

# Bewertung, Preischarakteristika und Risikomanagement von zinsderivativen Wertpapieren im Rahmen eines Einfaktormodelles

## 1. Einleitung

Die schweizerische Zinslandschaft war in den letzten Jahren am kurzen sowie am langen Ende der Fristenstruktur durch ausgeprägte Schwankungen der Zinssätze geprägt. Die Einführung des Swiss Interbank Clearing (SIC) und der neuen Liquiditätsvorschriften zu Beginn des Jahres 1988 hat eine geringere Geldnachfrage der Banken nach sich gezogen und dies wiederum hat in Verbindung mit einer grosszügigen Geldversorgung der Wirtschaft durch die Schweizerische Nationalbank nach dem Börsencrash zu sehr tiefen Zinsen im Jahre 1988 geführt. Die Ausweitung der Geldmenge, tiefe Zinsen und das dadurch induzierte Wirtschaftswachstum führte in den darauffolgenden Jahren zu einer hohen Inflation welche mittels einer Verknappung der Geldmenge und den daraus resultierenden hohen Zinsen durch die Nationalbank bekämpft wurde. Der Erfolg dieser restriktiven Geldpolitik stellte sich Ende 1992 ein und die während den Jahren

1989-1992 um ein Niveau von ca. 8-9% schwankenden kurzfristigen Zinssätze fielen wieder auf ein Niveau von 4-5%.

Der im Frühjahr beobachtete Anstieg der kurzfristigen sowie insbesondere derjenige der langfristigen Zinssätze zeigt, dass auch heute keineswegs von einer Stabilisierung der Zinssätze auf tiefem Niveau gesprochen werden kann. Mit der zunehmenden Zinsvolatilität ist auch der Absicherungsbedarf von Banken und Institutionellen Anlegern gegenüber Zinsrisiken gestiegen. Banken sind insbesondere im Rahmen des Asset- und Liability-Managements und Institutionelle Investoren, wie z.B. Pensionskassen, hauptsächlich in bezug auf das Management der von ihnen gehaltenen Wertpapierportfolios von Zinsrisiken betroffen. Parallel zu dieser Entwicklung hat der Markt für zinsderivative Produkte in den letzten Jahren einen regelrechten Boom erlebt. Konzentrierte sich vor ein paar Jahren die Kreation von derivativen Anlagen noch hauptsächlich auf Produkte im Aktienbereich, so kann in letzter Zeit eine Verlagerung auf derivative Anlagen im Zinsbereich beobachtet werden. Als Beispiel kann die grosse Anzahl von Neuemissionen von Optionen auf Bundesanleihen in den letzten Monaten angeführt werden. Auch die SOFFEX ist mit der Einführung des CONF-Futures und den Optionen auf denselben diesem Trend gefolgt[1].

Die Bewertungsgrundsätze von Aktienoptionen und die BLACK/SCHOLES-Formel sind in der Praxis weitgehend bekannt. Insbesondere die Kenntnis des

---

\* Ich danke Wolfgang Bühler für zahlreiche lehrreichen Diskussionen und Rudy Zagst für die äusserst präzisen und ausführlichen Kommentare zur ersten Fassung dieses Artikels. Sämtliche verbleibenden Fehler liegen in der Verantwortung des Autors. Der vorliegende Aufsatz wurde im Rahmen des damit verbundenen Dissertationsprojektes durch den Schweizerischen Nationalfonds finanziell unterstützt. Alfred Bühler, Schweiz. Institut für Banken und Finanzen, Merkurstr. 1, 9000 St.Gallen, Tel.: 041/20 30 66, Fax: 071/23 65 63

Einflusses der einzelnen Komponenten der BLACK/SCHOLES-Formel wie Volatilität, Ausübungspreis u.s.w. auf den Optionspreis ist Voraussetzung für den erfolgreichen Einsatz von Optionen beim Risikomanagement von Aktienportfolios. Diese aus der Analyse von Aktienoptionen bekannten Eigenschaften werden in der Praxis oft direkt auf Zinsderivate übertragen. Bondoptionen weisen jedoch im Vergleich zu Aktienoptionen grundsätzlich verschiedene Merkmale auf. Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit einer vorzeitigen Ausübung amerikanischer Call- und Putoptionen teilweise sehr hoch, europäische Optionen können negative Zeitwerte aufweisen und der Preis einer Call-(Put)option kann bei steigendem Bondpreis fallen (steigen). Insbesondere die ersten zwei Eigenschaften sind für Bondoptionen typisch und treten nicht nur in speziellen Situationen auf. Die dritte Eigenschaft ist für das Risikomanagement von entscheidender Bedeutung, da die Sensitivität des Optionspreises bezüglich dem jeweiligen Bondpreis nicht eindeutig ist. Diese speziellen Charakteristika von Zinsderivaten können nur anhand eines Modelles illustriert werden, welches direkt auf der stochastischen Entwicklung der Zinssätze aufbaut. Im vorliegenden Artikel wird ein solches Modell ausführlich erläutert und die typischen Eigenschaften von Zinsderivaten sowie deren Implikationen für das Risikomanagement werden diskutiert.

Die in der Literatur und auch in der Praxis eingesetzten Modelle zur Bewertung von zinsderivativen Anlagen können hauptsächlich in zwei Gruppen unterteilt werden. Beim ersten Modelltyp wird eine bestimmte Entwicklung der Zinssätze im Zeitablauf unterstellt und die Preise von Zinsderivaten werden aufgrund von Arbitrageüberlegungen bezüglich dieser Zinssätze bestimmt. Es kann sich dabei um Einfaktormodelle wie das VASICEK (1977)-Modell respektive das COX/INGERSOLL/ROSS (1985) - Modell oder um Mehrfaktormodelle wie das Zweifaktormodell von BRENNAN/SCHWARZ (1979) handeln. Ferner wird im Rahmen dieses Modelltypes zwischen Gleichgewichtsmodellen wie dem COX/INGERSOLL/ROSS-Modell und reinen Arbitragemodellen wie dem

VASICEK- und BRENNEN/SCHWARZ-Modell unterschieden. Im Gegensatz zu den reinen Arbitragemodellen folgt bei den Gleichgewichtsmodellen die zeitliche Entwicklung der Zinssätze direkt aus dem nutzenoptimalen Verhalten eines repräsentativen Investors bei geräumten Gütermärkten. Ein bedeutender Nachteil dieser von einer gegebenen Entwicklung der Zinssätze ausgehenden Modelle ist derjenige, dass die Fristenstruktur der Zinssätze direkt aus derselben folgt und deshalb in den meisten Fällen nicht mit der am Markt beobachteten Fristenstruktur übereinstimmt. HULL/WHITE (1990) schlagen deshalb vor, die die zeitliche Entwicklung der Zinssätze bestimmenden Parameter als im Zeitablauf variabel anzunehmen. Damit gelingt die Anpassung der Modelle an eine vorgegebene Fristenstruktur der Zinssätze. Der vorliegende Artikel beschäftigt sich mit einer anhand dieses Ansatzes erweiterten Version des VASICEK-Modelles. Der zweite Modelltyp umgeht das soeben beschriebene Problem der Anpassung der Modelle an eine vorgegebene Fristenstruktur indem Zinsderivate direkt bezüglich dieser Fristenstruktur aufgrund von Arbitrageüberlegungen bewertet werden. Das HO/LEE (1986)-Modell und dessen Verallgemeinerung von HEATH/JARROW/MORTON (1992) sind wohl die bekanntesten Vertreter dieses Modelltypes. HULL/WHITE (1993) zeigen jedoch, dass auch diese Modelle implizit eine bestimmte Entwicklung der Zinssätze im Zeitablauf unterstellen. Das HO/LEE-Modell ist dabei ein Spezialfall des in diesem Artikel vorgestellten Modelles.

Der Artikel ist in zwei Teile aufgeteilt. Der erste Teil (Kapitel 2-4) befasst sich mit der theoretischen Herleitung eines Modelles zur Bewertung von Zinsderivaten und den bei einer praktischen Implementation auftretenden Problemen. In Kapitel 2 werden die grundsätzlichen Unterschiede zwischen der Bewertung von Bondoptionen und Aktienoptionen besprochen und das Einfaktormodell von VASICEK (1977) wird eingeführt. In Kapitel 3 werden die bei diesem Modelltyp auftretenden Probleme anhand des von HULL/WHITE (1993) vorgeschlagenen Verallgemeinerung gelöst und Kapitel 4 beschäftigt sich mit den bei einer praktischen Implementation

auf tretenden Problemen. Der erste Teil ist eher technisch gehalten und richtet sich an den mit stochastischen Prozessen und der Herleitung der BLACK/SCHOLES-Formel vertrauten Leser. Im zweiten Teil (Kapitel 5) werden die Eigenschaften der anhand dieses Modelles berechneten Preise von Zinsderivaten erläutert und die Sensitivität dieser Preise bezüglich den Modellparametern wird analysiert. Dieser Teil kann auch ohne Kenntnis der analytischen Herleitungen im ersten Teil verstanden werden. Die wichtigsten Einflussfaktoren bei der Preisbildung von Bondoptionen und kündbaren Bonds werden anhand von Beispielen diskutiert. Es stellt sich heraus, dass vor allem die erwartete Entwicklung des Bondpreises eine entscheidende Rolle bei der Preisbildung von Zinsderivaten spielt. Die Implikationen des im ersten Teil vorgestellten Modelles für das Risikomanagement werden anhand des von HO(1992) entwickelten Ansatzes der Key-Rate-Durations erläutert. Dieser Ansatz ermöglicht die Bestimmung der Sensitivität der Modellpreise auf Veränderungen von Zinssätzen unterschiedlicher Laufzeit. Die Vorteile dieses Konzeptes im Vergleich zu dem in der Praxis oft verwendeten Konzept der MACAULEY-Duration werden abschliessend diskutiert. Die wichtigsten Ergebnisse und Schlussfolgerungen werden im letzten Teil des Artikels zusammengefasst.

