ALOIS L.J. GEYER*

Anlageentscheidungen bei Abhängigkeiten in Aktienrenditen

1. Einleitung

Traditionelle Ansätze der Portfolio Planung beruhen auf der Annahme, daß sich Aktienkurse wie ein Random Walk verhalten. Dies impliziert, daß Renditen konstanten Erwartungswert und Varianz haben und ermöglicht die Ableitung von analytischen Lösungen für das Allokationsproblem bei ein- und mehrperiodiger Betrachtung.
Im Gegensatz zu den traditionellen Annahmen gibt es wachsende empirische Evidenz dafür, daß Erwartungswert und Varianz von Renditen im Zeitablauf systematisch schwanken. Einen Überblick zum Themenkreis der sogenannten "return predictability" gibt FAMA (1991). GARCH Modelle haben sich besonders nützlich für die Beschreibung zeitvariabler Varianzen erwiesen, wie der Arbeit von BOLLERSLEV et al (1992) zu entnehmen ist. Diese Evidenz ergänzt den bereits hinreichend belegten Umstand, daß Renditen nicht normalverteilt sind.

*Ich möchte mich für hilfreiche Anmerkungen bei Bernard Dumas, Christian Gouriéroux, Steve Satchell, den Teilnehmern des INQUIRE Autumn 1993 Seminars, des Applied Econometrics Seminars an der Universität Cambridge, sowie dem Gutachter bedanken. Alois L.J. Geyer, Institut für Operations Research, Wirtschaftsuniversität Wien, Augasse 2-6 A-1090 Wien, Tel.: 01-31336 4559 Fax: 01-31336 740, geyer@apollo.wu-wien.ac.at.

Die festgestellte Zeitabhängigkeit kann als Resultat einer (unbeobachtbaren) Zustandsabhängigkeit betrachtet werden. In der vorliegenden Arbeit mache ich von dem Umstand Gebrauch, daß Abhängigkeiten in den ersten beiden Momenten der Renditeverteilung durch ARMA und GARCH Prozesse approximiert werden können. Wenn jedoch plausible Faktoren und Zustände, die die Renditen beeinflussen, bekannt sind und beobachtet werden können, sollten diese als erklärende Größen herangezogen werden.
Trotz zahlreicher empirischer Arbeiten, die die Zeitabhängigkeit der ersten beiden Momente und Abweichungen von der Normalverteilung belegen, sind die Implikationen dieser Eigenschaften für die Portfolioplanung noch nicht ausführlich untersucht worden. Dieses Versäumnis kann dadurch erklärt werden, daß die Verteilung für Renditen über mehrere Perioden unter Berücksichtigung der empirisch festgestellten Eigenschaften nicht explizit (in geschlossener Form) angegeben werden kann. Eine Möglichkeit, dieses Hindernis zu überwinden, besteht darin, die erforderliche Verteilung der Renditen zu simulieren und das Allokationsproblem numerisch zu lösen.
In dieser Arbeit werden die Anlageentscheidungen repräsentativer Investoren für typische Parameterwerte von Renditenprozessen verglichen. Die Investoren unterscheiden sich in ihren Annahmen über den tatsächlichen Renditenprozeß. Die Konsequenzen ihrer Entscheidungen werden auf Basis des

Nutzens des realisierten Endvermögens beurteilt. Nutzenunterschiede werden in Geldeinheiten ausgedrückt.
Die verwendeten Zeitreihenmodelle werden in Kapitel 2 beschrieben. In Kapitel 3 werden das Entscheidungsproblem, die Investoren, die Renditenprozesse, das Simulationsverfahren und die Evaluierungskriterien definiert. Ergebnisse werden in den Kapiteln 4 und 5 präsentiert und interpretiert.

2. Ein stochastisches Modell für Aktienrenditen

Das allgemeine stochastische Modell, das in dieser Arbeit verwendet wird, beruht auf folgender Definition:

$$\log(S_t/S_{t-1}) \equiv y_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

$$S_t\text{... Aktienkurs, } y_t\text{... Rendite} \quad \varepsilon \sim N(0,\sigma_t^2) \tag{1}$$

wobei μ_t der bedingte Erwartungswert der Renditen y_t ist. Der unbedingte Erwartungswert wird mit μ= E[y_t] bezeichnet. Um die Zeitabhängigkeit der erwarteten Renditen zu erklären, haben einige Autoren Regressionsmodelle verwendet, in denen μ_t durch vergangene Dividendenrenditen, Zinssätze und anderen erklärenden Größen erklärt wird (siehe FAMA 1991). Für die vorliegende Arbeit wird μ_t als bedingter Erwartungswert des MA(1) Modells

$$\mu_t = c + \theta\varepsilon_{t-1} \tag{2}$$

definiert, um eine Zustandsabhängigkeit der erwarteten Renditen zu approximieren.[1]Empirisch ermittelte Schätzwerte für θ liegen zwischen 0.05 und 0.2 (siehe FRENCH et al (1987) oder BAILLIE/ DEGENNARO (1990)). ε_t sind unabhängig, identisch verteilte Störungen mit bedingter Varianz σ_t^2. Die Zeitabhängigkeit in σ_t^2 wird durch GARCH(1,1) Modelle der Form

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + b_1\sigma_{t-1}^2$$

beschrieben. GARCH Modelle sind im Bereich der empirischen Finanzwirtschaft bereitwillig akzeptiert worden, weil sie für die Beschreibung von zwei bekannten Eigenschaften von Aktienrenditen geeignet sind. Sie bieten eine Lösung für das Problem der Auswahl einer geeigneten Renditenverteilung mit breiten Enden und hoher Konzentration um den Mittelwert (Leptokurtosis). Die Annahme einer bedingten Normalverteilung mit zeitabhängiger Varianz korrespondiert mit Mischverteilungsmodellen, die von zahlreichen Autoren für Aktienrenditen vorgeschlagen wurden.[2] Außerdem kann mit GARCH Modellen das Phänomen des "volatility clustering" - die Tendenz, daß große Preisänderungen von weiteren großen Preisänderungen mit identischen oder umgekehrten (aber nicht prognostizierbaren) Vorzeichen gefolgt werden - beschrieben werden.
Die unbedingte Varianz, die einem GARCH(1,1) Modell entspricht, ist gegeben durch:

