp. 542–547.

BOLLERSLEV, T., R. F. ENGLE, and J. M. WOOLDRIDGE (1988): "A Capital Asset Pricing Model with Time Varying Covariances", Journal of Political Economy 96, pp. 116–131.

BOS and NEWBOLD (1985): "Stochastic Parameter Regression Models", Sage Publications, Beverly Hills/London/New Delhi.

BROCKWELL, P. J. and R.A. DAVIS (1991): "Time Series – Theory and Methods", Springer Verlag.

CHOU, R. Y. (1988): "Volatility Persistence and Stock Valuations: Some Empirical Evidence Using GARCH", Journal of Applied Econometrics 3, pp. 279–294.

CHOU, R., R. F. ENGLE and A. Kane (1992): "Measuring risk aversion from excess returns on a stock index", Journal of Econometrics 52, pp. 201–224.

ELTON, E. J. and M. J. GRUBER (1991): "Modern Portfolio Theory and Investment Analysis", John Wiley and Sons, New York.

ENGLE, R. F. (1982): "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", Econometrica 50, pp. 987–1007.

HEYNEN, R. C. and H. M. KAT (1994): "Volatility Prediction: A Comparison of the Stochastic Volatility, GARCH(1,1), and EGARCH(1,1)- Models", The Journal of Derivatives, pp. 50–65.

KLEMKOSKY, R. and J. MARTIN (1975): "The Adjustment of Beta Forecasts", Journal of Finance 10, pp. 1123–1128.

LEVY, R. (1971): "On the Short-Term Stationarity of Beta Coefficients", Financial Analysts Journal 27, Nr. 5, pp. 55–62.

LINTNER, J. (1965): "Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification", Journal of Finance 20, pp. 587–615.

MOSSIN, J. (1966): "Equilibrium in a Capital Asset Market", Econometrica 34, pp. 261–275.

SHARPE, W.F. (1964): "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", Journal of Finance 19, pp. 425–442.