## 2. Arbitragefreie Bewertung von Aktien- und Bondoptionen

Das der Bewertung von derivativen Produkten zugrundeliegende Konzept beruht auf dem Arbitrageprinzip. Das Arbitrageprinzip besagt, dass zwei Portfolios, die in jedem zukünftigen Umweltzustand denselben Wert aufweisen, heute denselben Preis haben müssen. Wäre diese Bedingung nicht erfüllt, so könnte ein risikoloser Gewinn erwirtschaftet werden, indem gleichzeitig das billigere Portfolio gekauft und das teurere Portfolio verkauft wird. Soll z.B. der Preis einer Aktienoption bestimmt werden, so muss dasjenige Portfolio aus risikoloser Anlage[2] und Aktie gefunden werden,

welches unabhängig von der Entwicklung des Aktienpreises stets denselben Wert wie die Option aufweist. Das Arbitrageprinzip besagt nun, dass der Preis dieses Portfolios gleich dem Preis der Option sein muss. Für die Implementation dieses Bewertungsansatzes muss jedoch eine bestimmte Annahme bezüglich der zukünftigen Entwicklung der der Option zugrundeliegenden Anlage gemacht werden. Im Beispiel der Aktienoption wird der Aktienpreis  $S$  als sogenannter geometrischer Wiener-Prozess charakterisiert[3]:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad (1)$$

$z$  ist dabei ein Standard-Wiener-Prozess[4]. Die Momentanrendite  $\mu$  und deren Varianz  $\sigma^2$  sind im Zeitablauf konstant. Das oben erwähnte Arbitrageprinzip führt nun zur berühmten BLACK/SCHOLES-Formel zur Bewertung von Aktienoptionen[5]. Dieser Formel liegen folgende zwei fundamentale Annahmen zugrunde: Erstens wird ein im Zeitablauf konstanter risikoloser Zinssatz und zweitens eine im Zeitablauf konstante Varianz der Aktienrendite vorausgesetzt. Wird das Arbitrageprinzip auf die Preisbildung einer Bondoption übertragen, so müssen folgende zwei Problemkreise beachtet werden:

- Aus verschiedenen Gründen ist die Modellierung des Bondpreisprozesses viel komplizierter als diejenige des Aktienpreisprozesses in Gleichung 1. Erstens ist die Laufzeit eines Bondes endlich und dessen Wert muss bei Fälligkeit gleich dem Nennwert sein. Aufgrund desselben Argumentes nimmt die Volatilität des Bondpreises mit abnehmender Restlaufzeit ab. Zweitens können Bondpreise prinzipiell nicht Log-Normalverteilt sein, da die Summe der zukünftigen Cash-Flows (Coupons plus Nennwert) eine obere Grenze für den Bondpreis darstellt.
- Die Annahme stochastischer Bondpreise impliziert stochastische Zinssätze.

Die zwei obenerwähnten zentralen Annahmen der BLACK/SCHOLES-Formel sind somit für Bond-

optionen nicht erfüllt und die BLACK/SCHOLES-Formel kann deshalb nicht zu deren Bewertung herangezogen werden. Die Problematik der Modellierung des Bondpreisprozesses kann gelöst werden, indem der Bond selbst als derivatives Instrument betrachtet wird. In diesem Fall wird der Bondpreis relativ zum Prozess des momentanen Zinssatzes [6] bestimmt. Wie bei der Aktienoption kann der heutige Bondpreis aufgrund von Arbitrageüberlegungen bestimmt werden. Bei Verfall des Bondes ist dessen Wert unabhängig vom jeweiligen momentanen Zinssatz und muss gleich dem Nennwert des Bondes sein. Die arbitragefreie Bewertung von Zinsderivaten wird im folgenden Abschnitt anhand des VASICEK (1977) - Modelles demonstriert.

## 2.1 Das VASICEK - Modell als Einfaktormodell

Das VASICEK-Modell unterstellt für den momentanen Zinssatz  $r$  folgenden auch als ORNSTEIN-UHLENBECK-Prozess bezeichneten Diffusionsprozess:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dz \quad (2)$$

Die wesentliche Eigenschaft dieses Prozesses ist seine sogenannte mean-reversion. Gilt  $r > \theta$  ( $r < \theta$ ), so ist die erwartete Zinsänderung  $E(dr) = \kappa(\theta - r)dt$  negativ (positiv). Dies bedeutet, dass der Zinssatz  $r$  stets gegen den Wert  $\theta$  tendiert.  $\theta$  kann als mean-reversion-Niveau oder als langfristig erwarteter momentaner Zinssatz bezeichnet werden. Je höher  $\kappa$ , desto schneller tendiert  $r$  gegen den Wert  $\theta$ .

### 2.1.1 Die fundamentale partielle Differentialgleichung

Im VASICEK-Modell ist der momentane Zinssatz  $r$  der einzige Risikofaktor und deshalb hängen die Preise sämtlicher Zinsderivate (und damit auch sämtlicher Bonds) direkt von  $r$  ab und sie sind über das infinitesimal kleine Zeitintervall  $dt$  perfekt miteinander korreliert. Ito's Lemma [7] besagt nun, dass

für den Preisprozess eines Zinsderivates und damit auch für denjenigen eines Zerobonds  $P$  mit beliebiger Laufzeit gilt:

$$\begin{aligned} dP(\tilde{r}, t) &= P_t dt + P_r dr + \frac{1}{2} \sigma^2 P_{rr} dt \\ &= P_t dt + P_r \kappa(\theta - r) dt + \frac{1}{2} \sigma^2 P_{rr} dt + P_r \sigma dz \end{aligned}$$

Die Momentanrendite  $\mu_p$  der Zerobonds und deren Standardabweichung  $\sigma_p$  sind somit gleich:

$$\mu_p = \frac{[P_t + P_r \kappa(\theta - r) + \frac{1}{2} \sigma^2 P_{rr}]}{P}$$

$$\sigma_p = -\frac{P_r \sigma}{P} \quad (3)$$

Betrachten wir nun zwei Zerobonds A und B mit unterschiedlicher Restlaufzeit. Die Momentanrendite sowie die Standardabweichung (Risiko) derselben sind in Abbildung 1 eingetragen [8]. Da die Preise der beiden Bonds über das Zeitintervall  $dt$  perfekt miteinander korreliert sind, liegen sämtliche aus diesen zwei Bonds gebildeten Portfolios auf der eingetragenen Geraden. Die Momentanrendite einer bestimmten Kombination der beiden Bonds weist eine Standardabweichung von null auf und muss deshalb gleich dem risikolosen Zinssatz sein. Die Steigung der eingetragenen Gerade wird auch als Marktpreis des Risikos  $\lambda$  bezeichnet und ist gleich dem Quotienten aus der Risikoprämie (Momentanrendite  $\mu_p$  minus risikoloser Zinssatz  $r$ ) und deren Standardabweichung  $\sigma_p$  (Risiko des Bondes). Für die Momentanrendite eines Zerobonds gilt nun:

$$\mu_p = r + \lambda \sigma_p = r - \lambda \frac{P_r \sigma}{P} \quad (4)$$

Der Quotient  $-P_r/P$  kann auch als modified Duration interpretiert werden. Gleichung (4) postuliert somit eine (positive) lineare Beziehung zwischen der modified-Duration und der Momentanrendite

eines Bondes. Werden die Momentanrenditen in Gleichung (3) und (4) gleichgesetzt, so erhalten wir die folgende fundamentale partielle Differentialgleichung:

$$P_t + P_r \kappa \left( \theta + \frac{\lambda \sigma}{\kappa} - r \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 P_{rr} = rP$$

Da  $\theta$ ,  $\kappa$  und  $\sigma$  vorgegebene Parameter sind wird oft  $y = \theta + \lambda \sigma / \kappa$  gesetzt. Die fundamentale partielle Differentialgleichung lautet dann:

$$P_t + P_r \kappa (y - r) + \frac{1}{2} \sigma^2 P_{rr} = rP \quad (5)$$

### 2.1.2 Risikoneutrale Bewertung

Ist  $y$  bekannt, so könnte die partielle Differentialgleichung (5) auch folgendermassen hergeleitet werden. In der Prozessgleichung (2) wird  $\theta$  durch  $y$

ersetzt und in Gleichung 4 wird der Marktpreis des Risikos  $\lambda$  gleich null gesetzt[9]. Dieses Vorgehen führt genau zu derselben Differentialgleichung und wird auch als das risikoneutrale Bewertungsprinzip bezeichnet. Der um den Einfluss des Risikos korrigierte und demnach risikoneutrale ORNSTEIN-UHLENBECK-Prozess lautet somit:

$$dr = \kappa(y - r)dt + \sigma dz \quad (6)$$

$y$  kann auch als das risikoadjustierte mean-reversion-Niveau des ORNSTEIN-UHLENBECK-Prozesses (2) aufgefasst werden[10]. Die Preise von Zinsderivaten können nun berechnet werden, indem für den momentanen Zinssatz der risikoneutrale Prozess (6) unterstellt wird und der Erwartungswert der risikolos abdiskontierten Cash-Flows des jeweiligen Derivates gebildet wird[11].