$$\sigma^2 = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1}. \tag{3}$$

3. Entscheidungsproblem und Untersuchungsdesign

Die Implikationen der soeben beschriebenen Eigenschaften für die Portfolio Planung sind noch nicht ausführlich untersucht worden. Dies kann dadurch erklärt werden, daß die Verteilung für Renditen über mehrere Perioden unter Berücksichtigung der empirisch festgestellten Eigenschaften nicht explizit (in geschlossener Form) angegeben werden kann. Optimale Portfolios können daher nicht analytisch bestimmt werden. Ich versuche dieses Problem dadurch zu lösen, daß die Renditenverteilung für verschiedene Planungshorizonte simuliert wird, wobei die Verteilung auf typischen Parameterwerten von ARMA und GARCH Modellen beruht.
Die Analyse unterscheidet zwei Fälle: Im Fall A beruhen Entscheidungen auf perfekter Information über die Parameter des Renditenprozesses. Dabei

werden zwei Investoren definiert, die unterschiedliche Ansichten über die Art des Renditenprozesses haben: Die Annahmen des "conditional" Investors über die Zeitabhängigkeit und Verteilung der Renditen sind korrekt.[3]Der "constant" Investor unterstellt konstante Momente und Normalverteilung. Die Annahme perfekter Information hat den Vorteil, daß Unterschiede in den Ergebnissen eindeutig den unterschiedlichen Annahmen zugeordnet werden können.

Fall B bezieht zusätzlich das praktisch wichtige Problem der Auswirkung von Schätzfehlern auf die Anlageentscheidung ein. In diesem Fall werden Entscheidungen auf Basis geschätzter Parameter getroffen. Ich betrachte zusätzlich einen "window" Investor, der für die Schätzung weniger, aber aktuellere Daten verwendet, als der "conditional" und der "constant" Investor. In Fall B werden die Resultate sowohl von Schätzfehlern als auch von unterschiedlichen Annahmen über den Renditenprozeß beeinflußt.

3.1 Definitionen

Ich betrachte das folgende Entscheidungsproblem in t=0:

1. wähle zwischen einer risikofreien Anlage mit Rendite r und einer riskanten Anlage mit Rendite y_t. Die Momente von y_t sind zeitabhängig und werden mit ARMA-GARCH Modellen approximiert.
2. ein Betrag $0 \leq X \leq W_0$ des Anfangsvermögens $W_0=1$ wird riskant veranlagt und der Betrag $W_0 - X$ wird risikofrei veranlagt, sodaß der erwartete Nutzen des Endvermögens in t=T maximiert wird.
3. das Endvermögens in t=T ist gegeben durch:
$$W_T = X\exp\left(\sum_{t=1}^{T} y_t\right) + (W_0 - X)\exp(rT)$$
und wird in T konsumiert. Es werden verschiedene Planungshorizonte -unabhängig voneinander - betrachtet: T=1, 5, 10, 50, und 100.
4. die gewählte Allokation kann zwischen t=0 und t=T nicht geändert werden.
5. als Nutzenfunktionen verwende ich folgende allgemeine Funktion (siehe INGERSOLL (1987), S. 39):
$$U(W) = \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{\alpha W}{1-\gamma} + \beta\right)^{\gamma}.$$
In allen Fällen wird $\alpha=1$ gesetzt und durch Variation der Werte für β und γ erhält man die quadratische (QUAD) und drei isolelastische Nutzenfunktionen (siehe Tabelle 1). Außerdem verwende ich noch die exponentielle (EXPON) U(W)=-exp(-W) und die -ebenfalls isoelastische - logarithmische (LOG) U(W)=ln (W) Nutzenfunktion.
6. es gibt keine Transaktions-, Informationsbeschaffungs- und Entscheidungskosten.

Es handelt sich somit um ein statisches, einperiodiges Portfolio Problem. Ob die Allokationsentscheidungen zu einem Marktgleichgewicht führen, werde ich nicht betrachten. Ich ignoriere auch die Problematik der "richtigen" Bewertung der riskanten Anlage unter den gegebenen Annahmen. Das Untersuchungsdesign ist bewußt einfach gewählt, damit die Ergebnisse eindeutig auf unterschiedlichen Annahmen der Investoren zurückgeführt werden können.

Tabelle 1: Untersuchte Nutzenfunktionen

Abkürzung	β	γ	$RRA(W_0)$
ISO-05	0.0	0.5	0.5
QUAD	2.0	2.0	1.0
EXPON	0.0	0.0	1.0
LOG	0.0	0.0	1.0
ISO-2	0.0	-1.0	2.0
ISO-3	0.0	-2.0	3.0

$RRA(W_0)$ ist die relative Risikoaversion beim Anfangsvermögen.

3.2 Investoren

Die Investoren in dieser Arbeit repräsentieren unterschiedliche Annahmen über den Renditenprozeß. Sie sind wie folgt charakterisiert:

1. der "conditional" Investor kennt die Struktur des Renditenprozesses, beobachtet die relevanten Anfangsbedingungen $\psi = \{\sigma_0^2, \varepsilon_0\}$ unterstellt die korrespondierende Verteilung des Endvermögens in t=T und allokiert sein Vermögen entsprechend. Jede Anfangsbedingung ψ resultiert in einer anderen Verteilung. Im Fall A besitzt der "conditional" Investor perfekte Information über die Parameter des Prozesses.
2. der "constant" Investor unterstellt konstanten Mittelwert und Varianz der (normalverteilten) Renditen bei der Berechnung der Endvermögensverteilung. Die resultierenden Verteilungen hängen nicht von ψ ab. Im Fall A kennt der Investor die Parameterwerte genau.
3. der "window" Investor trifft dieselben Annahmen wie der "constant" Investor aber schätzt Mittelwert und Varianz aus einem "Fenster" mit aktuellen Daten aber mit einer geringeren Anzahl von Beobachtungen. Dadurch sollte der Investor einen Teil der Abhängigkeit in den Renditen erfassen können. Dieser Investor wird nur im Fall B betrachtet.

Weitere Details über die Investoren werden im nächsten Abschnitt erläutert.