Für Zerobonds mit Laufzeit  $T$  kann anhand Gleichung 5 und der Bedingung  $P_T(T) = 1$  folgende

Abbildung 1: Marktpreis des Risikos

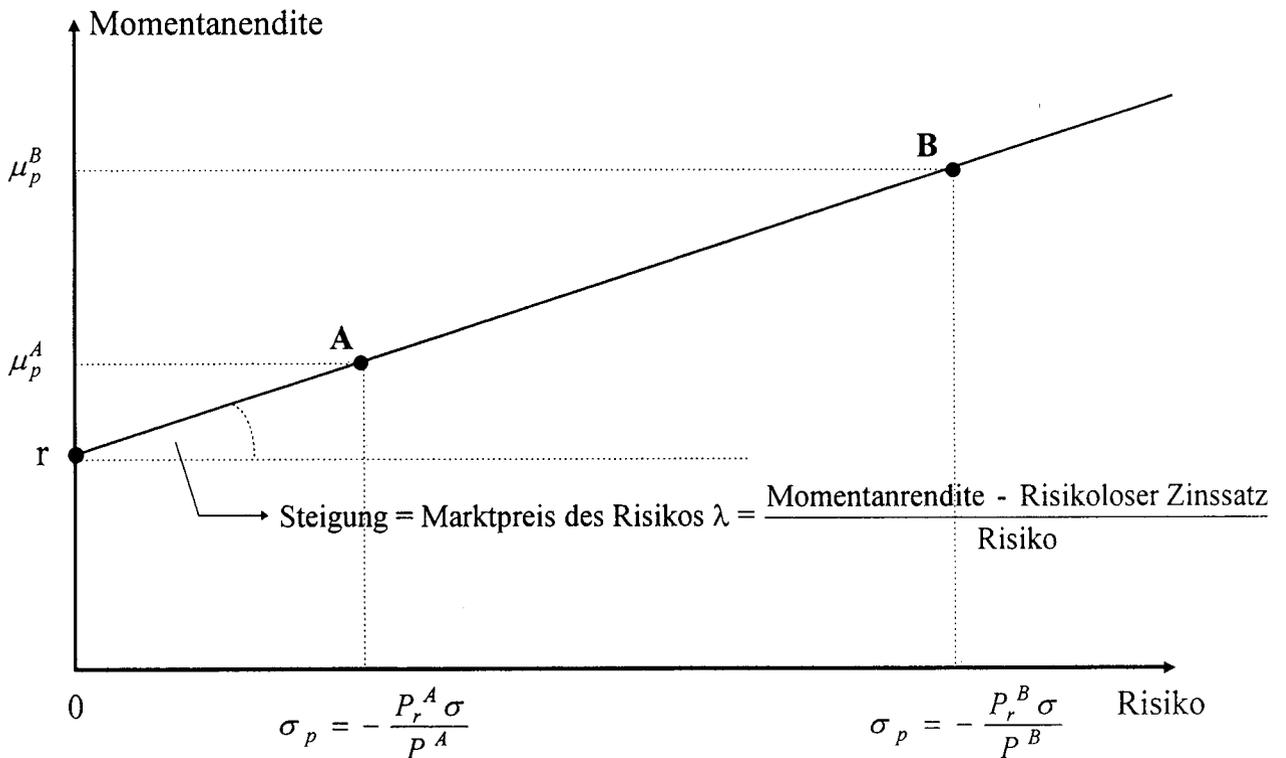
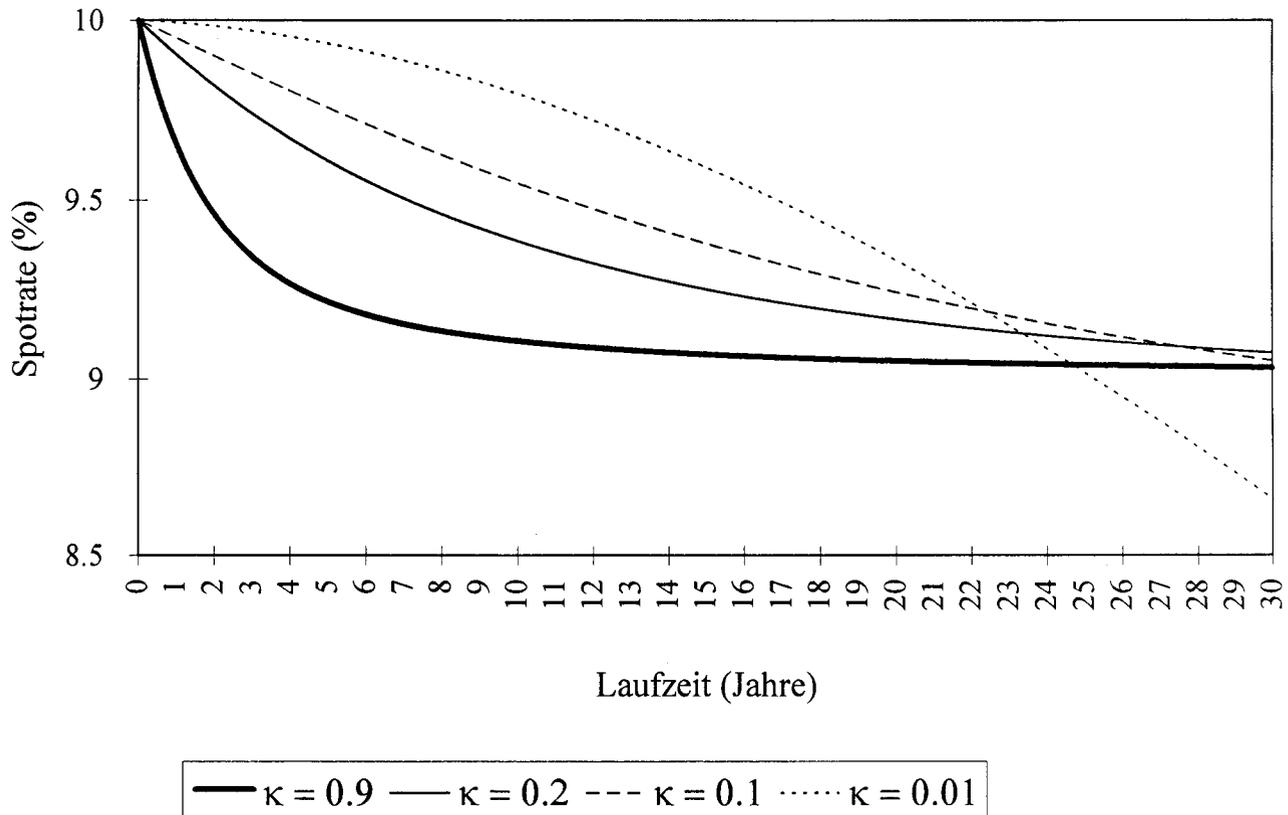


Abbildung 2: Modellendogene Fristenstruktur ( $r_0 = 10\%$ ,  $y = 9\%$ ,  $\sigma = 1\%$ )



analytische Lösung für den heutigen Preis  $P_0(T)$  derselben hergeleitet werden (Vgl. HULL/WHITE (1990a), p. 578)[12]:

$$P_0(T) = A(T)e^{-B(T)} \quad (7)$$

mit:

$$B(T) = \frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa}$$

$$A(T) = \exp \left[ \frac{(B(T) - T)(\kappa^2 y - \frac{1}{2} \sigma^2)}{\kappa^2} - \frac{B(T)^2 \sigma^2}{4\kappa} \right]$$

Es gilt zu beachten, dass für die Bestimmung der Zerobondpreise  $P_0(T)$  sämtliche Parameter  $\theta$ ,  $\kappa$  und  $\sigma$  des Prozesses des momentanen Zinssatzes (Glei-

chung 2) sowie der Marktpreis des Risikos  $\lambda$  bekannt sein müssen. Im Gegensatz zur Bewertung von Aktienoptionen handelt es sich hier also um keine präferenzfreie Bewertung. Sind die 4 Parameter bekannt, so können die Preise von Zerobonds beliebiger Laufzeit und damit die jeweiligen Spotrates berechnet werden. Die Fristenstruktur der Zinssätze folgt somit endogen aus dem Modell. Abbildung 2 gibt eine anhand der Parameterwerte  $y = 9\%$ ,  $\sigma = 1\%$  und dem heutigen momentanen Zinssatz  $r = 10\%$  berechnete Fristenstruktur für unterschiedliche Werte des mean-reversion-Parameters  $\kappa$  wieder. Diese Fristenstrukturen werden jedoch in der Regel kaum mit der aus Marktpreisen gehandelter Bonds berechneten Fristenstruktur übereinstimmen. Die anhand des Modelles berechneten Bondpreise und die jeweiligen Marktpreise werden

somit im allgemeinen nicht identisch sein. Dies ist wohl der bedeutendste Nachteil des soeben besprochenen Modelltypes. Eine Anpassung des Modelles an eine beobachtete Fristenstruktur wird in Kapitel 3 diskutiert. Für die meisten Zinsderivate wie z.B. amerikanische Optionen auf Coupon-Bonds, Swaptions u.s.w. kann Gleichung 5 nicht analytisch gelöst werden. Eine numerische Vorgehensweise wird deshalb im nächsten Abschnitt diskutiert.

## 2.2 Numerische Preisbestimmung von Zinsderivaten

Gleichung 6 stellt den Prozess des momentanen Zinssatzes  $r$  in einer risikoneutralen Welt dar. In dieser Welt ist der Preis eines Wertpapiers gleich seinem erwarteten risikolos abdiskontierten zukünftigen Pay-Off. Dieser Erwartungswert kann numerisch approximiert werden, indem der risikoneutrale Prozess des momentanen Zinssatzes anhand eines Trinomialbaumes diskret approximiert wird [13]. Die erwartete Änderung des momentanen Zinssatzes  $r$  und dessen Varianz über ein endliches Zeitintervall  $\Delta t$  sind gleich:

$$\begin{aligned} E[\Delta r] &= \kappa(y - r)\Delta t \\ \text{Var}[\Delta r] &= \sigma^2 \Delta t \end{aligned} \quad (8)$$

Abbildung 3 stellt den risikoneutralen ORNSTEIN-UHLENBECK-Prozess als Trinomialbaum dar, wobei  $r_0 = 10\%$ ,  $y = 9\%$ ,  $\kappa = 0.2$ ,  $\sigma = 1\%$ ,  $\Delta r = 2\%$  und  $\Delta t = 1$  gewählt wurde. Die fett eingetragenen Pfeile repräsentieren den Erwartungswert aus der Sicht des jeweiligen Knotens. Es ist gut ersichtlich, dass aufgrund der mean-reversion des Prozesses die Pfeile jeweils gegen den Wert  $y = 9\%$  gerichtet sind. In jedem Gitterpunkt müssen nun die Übergangswahrscheinlichkeiten  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  und  $\pi_3$  so bestimmt werden, dass der Erwartungswert und die Varianz im Trinomialbaum denjenigen in Gleichung 8 entsprechen. In jedem Knoten muss deshalb folgendes Gleichungssystem gelöst werden, wobei  $r_i$  gleich dem momentanen Zinssatz im jeweiligen Knoten ist:

$$\begin{aligned} E[\Delta r] &= (\pi_1 - \pi_3)\Delta r = \kappa(y - r_i)\Delta t \\ \text{Var}[\Delta r] &= [\pi_1 + \pi_3 - (\pi_1 - \pi_3)^2](\Delta r)^2 = \sigma^2 \Delta t \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned}$$

Die Lösungen dieses Gleichungssystems für  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  und  $\pi_3$  lauten:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{\sigma^2 \Delta t}{2(\Delta r)^2} + \frac{\mu \Delta t}{2\Delta r} + \frac{\mu^2 (\Delta t)^2}{2(\Delta r)^2} \\ \pi_2 &= 1 + \frac{\mu^2 (\Delta t)^2}{(\Delta r)^2} - \frac{\sigma^2 \Delta t}{(\Delta r)^2} \\ \pi_3 &= \frac{\sigma^2 \Delta t}{2(\Delta r)^2} - \frac{\mu \Delta t}{2\Delta r} + \frac{\mu^2 (\Delta t)^2}{2(\Delta r)^2} \end{aligned} \quad (9)$$

Wobei:  $\mu = \kappa(y - r_i)$

Die Wahrscheinlichkeiten  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  und  $\pi_3$  werden auch als risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten bezeichnet, da sie anhand des risikoneutralen Prozesses berechnet wurden. Zinsderivate werden bewertet, indem der Wert des jeweiligen Instrumentes bei Verfall bestimmt wird und durch mehrmaliges Anwenden folgender Formel die entsprechenden Werte vor Verfall rückwärts berechnet werden:

$$V_t^{r_i} = e^{-r_i \Delta t} [\pi_1 V_{t+\Delta t}^{r_i+\Delta r} + \pi_2 V_{t+\Delta t}^{r_i} + \pi_3 V_{t+\Delta t}^{r_i-\Delta r}]$$

$V_t^{r_i}$  ist dabei der Wert des Zinsderivates zum Zeitpunkt  $t$  bei einem Zinssatz von  $r_i$ . In Abbildung 4 wird anhand dieses Modelles ein 3-jähriger Zerbond und eine europäische Calloption auf diesen Bond mit Ausübungspreis 90 und Verfall in 2 Jahren bewertet. Die Preise der Option sind in Klammern eingetragen und die den Berechnungen zugrundeliegenden Parameterwerte sind wiederum:  $r_0 = 10\%$ ,  $y = 9\%$ ,  $\kappa = 0.2$ ,  $\sigma = 1\%$ ,  $\Delta r = 2\%$  und  $\Delta t = 1$ . Anhand dieser Vorgehensweise kann im Prinzip der Wert eines beliebigen Zinsderivates

berechnet werden. Welche Werte für die Modellparameter  $\theta$ ,  $\kappa$ ,  $\sigma$  und  $\lambda(y = \theta + \lambda\sigma/\kappa)$  sollen jedoch verwendet werden? Mit dieser Frage beschäftigen wir uns im nächsten Abschnitt.

### 2.3 Schätzung der Modellparameter

In dem oben beschriebenen Modell müssen die Parameter  $\theta$ ,  $\kappa$ ,  $\sigma$  und  $\lambda$  exogen vorgegeben werden. Es handelt sich hier prinzipiell um dieselbe Problematik wie bei der Bestimmung der Volatilität im BLACK/SCHOLES-Modell. Einerseits können die Parameter anhand in der Vergangenheit beobachte-

ter Realisationen des jeweiligen Prozesses geschätzt werden. Andererseits können die Parameter auch implizit aus den Preisen bestehender Derivate berechnet werden. Die nachfolgende Schätzung der Parameter  $\theta$ ,  $\kappa$  und  $\sigma$  des ORNSTEIN-UHLENBECK-Prozesses (Gleichung 2) anhand historischer Daten soll einen Einblick in die Grössenordnung derselben und das Ausmass der "mean-reversion" geben. Für die in diesem Abschnitt durchgeführten Prozessparameterschätzungen wird der folgende allgemeinere ORNSTEIN-UHLENBECK-Prozess unterstellt:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + r^{\gamma}\sigma dz \quad (10)$$