3.3 Renditenprozesse und Parameter

Der stochastische Prozeß der "tatsächlichen" Renditen ist wie folgt definiert:

$$y_t = c + \theta\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{4}$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + b_1\sigma_{t-1}^2. \tag{5}$$

Drei Versionen dieses Prozesses werden betrachtet. Die gewählten Parameter (siehe Tabelle 2) beruhen

Tabelle 2: Untersuchte Renditenprozesse und Parameterwerte

Abkürzung	c	θ	a_1	b_1
GARCH	0.07/250	0.0	0.14	0.84
MA	0.07/250	0.1	0.00	0.00
MA-GARCH	0.07/250	0.1	0.14	0.84

r=1% und σ=25% (jährlich).

auf empirischen Studien von BAILLIE und DEGENNARO (1990), CHOU (1988), FRENCH et al (1987), und LEBARON (1992), die tägliche, wöchentliche bzw. monatliche Renditen des S\&P Index, des NYSE Index und des CRSP Index analysieren.

In allen Fällen wird a_0 so fixiert, daß die jährliche (unbedingte) Standardabweichung der Renditen σ=0.25 resultiert (siehe Gleichung 3):[4]

$$a_0 = (1 - a_1 - b_1)\frac{0.25^2}{250}. \tag{6}$$

Die risikofreie Verzinsung r wird gleich 0.01/250 gesetzt. Dies entspricht der langfristigen, durchschnittlichen Realverzinsung einer "relatively riskless security", die von MEHRA und PRESCOTT (1985) berichtet wird. μ=E[y_t], der unbedingte Mittelwert von y_t, beruht auch auf dieser Studie und wird gleich 0.07/250 gesetzt. Dies entspricht der langfristigen, durchschnittlichen Realverzinsung des S&P 500.

Der Prozeß MA-GARCH sollte den empirisch beobachteten Eigenschaften von Renditen am ehesten entsprechen. Die Prozesse MA und GARCH werden analysiert, um die Auswirkungen zeitabhängiger Mittelwerte und Varianzen getrennt beurteilen zu können.

Im Fall B unterscheiden sich die Investoren im Hinblick auf die Annahmen über den Renditenprozeß und in der Art wie die relevanten Parameter aus den Daten geschätzt werden. Als Daten werden 200 Beobachtungen der "tatsächlichen" Renditen verwendet, die in jedem von m=200 Simulationsläufen neu generiert werden. Der "conditional" Investor trifft die richtigen Annahmen über den Prozeß und schätzt μ, σ^2, θ, a_0, a_1, und b_1 aus 200 Beobachtungen.[5]Der "constant" und der "window" Investor nehmen normalverteilte Renditen an und schätzen μ und σ^2 aus 200 beziehungsweise 50 Beobachtungen.

3.4 Die Aktienkursverteilung zum Planungshorizont

Unter den traditionellen Annahmen konstanter Momente und normalverteilter Renditen $y_t \sim N(\mu, \sigma^2)$ ist die Summe von y_t über den Zeitraum t=1 bis t=T wieder normalverteilt:

$$\sum_{t=1}^{T} y_t \sim N\left(T\mu, T\sigma^2\right). \tag{7}$$

Wenn Renditen bedingt normalverteilt mit Mittelwert μ_t und Varianz σ^2_t sind, dann sind die kumulierten Renditen nicht normalverteilt und es existiert kein Ausdruck in geschlossener Form für deren Verteilung in diesem Fall. Dieses Problem umgehe ich, indem die Renditenverteilung zu den Planungshorizonten T wie folgt simuliert wird:

1. zunächst werden standard-normalverteilte Zufallszahlen $z_{it} \sim N(0,1)$ mit i=1,...,n/2 (n=2000), $z_{it}=-z_{it}$; j=i+n/2 und t=1,...,T erzeugt. Die antithetische Simulation von z_{it} vermeidet unbeabsichtigte Schiefe und entsprechende Verzerrungen in der Vermögensverteilung.
2. für jeden Zeitpunkt t=1,...,T und i=1,...,n werden Renditen wie folgt berechnet:

$$\sigma_{it}^2 = a_0 + a_1\varepsilon_{1,t-1}^2 + b_1\sigma_{1,t-1}^2, \tag{8}$$

$$\varepsilon_{it} = z_{it}\sigma_{it}, \tag{9}$$

$$y_{it} = c + \theta\varepsilon_{i,t-1} + \varepsilon_{it}. \tag{10}$$

Diese Renditen dienen zur Erzeugung der "tatsächlichen" Endvermögensverteilung und jener des "conditional" Investors. Im Fall A sind diesen beiden Verteilungen identisch. Für den "window" und "constant" Investor werden Renditen aus

$$y_{it} = \mu + z_{it}\sigma \tag{11}$$

berechnet, wobei μ und σ^2 gleich den unbedingten Momenten des "tatsächlichen" Prozesses (Fall A) sind oder aus einer Stichprobe[6] geschätzt werden (Fall B).

3.5 Maximierung des Erwartungsnutzens

Eine optimale Anlageentscheidung beruht auf der Maximierung des Erwartungsnutzens des Endvermögens. Das Endvermögen als Funktion von X für jede simulierte Renditenreihe ist gegeben durch[7]

$$W_{iT}(X) = X\exp\left(\sum_{t=1}^{T} y_{it}\right) + (W_0 - X)\exp(rT)$$
$$i = 1,\ldots n. \tag{12}$$

Der Erwartungsnutzen

$$E\left[U\left(W_{iT}(X)\right)\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U\left(W_{iT}(X)\right) \tag{13}$$

wird numerisch bezüglich X für jedes T, jede Nutzenfunktion und jeden Investor maximiert. X* und X^c kennzeichnen optimale Werte für "conditional" und "constant" Investor.

3.6 Anfangsbedingungen

Die optimalen Werte des "conditional" Investors hängen von den Prozeßparametern, dem Planungshorizont T und den Werten von σ^2_t und ε_t in der Periode t=0 ab. Diese Werte bilden die "Bedingung", die der Entscheidung zugrundeliegt. Für wechselnde σ^2_0 und ε_0 Werte erhält man eine andere Endvermögensverteilung. Um daher die Entscheidungssituation für zahlreiche Anfangsbedingungen zu analysieren und so allgemeingültige Aussage treffen zu können, wird das Entscheidungsproblem für m verschiedene Wertepaare σ^2_0 und ε_0 gelöst. $\psi_k = \sigma^2_{0k}, \varepsilon_k$ (k=1,...,m) bezeichnet das k-te Paar von Anfangsbedingungen.