Abbildung 3: Der risikoneutrale O-U-Prozess als Trinomialbaum

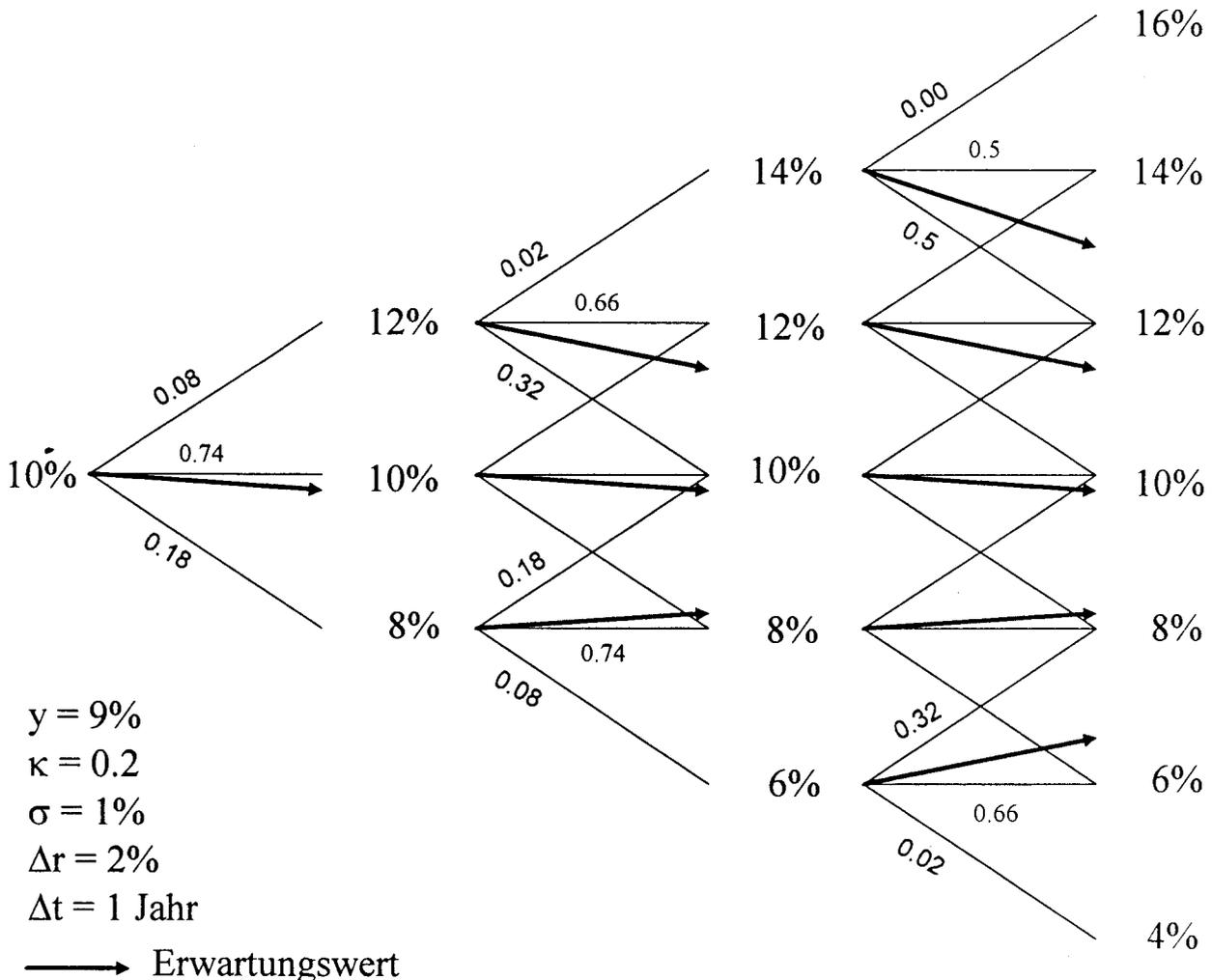
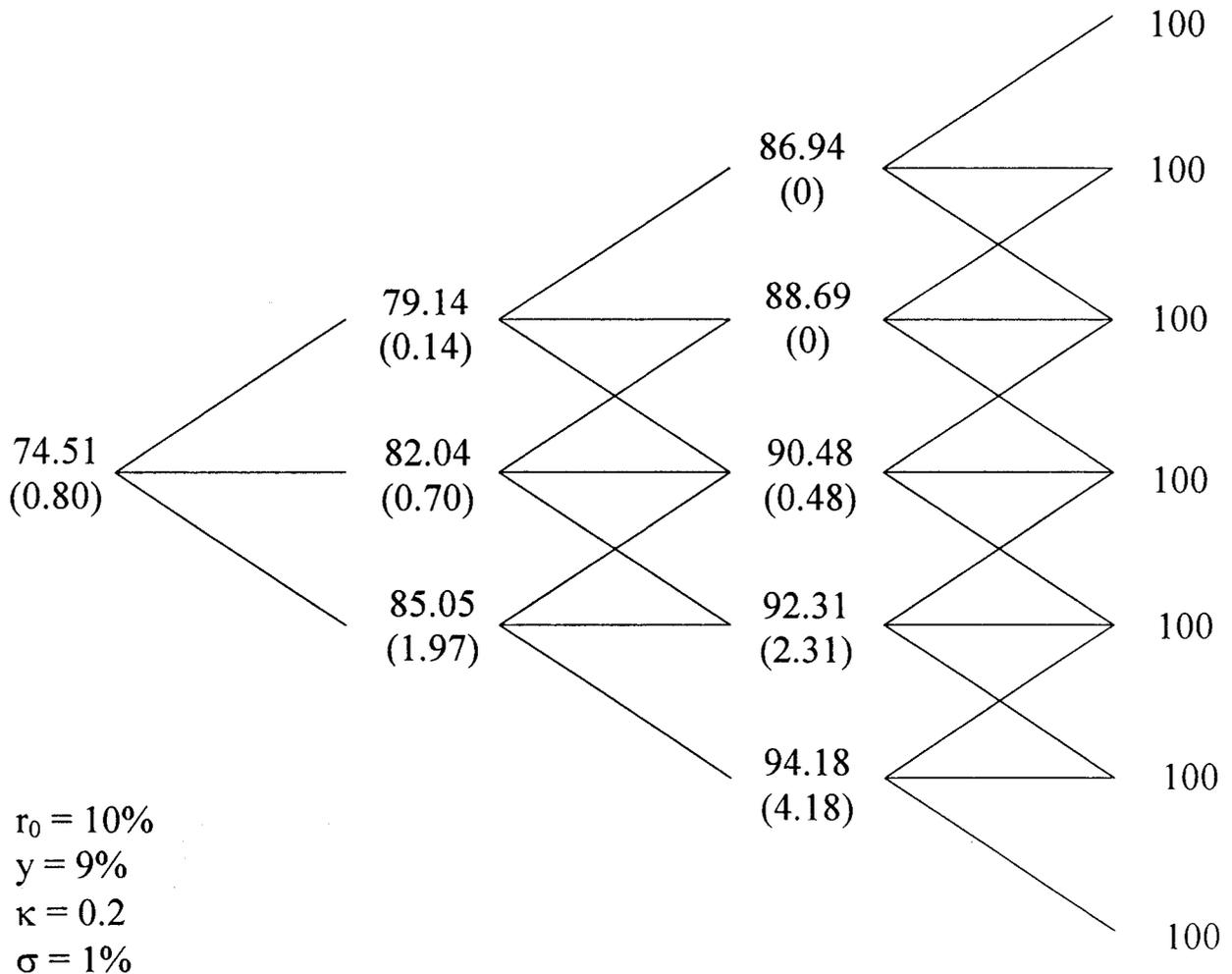


Abbildung 4: Trinomialbaum der Bondpreise und der Calloption



Dieser allgemeinere ORNSTEIN-UHLENBECK-Prozess widerspiegelt zusätzlich eine oft beobachtete Beziehung zwischen dem Niveau des Zinssatzes und dessen Volatilität die anhand des Parameters  $\gamma$  erfasst wird. Für das besprochene VASICEK-Modell gilt  $\gamma = 0$  und diese Restriktion soll hier ebenfalls getestet werden. Als Approximation für den momentanen Zinssatz wurde der jeweils Ende Monat beobachtete Sfr-1-Monats-Euromarktzinssatz von Januar 1974 bis März 1993 verwendet (231 Beobachtungen). Bei der Schätzmethodik handelt es sich um das von CHAN/KAROLIY/LONGSTAFF/SANDERS (1992) vorgeschlagene Schätzverfahren[14] und die Schätzungen wurden

bezüglich der folgenden diskreten Approximation des ORNSTEIN-UHLENBECK-Prozesses (10) durchgeführt:

$$r_{t+\Delta t} - r_t = \kappa * (\theta - r_t) + \varepsilon_{t+\Delta t}$$

mit:

$$E[\varepsilon_{t+\Delta t}] = 0 \quad \text{und} \quad E[\varepsilon_{t+\Delta t}^2] = \sigma^{*2} r_t^{2\gamma}$$

Die Schätzwerte  $\kappa^*$  und  $\sigma^*$  beziehen sich dabei auf das Zeitintervall  $\Delta t = 1$  Monat. Für die im Modell verwendeten annualisierten Werte gilt

$$\kappa = \frac{\kappa^*}{\Delta t} \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{\sigma^*}{\sqrt{\Delta t}} \quad [15].$$

In der ersten Reihe von Tabelle 1 sind die Schätzergebnisse ohne Restriktion bezüglich der Parameter  $\gamma$  und  $\kappa^*$  eingetragen. Der langfristige Erwartungswert  $\theta$  des momentanen Zinssatzes ist gleich 4.48%. Der Parameter  $\kappa^*$  wird am anschaulichsten anhand des sogenannten "half life" des Prozesses interpretiert. Als "half life" wird diejenige Zeit bezeichnet, die im Mittel verstreicht, bis die Hälfte einer ursprünglichen Abweichung des momentanen Zinssatzes von seinem langfristigen Erwartungswert zurückgelegt ist[16]. Für die untersuchte Zeitreihe beträgt dieser Wert 11.18 Monate. Ist z.B. der Einmonatszinssatz heute bei 8.5%, so wird in 11.18 Monaten ein Zinssatz von 6.49% erwartet[17]. Der

t-Wert des Parameters  $\kappa^*$  und das aufgrund der Restriktion  $\kappa^* = 0.0$  berechnete GMM-Kriterium[18] weisen eindeutig darauf hin, dass es sich beim beobachteten Zinsprozess um keinen Random-Walk handelt. Die mean-reversion scheint also eine tatsächlich beobachtete Eigenschaft des momentanen Zinssatzes zu sein. Der Parameter  $\gamma = 0.164$  ist nicht signifikant von null verschieden. Dies bedeutet, dass kein signifikanter Zusammenhang zwischen dem Niveau und der Volatilität des Zinssatzes festgestellt werden kann.