Im Fall A werden m=200 Anfangsbedingungen ψ_k aus dem "tatsächlichen" Renditenprozeß zufällig gezogen, um eine repräsentative Verteilung zu erhalten. Auch hier wird eine antithetische Simulation verwendet, um eine schiefe Verteilung von ε_{0k} zu vermeiden. Dies ist deshalb notwendig, da die Anlageentscheidungen des "conditional" Investors bei MA und MA-GARCH Renditen stark von ε_{0k} abhängen. Jede Schiefe in deren Verteilung könnte die Analysen und Vergleiche willkürlich verzerren.

Im Fall B werden m=200 Zeitreihen mit jeweils 200 Beobachtungen aus dem "tatsächlichen" Renditenprozeß generiert, um daraus die relevanten Parameter zu schätzen. Aus der letzten Beobachtung jeder Zeitreihe evaluiert der "conditional" Investor ε_{0k} und σ^2_{0k} mit Hilfe der geschätzten Parameter.

3.7 Beurteilung der Anlageentscheidung

Ein wesentliches Ziel dieser Studie ist, den Effekt verschiedener (korrekter und falscher) Annahmen über den Renditenprozeß zu isolieren. Da die Anlageentscheidung auf einer Nutzenmaximierung beruht, wird als Grundlage für die Beurteilung der Erwartungsnutzen der ex-post erzielten Endvermögensverteilung herangezogen.

Das ex-post Endvermögen eines Investors ist durch die optimale ex-ante Entscheidung (X^* und X^c) und der Vermögensverteilung der "tatsächlichen" Renditen bestimmt. Im Fall A stimmen die ex-ante und ex-post Vermögensverteilung (und der entsprechende Nutzen) des "conditional" Investors überein. In allen anderen Fällen gibt es Unterschiede, die auf falschen Annahmen und/oder Schätzfehlern beruhen.

Um den Ergebnissen eine ökonomische Perspektive zu verleihen wird der ex-post Nutzen - ähnlich wie bei WEST et al (1993) - in Geldeinheiten ausgedrückt. Für eine Erläuterung der Vorgangsweise betrachte ich zuerst den Fall A. Der ex-post erzielte Nutzen des "conditional" Investors muß annahmegemäß größer sein als der ex-post Nutzen des "constant" Investors. Umgekehrt betrachtet, hätte der "constant" Investor zusätzliches Anfangsvermögen gebraucht, um dasselbe ex-post Nutzenniveau zu erreichen. Dieser zusätzliche Betrag zur Kompensation der Nutzeneinbuße kann als Gebühr interpretiert werden, die der "constant" Investor zu zahlen bereit ist, um eine optimale Entscheidung zu erhalten.

Um die Details der Ergebnisse des nächsten Abschnitts zu erläutern, sei der "conditional" Investor betrachtet, der $X^*_k(\psi_k)$ für eine bestimmte Anfangsbedingung ψ_k wählt. Das tatsächlich erzielte (ex-post) Vermögen $W_{iT}(X^*_k)$ hängt von den tatsächlich realisierten Renditen y_{it} ab. Die Verteilung des Endvermögens[8] zeigt die potentiellen Konsequenzen von Entscheidungen für einen bestimmten - den k-ten - Anfangszustand. Diese Verteilung kann dazu verwendet werden, den auf ψ_k bedingten, erwarteten ex-post Nutzen zu bestimmen:

$$U_{kT}\left(X^*_k\right) = U_{kT} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U\left(W_{iT}\left(X^*_k\right)\right). \qquad (14)$$

Angenommen, der "conditional" Investor erzielt den Nutzen U_{kT} unter der Bedingung ψ_k. Für eine gegebene Entscheidung X^c des "constant" Investors kann man nun den Wert D_{kT} bestimmen, sodaß die Verteilung des Endvermögens

$$W'_{iT}\left(X^c\right) = X^c \exp\left(\sum_{t=1}^{T} y_{it}\right) + \left(W_0 + D_{kT} - X^c\right)\exp(rT)$$
$$i=1,\ldots,n. \qquad (15)$$

denselben Erwartungsnutzen ergibt, wie jener des "conditional" Investors:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U\left(W'_{iT}\left(X^c\right)\right) = U_{kT}. \qquad (16)$$

Tatsächlich werden Entscheidungen unter wechselnden Anfangsbedingungen getroffen. Um daher allgemeine Schlüsse ziehen zu können benötigt man Durchschnitte über Bedingungen ψ_k und Konsequenzen U_{kT} bzw. D_{kT}. Der unbedingte ex-post Erwartungsnutzen des Endvermögens ist durch

$$\overline{U}_T = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} U_{kT} \tag{17}$$

gegeben.[9] Der unbedingte Wert für D_{kT} ergibt sich aus:

$$\overline{D}_T = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} D_{kT}. \tag{18}$$

$\overline{D}_T$ mißt den Unterschied im ex-post Nutzen in Geldeinheiten. Schlußfolgerungen auf Basis von $\overline{D}_T$ sind daher mit jenen auf Basis von Nutzenvergleichen äquivalent. Zur besseren Interpretierbarkeit wird $\overline{D}_T$ in Prozent p.a. ausgedrückt:

$$\overline{D}_T^{pa} = 100 \cdot 250 \overline{D}_T / T. \tag{19}$$

Für isoelastischen Nutzenfunktionen kann $\overline{D}_T^{pa}$ als jener Prozentsatz des Anfangsvermögens interpretiert werden, der zur Kompensation suboptimaler Entscheidungen erforderlich ist. Für quadratische und exponentielle Nutzenfunktionen stimmt diese Interpretation aufgrund von Vermögenseffekten nur approximativ. Außerdem entspricht ein Verlust des "constant" Investors einem Vorteil (Gewinn) des "conditional" Investors. Daher ist $\overline{D}_T^{pa}$ jener Prozentsatz des Anfangsvermögens, den ein "conditional" Investor in t=0 konsumieren könnte, aber trotzdem den ex-post Nutzen des "constant" Investors erzielen könnte. Auch diese Interpretation gilt streng genommen nur für isoelastische Nutzenfunktionen. Ich werde den Begriff "Kompensation" verwenden, um sowohl Gewinne als auch Verluste zu bezeichnen.

Im Fall B muß der "conditional" Investor nicht immer den größte ex-post Nutzen erzielen. Daher wird D_{kT} auf Basis jenes U_{kT} berechnet, das dem Investor mit dem größten Nutzen entspricht. Im Fall B mißt D_{kT} den Effekt suboptimaler Entscheidungen aufgrund falscher Annahmen und aufgrund von Schätzfehlern. Um beurteilen zu können, ob die Kompensation $\overline{D}_T$ signifikant von Null verschieden ist, bzw. ob sich Kompensationen bei verschiedener Renditenprozesse signifikant unterscheiden, verwende ich die t-Statistik des konstanten Terms der Regression von D_{kT} auf Anfangsbedingungen ψ_k.

4. Ergebnisse für den Fall A - "perfekte Information"

Eine wesentliche Schlußfolgerung dieser Studie kann aus Tabelle 3 gezogen werden, wenn die Spalten GARCH und MA für kurze Planungshorizonte verglichen werden. Die Spalte MA in Tabelle 3 zeigt, daß Investoren, die die Zeitabhängigkeit von erwarteten Renditen nicht berücksichtigen, mehr als 10% des Anfangsvermögens aufwenden müßten, um den Nutzenentgang auszugleichen. Die Kompensation sinkt auf etwa 1% wenn der Planungshorizont fünf Tage beträgt. Das ist wesentlich mehr als für den Fall, daß nur zeitabhängige Volatilität vorliegt (siehe Spalte GARCH).

Daraus folgt, daß Anlageentscheidungen, die die GARCH Eigenschaft von Renditen richtig berücksichtigen, nur geringe Vorteile bringen. Korrekte Annahmen über zeitabhängige erwartete Renditen können jedoch beträchtliche Vorteile bringen. Dieses Ergebnis trifft für alle Nutzenfunktionen zu, wenn auch in unterschiedlichem Ausmaß. Die Vorteile einer Verwertung von "return predictability" verschwinden mit zunehmendem Planungshorizont T.

Beinahe alle Werte in Tabelle 3 sind hoch signifikant. Ausnahmen sind vor allem für GARCH Renditen und bei quadratischer, exponentieller und logarithmischer Nutzenfunktion festzustellen. Trotz dieser statistischen Signifikanz sollten die Ergebnisse vor allem hinsichtlich ihrer ökonomischen Signifikanz beurteilt werden, indem die Kompensation mit Transaktions- und Informationskosten verglichen wird. In diesem Fall scheinen nur die Ergebnisse für MA und MA-GARCH Renditen und kurze Planungshorizonte signifikant. Wenn Pro-

Tabelle 3: Durchschnittlicher Betrag (in Prozent p.a. des Anfangsvermögens) der zur Kompensation suboptimaler Entscheidungen nötig ist ($\overline{D}_T^{pa}$ aus Gleichung 19).

T	Nutzenfunktion	GARCH	MA	MA-GARCH
1	ISO-05	0.00000	12.31876	12.15246
	QUAD	0.00266[a]	13.00269	12.85921
	EXPON	0.00259[a]	13.00217	12.85857
	LOG	0.00257[a]	13.00201	12.85839
	ISO-2	0.24371	14.04565	13.91456
	ISO-3	0.17771	13.65252	13.54247
5	ISO-05	0.00000	0.69877	0.63463
	QUAD	0.00241[a]	1.11047	1.08614
	EXPON	0.00205[a]	1.10823	1.08280
	LOG	0.00199[a]	1.10759	1.08196
	ISO-2	0.22637	1.72950	1.77279
	ISO-3	0.16196	1.36127	1.39650
10	ISO-05	0.00000	0.03290[a]	0.02622[a]
	QUAD	0.00288[a]	0.18111	0.21114
	EXPON	0.00193[a]	0.17853	0.20587
	LOG	0.00183[a]	0.17785	0.20468
	ISO-2	0.20503	0.54364	0.64956
	ISO-3	0.14240	0.37755	0.46156
50	ISO-05	0.00000	0.00000	0.00000
	QUAD	0.00166[b]	0.00476	0.03207
	EXPON	0.00000	0.00000	0.00498[a]
	LOG	0.00000	0.00000	0.00438[b]
	ISO-2	0.11237	0.04779	0.12821
	ISO-3	0.07533	0.03183	0.08497
100	ISO-05	0.00000	0.00000	0.00000
	QUAD	0.00026[b]	0.00000	0.02597
	EXPON	0.00000	0.00000	0.00069[b]
	LOG	0.00000	0.00000	0.00057[b]
	ISO-2	0.05571	0.01434	0.07479
	ISO-3	0.03786	0.00955	0.04742

[a] ... p-Wert zwischen 0.1 und 0.05.
[b] ... p-Wert größer als 0.05.
Für alle anderen Beträge ungleich Null sind die p-Werte kleiner als 0.01.

gnosen der Volatilität keinen Effekt auf Anlageentscheidungen haben, sollten die Ergebnisse für MA und MA-GARCH Renditen ähnlich sein. Tabelle 3 zeigt, daß dies für $T \leq 10$ tatsächlich der Fall ist. GARCH Effekte werden mit zunehmendem Planungshorizont zwar wichtiger, die Unterschiede zwischen MA und MA-GARCH sind jedoch - absolut gesehen - sehr gering.[10]

4.1 Anfangsbedingungen

Tabelle 3 zeigt, daß für T=1 die Kompensation für alle Nutzenfunktionen bei MA-GARCH Renditen kleiner als für MA Renditen ist. Eine Erklärung dieses Ergebnisses erfordert eine Betrachtung der Auswirkung von Anfangsbedingungen, die in Tabelle 4 für ISO-2 Nutzen illustriert ist. Große Werte für $|\varepsilon_0|$ sind typischerweise mit einer bedingten Varianz assoziiert, die größer als die unbedingte Varianz ist (siehe Gleichung 5). Daher ist die Varianz (der Nutzen) des Endvermögens bei MA-GARCH größer (kleiner) als die Varianz (der Nutzen) bei MA Renditen, wenn $|\varepsilon_0|$ groß ist. Da der "constant" Investor denselben Betrag bei beiden Renditenprozessen anlegt, ist die Kompensation für MA-GARCH Renditen kleiner als für MA Renditen.