In der zweiten Zeile der Tabelle 1 sind deshalb die Ergebnisse einer Schätzung mit der Restriktion  $\gamma = 0.0$  aufgeführt. Die Resultate in Bezug auf die Parameter  $\theta$  und  $\kappa$  unterscheiden sich nur geringfügig von denjenigen ohne Restriktion bezüglich  $\gamma$ . In den Beispielen in Kapitel 5 werden die geschätzten Parameterwerte unter der Restriktion  $\gamma = 0.0$  verwendet. Wie bereits erwähnt müssen die Schätzwerte für  $\kappa^*$  und  $\sigma^*$  jedoch wie folgt annualisiert werden:

**Tabelle 1: Prozessparameterschätzungen**

Restriktionen	$\theta$ (%)	$\kappa^*$	$\sigma^*$ (%)	$\gamma$	GMM-Kriterium
keine	4.48 (2.57)	0.062 (2.84)	1.53 (2.20)	0.164 (1.22)	
$\gamma = 0.0$	<b>4.65</b> <b>(2.63)</b>	<b>0.060</b> <b>(2.78)</b>	<b>0.843</b> <b>(13.9)</b>	--	<b>1.72</b> <b>[0.19]</b>
$\kappa^* = 0.0$	0.02 (0.34)	--	1.35 (1.89)	0.14 (0.92)	7.07 [0.01]
$\gamma = 0.0$ $\kappa^* = 0.0$	0.03 (0.51)	--	0.81 (12.8)	--	7.91 [0.02]

Den General Method of Moments (GMM)-Schätzungen liegt folgende diskrete Approximation des allgemeinen Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses (10) zugrunde:

$$r_{t+\Delta t} - r_t = \kappa^*(\theta - r_t) + \varepsilon_{t+\Delta t}$$

mit  $E[\varepsilon_{t+\Delta t}] = 0$  und  $E[\varepsilon_{t+\Delta t}^2] = \sigma^{*2} \Delta t$

Als Datenbasis wurde der jeweils Ende Monat erhobene Sfr-Einmonatszins über die Zeitperiode von Januar 1974 bis März 1993 (231 Beobachtungen) verwendet ( $\Delta t = 1$  Monat). Die in der ersten Spalte aufgeführten Restriktionen wurden anhand des  $\chi^2(n)$ -verteilten GMM-Kriteriums getestet, wobei die Freiheitsgrade  $n$  durch die Anzahl Restriktionen bestimmt sind. Der p-Wert ist jeweils in eckigen Klammern eingetragen. In runden Klammern sind die t-Werte der geschätzten Koeffizienten wiedergegeben, wobei  $p(t > 1.96) = 5\%$ .

$$\kappa = \frac{\kappa^*}{\Delta t} = 0.060 * 12 = 0.72$$

$$\sigma = \frac{\sigma^*}{\sqrt{\Delta t}} = 0.843 * \sqrt{12} = 2.92\%$$

### 3. Präferenzfreie Bewertung von Zinsderivaten

Das im letzten Kapitel besprochene Einfaktormodell weist zwei wesentliche Nachteile auf. Erstens müssen Annahmen über die Risikoeinstellung der Marktteilnehmer gemacht werden. Die Bewertung ist somit nicht präferenzfrei. Zweitens wird die Fristenstruktur der Zinssätze im Modell endogen bestimmt. Diese endogen determinierte Fristenstruktur wird in den meisten Fällen nicht mit der am Markt beobachteten Fristenstruktur übereinstimmen. Somit werden z.B. die Anhand des Modelles berechneten Preise von Couponbonds in der Regel

nicht gleich den jeweiligen Marktpreisen sein. Im Gegensatz dazu weist das in empirischen Studien[19] oft eingesetzte HO/LEE (1986)-Modell diese zwei Nachteile nicht auf. Anhand des HO/LEE-Modelles können Zinsderivate präferenzfrei bezüglich einer vorgegebenen Fristenstruktur bewertet werden. Wie muss nun das hier betrachtete VA-SICEK-Modell erweitert werden, damit es ebenfalls diese zwei Eigenschaften aufweist? HULL/WHITE (1993) schlagen vor, den Parameter  $y$  des risikoneutralen ORNSTEIN-UHLENBECK-Prozesses (Gleichung 6) als im Zeitablauf variabel zu modellieren[20]. Der Prozess nimmt somit folgende Form an:

$$dr = \kappa[y(t) - r]dt + \sigma dz \quad (11)$$

Betrachten wir wiederum das Beispiel in Abschnitt 2.2, wobei nun der konstante Wert  $y = 9\%$  durch die anhand der Fristenstruktur der Zinssätze zu bestimmenden  $y(t)$  ersetzt wird. Folgende am Markt beobachtete Fristenstruktur wird vorgegeben:

$s_1 = 10\%$ ,  $s_2 = 10.1\%$ ,  $s_3 = 10.2\%$ [21]. Es gilt stets  $r_0 = s_1$ , unabhängig vom Wert  $y(0)$ [22].  $y(0)$  muss jedoch in Bezug auf  $s_2$  folgende Gleichung erfüllen[23]:

$$e^{-2s_2} = e^{-r_0} E[e^{-r_1}] = e^{-r_0} e^{-(r_0 + \kappa[y(0) - r_0] - \frac{1}{2}\sigma^2)}$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht der Preis eines 2-Jahres-Zerobondes. In der hier betrachteten risikoneutralen Welt muss dieser gleich dem Preis eines 1-Jahres-Zerobondes multipliziert mit dem erwarteten Preis eines 1-Jahres-Zerobondes in einem Jahr sein. Diese Gleichung nach  $y(0)$  aufgelöst ergibt:

$$y(0) = r_0 + \frac{2s_2 - 2r_0 + \frac{1}{2}\sigma^2}{\kappa} = 11.025\%$$

Für die Berechnung der  $y(t)$ ,  $t = 1, \dots, T$ , müssen jeweils die "Zustandspreise"  $Q(t, j)$  bestimmt werden.  $Q(t, j)$  ist der heutige Preis einer Anlage, die zum Zeitpunkt  $t$  im Zustand (Knoten)  $j$  einen Wert von 1 und in allen anderen Knoten zum selben

Zeitpunkt einen Wert von 0 aufweist. Die Berechnung der  $y(t)$  und der Preise  $Q(t, j)$  wird im Anhang A anhand des betrachteten Beispiels demonstriert. Für  $y(1)$  wird dabei ein Wert von 11.26% berechnet. In den Abbildungen 5 und 6 ist die Bewertung eines 3-Jahres-Zerobondes und einer europäischen Call-Option mit Ausübungspreis  $X = 90$  und Verfall in 2 Jahren graphisch illustriert.

Die soeben beschriebene Methode ermöglicht die Berechnung der  $y(t)$  aus einer vorgegebenen Fristenstruktur. Da  $y(t) = \theta + \lambda\sigma/\kappa$  gilt, muss entweder  $\theta$  oder  $\lambda$  (oder beide Parameter) im Zeitablauf variabel sein[24]. Für die Implementation des Modelles muss jedoch weder die Zeitreihe  $\theta(t)$  noch die Zeitreihe  $\lambda(t)$  bekannt sein. Die anhand dieses Modelles berechneten Preise sind somit unabhängig vom Marktpreis des Risikos  $\lambda(t)$ . Wie das HO/LEE-Modell erlaubt also auch das HULL/WHITE-Modell die präferenzfreie Bewertung von Zinsderivaten relativ zu einer vorgegebenen Fristenstruktur. Die präferenzfreie Bewertung wird durch den Miteinbezug der Information in der beobachteten Fristenstruktur respektive dem Miteinbezug der Information in den Marktpreisen der gehandelten Bonds ermöglicht. Marktpreise enthalten somit Informationen bezüglich der aggregierten Risikoaversion der Marktteilnehmer.

Wo liegt nun der Unterschied zwischen dem HO/LEE-Modell und dem HULL/WHITE-Modell? Es kann gezeigt werden, dass das HO/LEE-Modell ein Spezialfall des HULL/WHITE-Modelles ist. Für das HO/LEE-Modell gilt dabei  $\kappa = 0$  (Vgl. Anhang B). Damit können die anhand dieser zwei Modelle berechneten Preise innerhalb desselben Modellansatzes direkt miteinander verglichen werden. Ein wesentlicher Vorteil der Interpretation des HO/LEE-Modelles als Spezialfall des HULL/WHITE-Modelles besteht darin, dass bei der HULL/WHITE-Spezifikation nur ein Parameter (die Volatilität  $\sigma$ ) vorgegeben werden muss. Im Gegensatz zu den zwei Parametern ( $\pi$  und  $\delta$ ) im HO/LEE-Modell kann  $\sigma$  auch anhand historischer Daten geschätzt werden (HEATH/JARROW/MORTON (1990), p. 435). Die in Kapitel 5.2. durchgeführte komparative statische Analyse bezüglich des Parameters  $\kappa$  wird