Tabelle 4 zeigt auch den umgekehrten Effekt, wenn $|\varepsilon_0|$ annähernd gleich Null ist. In diesem Fall liegt die bedingte Varianz tendenziell unter der unbedingten Varianz und für MA Renditen resultiert daher eine größere Varianz und geringerer ex-post Nutzen des Endvermögens als für MA-GARCH Renditen.

Außerdem zeigt Tabelle 4 eine Asymmetrie, die für beide Prozesse zutrifft. Die Kompensation für positive ε_0 ist geringer als für negative ε_0. Dieser Effekt hängt vom Unterschied zwischen X^*_k und X^c ab. Der "constant" Investor allokiert $X^c=1$ für alle Planungshorizonte und Nutzenfunktionen, außer für ISO-2 ($X^c=0.73$) und ISO-3 ($X^c=0.49$). Der "conditional" Investor veranlagt mehr (weniger) als die Hälfte des Anfangsvermögens riskant, wenn ε_0 positiv (negativ) ist. Daher sind X^*_k und X^c ähnlicher, wenn $\varepsilon_0>0$ und die Nutzenniveaus der beiden Investoren sind nicht so unterschiedlich, als wenn $\varepsilon_0<0$. Diese Asymmetrie hängt daher von der Nutzenfunktion ab und ist besonders stark bei geringer Risikoaversion (z.B. ISO-05). Für ISO-3 Funktionen erhält man beinahe symmetrische Egebnisse.

Tabelle 4: Auswirkung der Anfangsbedingungen auf Anlageentscheidungen bei MA und MA-GARCH Renditen für ISO-2 und T=1

Dezil	$\bar{\varepsilon}_0$	MA	MA-GARCH
1	-0.028	47.395	47.241
2	0.017	27.002	26.855
3	-0.010	15.585	15.457
4	-0.006	8.256	7.360
5	-0.002	1.546	1.879
6	0.002	1.098	1.290
7	0.006	3.853	4.123
8	0.010	6.565	6.871
9	0.017	10.794	10.512
10	0.028	18.361	17.557
	Durchschnitt	14.046	13.915

Die Werte in der Tabelle geben den Betrag (in Prozent p.a. des Anfangsvermögens) an, der zur Kompensation suboptimaler Entscheidungen nötig ist (aus Gleichung 19). Jede Zeile gibt die durchschnittliche Kompensation des entsprechenden Dezils der relevanten Anfangsbedingungen ε_{0k} an. ε_0 ist der Durchschnitt von ε_{0k} in jedem Dezil.

4.2 Nutzenfunktionen

Die Ergebnisse in Tabelle 3 können für einen Vergleich der Effekte in Abhängigkeit von der Nutzenfunktion verwendet werden. Die Ergebnisse für QUAD, EXPON und LOG sind sehr ähnlich. Für wachsendes T werden die Unterschiede geringfügig stärker. Diese Ähnlichkeit der Ergebnisse beruht hauptsächlich auf dem Umstand, daß für diese Funktionen die relative Risikoaversion beim Anfangsvermögen gleich Eins ist ($RRA(W_0)=1$). Allerdings sind die Verluste des "constant" Investors mit quadratischer Nutzenfunktion immer größer als Verluste von "constant" Investoren mit exponentieller oder logarithmischer Nutzenfunktion und derselben RRA.

Die Kompensation für isoelastische Nutzenfunktionen mit geringer Risikoaversion (ISO-05) ist immer gleich Null, außer für MA und MA-GARCH Renditen und kleines T. Dies ist darauf zurückzuführen, daß der "constant" Investor das gesamte Anfangsvermögen riskant veranlagt und der "conditional" Investor weniger als W_0 nur unter extrem ungünstigen Anfangsbedingungen (stark negatives ε_0 und/ oder großes σ^2_0) veranlagt. Wenn man die Ergebnisse für die isolelastischen Funktionen ISO-2 und ISO-3 vergleicht, erkennt man, daß größere Risikoaversion (ISO-3) weniger Kompensation für suboptimale Entscheidungen erfordert als geringere Risikoaversion (ISO-2). Dies trifft für alle T und Renditenprozesse zu. Für diesen Vergleich sind nicht nur die Unterschiede zwischen X^*_k und X^c relevant, sondern vor allem der Umstand, daß größere Risikoaversion zu geringeren riskant veranlagten Beträgen führt. Bei einer ISO-2 Funktion legen beide Investoren ca.50-70% riskant an, gegenüber 40-50% bei ISO-3. Daher sind die nachteiligen Effekte suboptimaler Entscheidungen weniger stark ausgeprägt und die erforderliche Kompensation ist geringer, wenn die Risikoaversion größer ist.

5. Ergebnisse für den Fall B - "geschätzte Parameter"

Die bisherigen Ergebnisse deuten darauf hin, daß beträchtliche Auswirkungen auf Anlageentscheidungen vorliegen, wenn die Variation in erwarteten Renditen berücksichtigt wird. Nun wird untersucht, wie stark die Unterschiede im ex-post Nutzen durch Schätzfehler beeinflußt werden. Die Analyse beruht auf der Annahme, daß "tatsächliche" Renditen durch GARCH, MA und MA-GARCH Prozesse erzeugt werden. Wegen der Ähnlichkeit der Ergebnisse für QUAD, EXPON und LOG im Fall A werden nun nur isolelastische Nutzenfunktionen und außerdem nur die Planungshorizonte T=1, 10 und 100 betrachtet.

Tabelle 5 bestätigt die wichtigsten Ergebnisse aus Fall A.[11] Wenn GARCH Renditen vorliegen ist kein Vorteil des "conditional" Investors im Vergleich zum "constant" Investor festzustellen. Dies gilt für alle Nutzenfunktionen und alle T. Im Gegenteil, die Schätzfehler überkompensieren die Vorteile korrekter Annahmen in fast allen Fällen. Der "window" Investor schneidet deutlich schlechter ab als die beiden anderen Investoren. Dies ist hauptsächlich auf schlechte Schätzwerte für μ zurückzuführen, die nicht dadurch überkompensiert werden, daß die Zeitabhängigkeit der Varianz durch die Verwendung eines aktuellen Datenfensters geringfügig erfaßt wird.

Wenn MA und MA-GARCH Renditen vorliegen, schneidet der "conditional" Investor vor allem für T=1 deutlich besser ab. Etwa 3% des Anfangsvermögens werden allerdings benötigt, um Schätzfehler zu kompensieren. Die Kompensation für "window" und "constant" Investoren zum Ausgleich von Schätzfehlern und falschen Annahmen beträgt etwa 8.0-11% des Anfangsvermögens. Wenn der Planungshorizont zunimmt, werden die Vorteile des "conditional" Investor allerdings rasch kleiner und hängen stärker von der Risikoaversion ab. Etwa 0.5-1.0% des Anfangsvermögens sind erforderlich, um bei großen Planungshorizonten Schätzfehler auszugleichen. Der "window" Investor erfaßt einen Teil der Abhängigkeit in den Renditen und kann damit kurzfristig (T=1) Vorteile gegenüber dem "constant" Investor erzielen. Wenn T zunimmt sind die Verluste des "window" Investors allerdings am größten. Hier wirkt sich der Umstand aus, daß es jedenfalls suboptimal ist, Parameter aus einer geringeren Anzahl von Beobachtungen zu schätzen.

Wenn man die Ergebnisse für MA und MA-GARCH Renditen des "constant" Investors in den Tabellen 4 und 5 für T=1 vergleicht, zeigt sich, daß die Kompensation im Fall A größer ist. Dies kann wie folgt erklärt werden. Im Fall A schneidet der "conditional" Investor immer besser ab, da die Entscheidungen auf keinen Fehlern beruhen. Wenn Parameter allerdings geschätzt werden, gibt es einige Anfangsbedingungen - die im Fall B aus der gesamten zur Schätzung verfügbaren Zeitreihe bestehen - für die der "conditional" Investor weniger ex-post Nutzen erzielt als der "constant" Investor. In diesen Fällen überwiegen die Schätzfehler die korrekten Annahmen über den Renditenprozeß. Im Durchschnitt dominieren allerdings die richtigen Annahmen. Dies trifft allerdings nur für MA und MA-GARCH Renditen und besonders für T=1 zu, wo die Kenntnis und richtige Berücksichtigung der Anfangsbedingungen Nutzenvorteile bringt.

Tabelle 5: Durchschnittlicher Betrag (in Prozent p.a. des Anfangsvermögens), der zur Kompensation suboptimaler Entscheidungen nötig ist (aus Gleichung 19)

		GARCH			MA			MA-GARCH		
T	Nutzen	cond.	wind.	const.	cond.	wind.	const.	cond.	wind.	const.
1	ISO-05	1.169	2.170	1.155	3.168	10.549	11.712	3.759	8.531	11.155
	LOG	0.946	1.675	0.928	3.148	10.257	11.614	3.750	8.424	10.943
	ISO-2	0.739	1.109	0.720	3.045	10.130	11.759	3.637	8.348	10.890
	ISO-3	0.900	1.207	0.834	3.028	10.299	11.688	3.745	8.438	11.083
10	ISO-05	1.150	2.151	1.142	1.019	2.183	1.268	1.616	2.477	1.880
	LOG	0.939	1.675	0.928	0.959	1.711	1.160	1.307	1.893	1.525
	ISO-2	0.704	1.084	0.692	0.640	1.108	0.908	1.046	1.377	1.309
	ISO-3	0.785	1.100	0.738	0.507	1.250	0.842	1.241	1.610	1.566
100	ISO-05	1.136	2.184	1.150	1.121	2.273	1.167	1.617	2.823	1.886
	LOG	0.934	1.693	0.935	0.972	1.719	0.978	1.300	2.116	1.453
	ISO-2	0.546	0.940	0.540	0.426	0.831	0.453	0.658	1.098	0.773
	ISO-3	0.384	0.804	0.436	0.177	0.799	0.306	0.722	1.351	1.043

cond ... "conditional" Investor; wind ... "window Investor; const ... "constant" Investor

Was die Nutzenfunktionen betrifft, muß das Ergebnis für ISO-05 kommentiert werden: Im Fall A ist die Kompensation für Investoren mit geringer Risikoaversion (ISO-05) immer am geringsten. Im Fall B ist die Kompensation für diese Investoren in fast allen Fällen am größten. Dies liegt daran, daß ISO-05 Investoren typischerweise alles oder nichts (je nach Anfangsbedingung) riskant veranlagen. Falls vollkommene Information vorliegt, ist mit diesem Verhalten kein Nachteil verbunden. Im Fall B sind sie allerdings durch dieses Verhalten Schätzfehlern wesentlich stärker ausgesetzt, als Investoren mit größerer Risikoaversion. Im allgemeinen sinkt die Kompensation, wenn die Risikoaversion zunimmt, da ein größerer Betrag riskant veranlagt wird. Eine Ausnahme ist der Fall MA-GARCH und T=1 bei dem die Kompensation mit der Risikoaversion steigt. Da die Schätzung der Varianz mit zunehmender Risikoaversion wichtiger wird, haben Schätzfehler (und/oder falsche Annahmen) eine stärkere Wirkung auf den ex-post Nutzen.

Es kann somit zusammengefaßt werden, daß die wichtigsten Ergebnisse aus Fall A (perfekte Information) auch dann aufrecht bleiben, wenn Parameter aus den Daten geschätzt werden:

1. für GARCH Renditen bestehen zwischen "conditional" und "constant" Investor keine nennenswerten Unterschiede im ex-post Nutzen.
2. Für MA oder MA-GARCH Renditen und kurze Planungshorizonte erzielt der "conditional" Investor wesentlich bessere Ergebnisse als "window" oder "constant" Investoren. Dieser Vorteil sinkt allerdings schnell mit zunehmendem Planungshorizont.

6. Zusammenfassung

Die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit können wie folgt zusammengefaßt werden:

1. die korrekte Berücksichtigung von GARCH Effekten hat beinahe keine Auswirkung auf den ex-post Nutzen.
2. korrekte Annahmen über Abhängigkeiten in erwarteten Renditen bringen jedoch deutliche Vorteile bei kurzen Planungshorizonten.