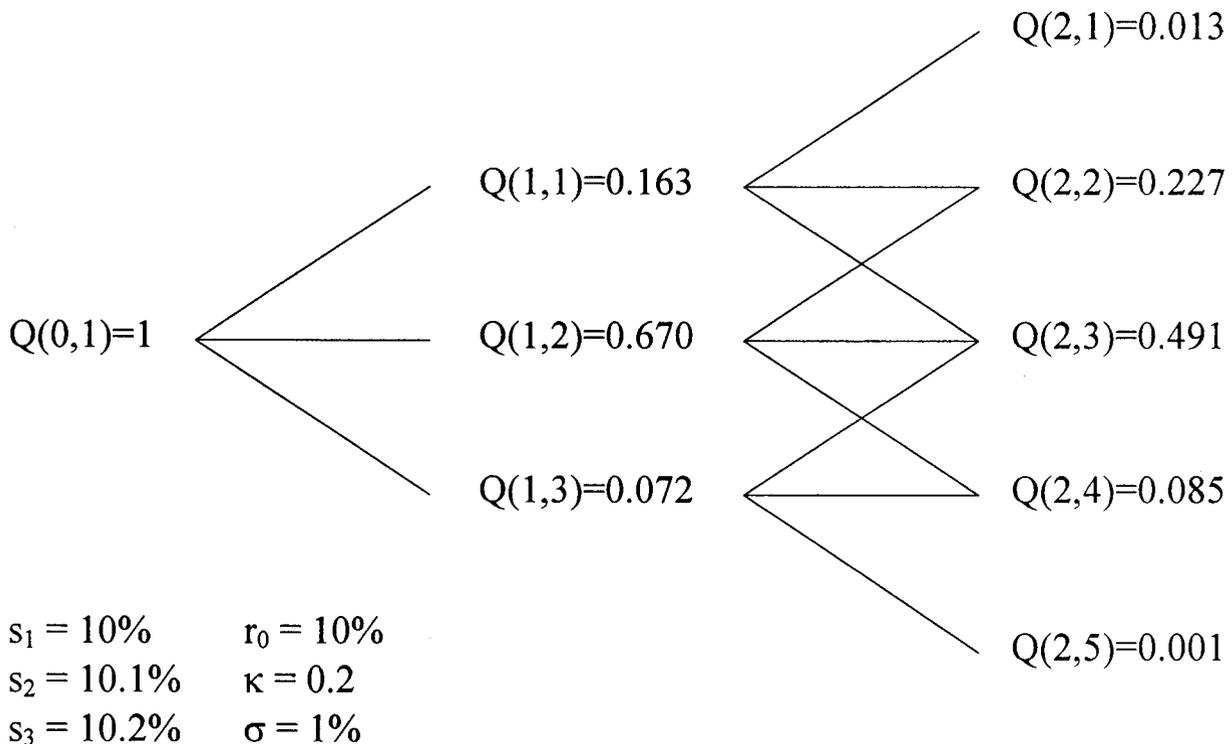
zeigen, dass die Modellpreise sehr sensitiv bezüglich der Wahl des "mean-reversion"-Parameters  $\kappa$  sind. Bevor wir jedoch diese komparativ statische Analyse besprechen und die Eigenschaften der anhand des HULL/WHITE-Modelles berechneten Preise von Zinsderivaten diskutieren, sollen die Probleme erläutert werden, die sich bei einer praktischen Implementation des Modelles im schweizer Zinsmarkt ergeben.

#### 4. Probleme bei der praktischen Implementation des Modelles im schweizer Zinsmarkt

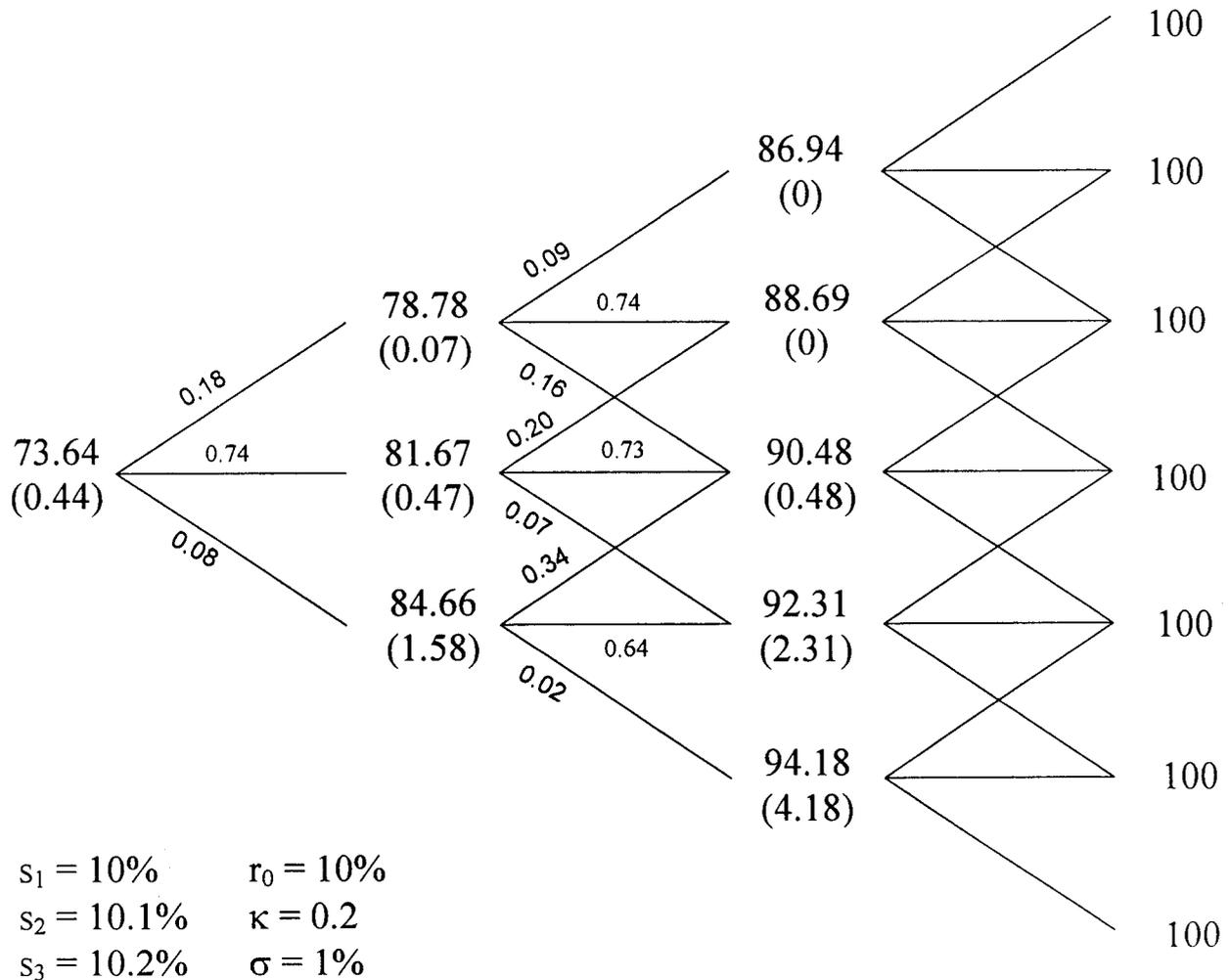
Im letzten Abschnitt wurde die Vorgehensweise zur Bewertung von Zinsderivaten anhand eines einfachen Beispiels erläutert. Bei der praktischen Implementation dieses Modelles müssen jedoch folgende Problemkreise berücksichtigt werden:

- Der Preis des zu bewertenden Zinsderivates sollte mit zunehmender Anzahl Zeitintervalle (d.h. mit abnehmendem  $\Delta t$ ) gegen einen bestimmten Wert konvergieren. Dies kann nur dann garantiert werden, wenn die Wahrscheinlichkeiten  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  und  $\pi_3$  stets positiv sind[25]. Dazu müssen einerseits gewisse Bedingungen bezüglich der relativen Grössenordnung von  $\Delta t$  und  $\Delta r$  erfüllt sein[26] und andererseits muss die Struktur des Trinomialbaumes an die jeweiligen Parameterwerte (insbesondere der  $y(t)$ ) angepasst werden[27].
- Wird z.B. eine Option mit Verfall in einem Monat auf einen 10-Jahres-Bond bewertet, so drängt sich die Verwendung unterschiedlicher Zeitintervalle  $\Delta t$  vor und nach dem Verfall der Option auf. Das optimale Zeitintervall  $\Delta t$  kann z.B. vor Verfall gleich einem Tag und nach Verfall gleich einem Monat sein.[28]

Abbildung 5: Trinomialbaum der Zustandspreise



**Abbildung 6: Trinomialbaum des Bondpreises und der Calloption**  
(Bewertung relativ zur vorgegebenen Fristenstruktur)



- Meistens ist es kaum möglich die Zeitintervalle  $\Delta t$  so festzulegen, dass sämtliche für die Bewertung relevanten Zeitpunkte (Couponszahlungen, Verfallzeitpunkt einer Option u.s.w.) mit einem Knoten zusammenfallen. Wie muss nun  $\Delta t$  gewählt werden, damit der Approximationsfehler möglichst klein ist, der Rechenaufwand jedoch in Grenzen gehalten werden kann?
- Bei der Bewertung von Optionen auf Bonds muss beachtet werden, dass der jeweilige Wert der Option bezüglich dem sogenannten "Clean"-Preis berechnet wird. Der "Clean"-Preis entspricht dem "Dirty"-Preis (Barwert) minus

den Marchzinsen. Anhand des beschriebenen HULL/WHITE-Modelles wird der "Dirty"-Preis eines Bondes berechnet von dem somit jeweils die Marchzinsen abgezogen werden müssen.