Dies gilt sowohl für bekannte als auch geschätzte Parameter.[12]

Diese Ergebnisse zeigen die Notwendigkeit, weitere empirische Evidenz für "return predictability" zu sammeln bzw. kritisch zu hinterfragen. Falls sich "return predictability" als unbestrittene Tatsache etabliert, kann aus der vorliegenden Arbeit der Schluß abgeleitet werden, daß ökonomisch signifikante Vorteile aus einer "bedingten" Asset Allocation gezogen werden können, selbst dann, wenn die Abhängigkeit in den Renditen eher schwach ist. Wenn Renditen außerdem bedingte Heteroskedastizität aufweisen - was unbestritten scheint - sind keine zusätzlichen Vorteile zu erwarten, wenn auch diese Eigenschaft bei der Anlageentscheidung berücksichtigt wird.

Wenn sich die "return predictability" als Artefakt ohne verläßliche empirische Unterstützung erweist und Aktienrenditen nur bedingt heteroskedastisch sind, dann bleiben traditionelle Modelle auf Basis normalverteilter Renditen mit konstanter Varianz ein vernünftiger Ansatz. Ich möchte abschließend auf die Aussagen von ENGLE (1993) eingehen, wonach "volatility predictions may affect portfolio decisions" und "Volatility may consequently be priced ...". Man kann aus der vorliegenden Studie zwar ableiten, daß Prognosen der Volatilität einen Einfluß auf Portfolioentscheidungen haben. Ob die ermittelten Unterschiede im ex-post erzielten Nutzen groß genug sind, um den zusätzlichen Aufwand der mit der Aufstellung und dem Einsatz von GARCH Modellen verbunden ist zu rechtfertigen, kann man schwer allgemein beantworten. Jedenfalls lassen die vorliegenden Ergebnisse Zweifel daran aufkommen, daß der Markt für prognostizierbare Volatilität einen Preis zahlt.

Fussnoten

[1] Die Verwendung anderer ARMA Modelle ändert die Ergebnisse und Schlußfolgerungen nicht nennenswert.

[2] Einen aktuellen Überblick zu diesem Themenkreis gibt TUCKER (1992).

[3] Der Begriff "conditional" leitet sich aus der "Bedingtheit" der ersten beiden Momente der Renditen ab, die der Investor berücksichtigt.

[4] Der Unterschied in der unbedingten Varianz von y_t und ε_t für $\theta \neq 0$ wird in den Simulationen berücksichtigt.

[5] σ^2 und a_0 werden aus den Residuen ε_t geschätzt. Für den Fall, daß $a_1+b_1 \geq 1$ geschätzt wird, werden die Werte von a_0, a_1, und b_1 entsprechend korrigiert, sodaß $a_1+b_1=0.999$.

[6] Dabei werden jedoch nicht jene Zufallsstichproben verwendet, die zur Bildung der Endvermögensverteilung dienen.

[7] Entsprechende Definitionen gelten für "window" und "constant" Investor.

[8] Die Verteilung des Endvermögens erhält man aus $W_{iT}(X_k^*)$ für variierende i aber konstantes k.

[9] Bei der Berechnung von $\bar{U}_T$ ist keine Gewichtung erforderlich, da die Verteilung von ψ_k den stochastischen Eigenschaften des Renditenprozesses entspricht.

[10] Die Unterschiede in der Kompensation zwischen MA und MA-GARCH Renditen sind statistisch signifikant beim 5% Niveau für ISO-2 und ISO-3 Nutzenfunktionen wenn $T \geq 10$.

[11] Alle Werte in Tabelle 5 sind statistisch signifikant bei weniger als 1%.

[12] Diese Sensibilität der Entscheidung auf Variationen im Mittelwert stimmt mit der Arbeit von CHOPRA und ZIEMBA (1993) überein, die zeigen, daß Fehler im Mittelwert mehr als zehnmal so stark wirken, wie Fehler bei der Varianzschätzung.

Literatur

BAILLIE, R.T. and R.P.DEGENNARO (1990): "Stock returns and volatility", Journal of Financial and Quantitative Analysis 25, Nr. 2, pp. 203-214.

BOLLERSLEV, T. (1987): "A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return", Review of Economics and Statistics 69, Nr. 3, pp. 542-547.

BOLLERSLEV, T., R.Y. CHOU and K.F. KRONER (1992): "ARCH modeling in finance", Journal of Econometrics 52, pp. 5-59.

CHOPRA, V.K. and W.T. ZIEMBA (1993): "2The effect of erros in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice", Journal of Portfolio Management 19, pp. 6-11.

CHOU, R.Y. (1988): "Volatility persistence and stock valuations: some empirical evidence using GARCH", Journal of Applied Econometrics 3, pp. 279-294.

ENGLE, R.F. and T. BOLLERSLEV (1986): "Modelling the persistence of conditional variances", Econometric Reviews 5, Nr. 1, pp. 1-50.

ENGLE, R.F (1993): "Statistical models for financial volatility", Financial Analysts Journal 49, January-February, pp. 72-78.

FAMA, E.F. (1991): "Efficient capital markets: II", Journal of Finance 46, pp. 1575-1617.

FRENCH, K.R., G.W. SCHWERT. and R.F. STAMBAUGH (1987): "Expected stock returns and volatility", Journal of Financial Economics 19, pp. 3-29.

INGERSOLL, J.E. (1987): "Theory of Financial Decision Making", Rowman & Littlefield.

LEBARON, B. (1992): "Some relations between volatility and serial correlation in stock market returns", Journal of Business 65, Nr. 2, pp. 199-219.

MEHRA, R. and E.C. PRESCOTT (1985): "The equity premium: A puzzle", Journal of Monetary Economics 15, pp. 145-161.

TUCKER, A.L. (1992): "A reexamination of finite- and infinite-variance distributions as models of daily stock returns", Journal of Business and Economic Statistics 10, Nr.1, pp. 73-81.

WEST, K.D., H.J. EDISON and D. CHO (1993): "A utility-based comparison of some models of exchange rate volatility", Journal of International Economics 35, pp. 23-45.