- Die in Abschnitt 2.3. durchgeführten Schätzungen der Prozessparameter  $\sigma$  und  $\kappa$  basierten auf der Annahme eines konstanten "mean-reversion"-Niveaus  $\theta$  im Zeitablauf. Diese Werte können deshalb nicht ohne weiteres im HULL/WHITE-Modell verwendet werden. Aus dieser Sicht drängt sich eine implizite Bestimmung der Parameter  $\sigma$  und  $\kappa$  anhand

- von Marktpreisen gehandelter Zinsderivate auf.
- Die Fristenstruktur der Spotrates ist für Anleihen unterschiedlicher Bonität und/oder unterschiedlicher Coupons (steuerlicher Couponeffekt) nicht eindeutig festgelegt. Damit die Marktpreise von Couponbonds mit den jeweiligen Modellpreisen übereinstimmen muss die vorgegebene Fristenstruktur der Spotrates in der Regel risikoadjustiert respektive couponadjustiert werden.[29] Dies gilt insbesondere bei der im folgenden vorgeschlagenen aus Euro- und Swapsätzen berechneten Fristenstruktur.
- Bei der oben beschriebenen Anpassung des Modelles an eine vorgegebene Fristenstruktur via eines variablen Parameters  $y(t)$  muss die Spotrate für jedes ganzzahlige Vielfache von  $\Delta t$  bekannt sein. Wie in der nachfolgend präsentierten Implementation des Modelles auf dem schweizerischen Zinsmarkt sind die Spot-

rates oft nur für ganz bestimmte Zeitpunkte bekannt. Es kann gezeigt werden, dass eine lineare Interpolation zu stark schwankenden Forwardrates und damit zu teilweise unrealistischen Werten für  $y(t)$  führt. Es drängt sich deshalb die nachfolgend vorgestellte stückweise kubische Interpolation auf.

Als Voraussetzung zur Bewertung von Zinsderivaten muss die heute beobachtete Fristenstruktur bekannt sein. Da auf dem schweizer Bondmarkt keine liquiden Bondpreise erhältlich sind, wird im folgenden die Fristenstruktur am kurzen Ende anhand von Eurosätzen und am langen Ende anhand von Swapsätzen bestimmt[30]. Eurosätze sind für die Laufzeiten 1,2,3,6 und 12 Monate und die Swapsätze für 2,3,4,5,7 und 10 Jahre erhältlich. Wie bereits erwähnt, müssen jedoch für die Implementation des Modelles die Spotrates für sämtliche ganzzahlige

Abbildung 7a: Spotrates

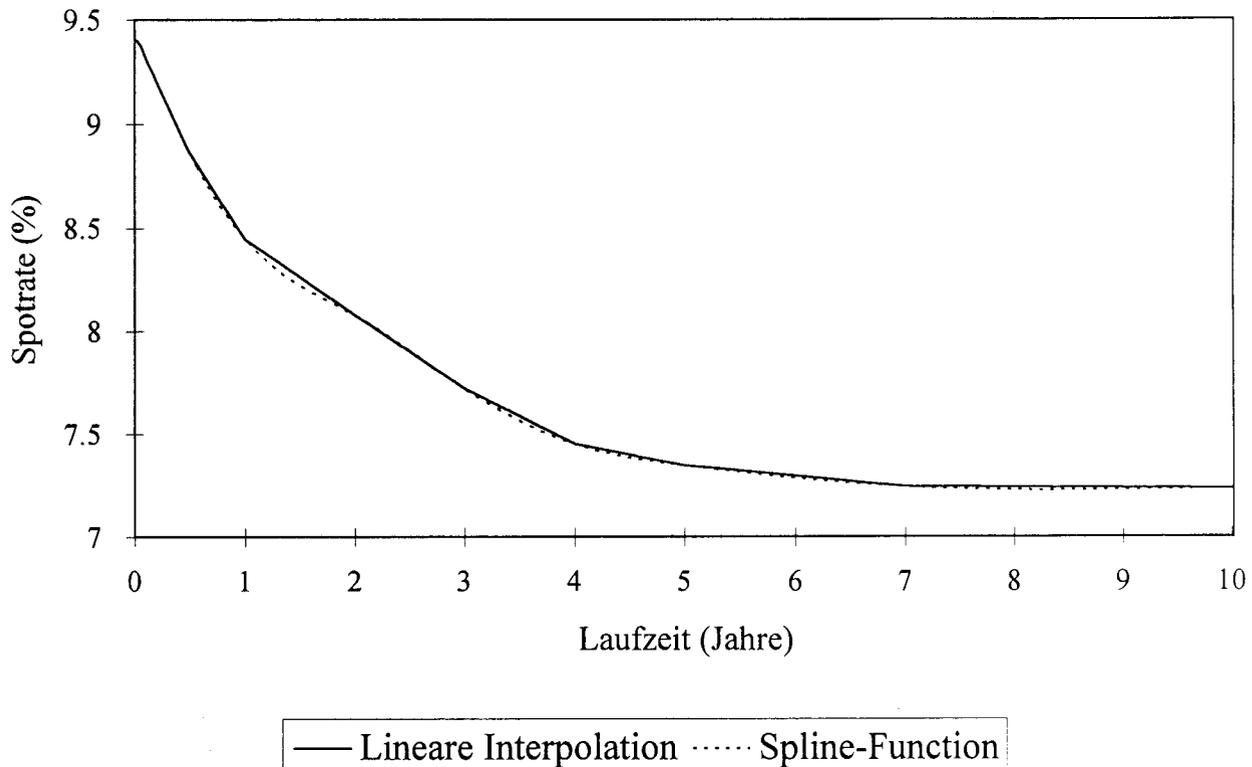
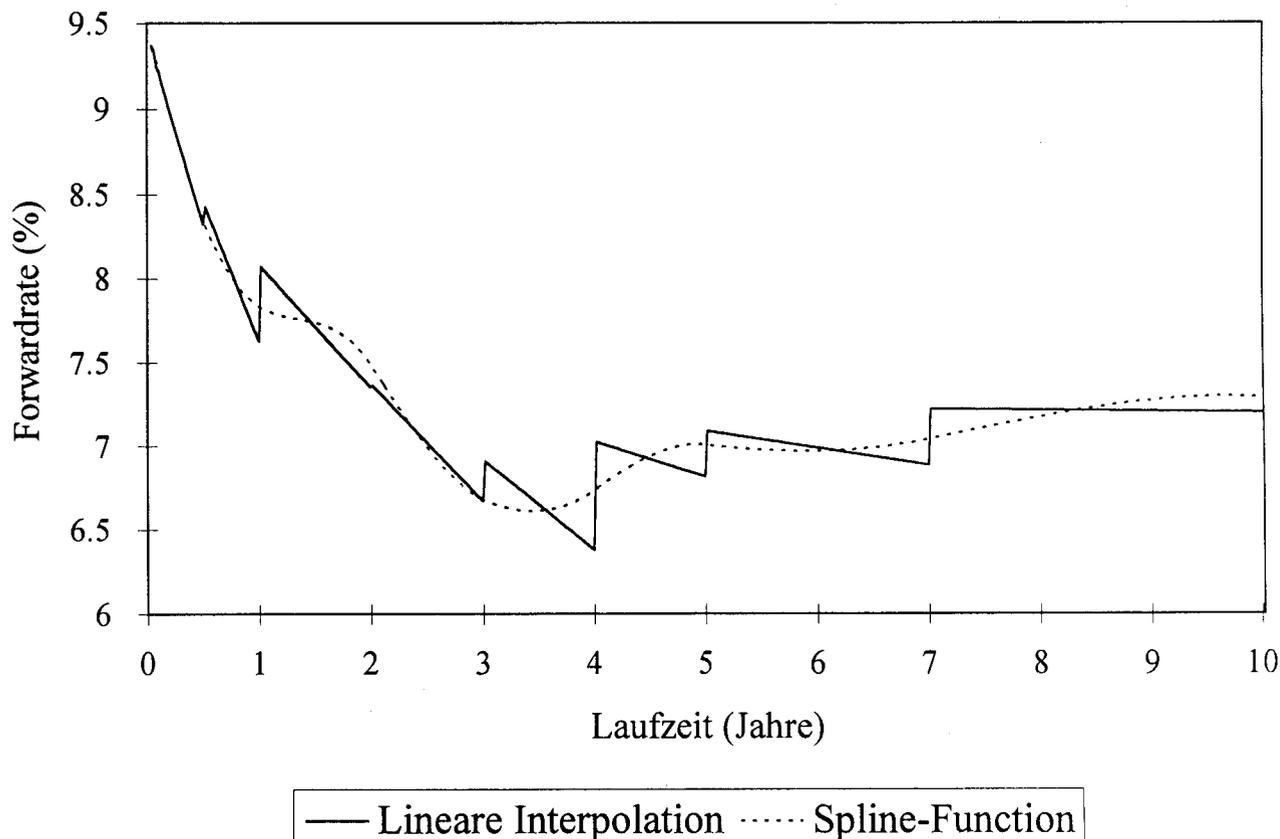


Abbildung 7b: Forwardrates



Vielfache von  $\Delta t$  bekannt sein. Die einfachste Berechnung dieser Spotrates besteht in einer linearen Interpolation. In Abbildung 7a ist die Fristenstruktur der Spotrates vom 12. Juni 1992 eingetragen. Wie aus Abbildung 7b ersichtlich ist, führt eine lineare Interpolation zu teilweise beträchtlichen Sprüngen der entsprechenden Forwardrates. Damit das Modell diese Sprünge abbilden kann, muss der Parameter  $y(t)$  ebenfalls stark schwanken (Vgl. Abbildung 7c)[31]. Es werden teilweise Werte erreicht, die absolut unrealistisch sind. Die Problematik liegt wohl nicht bei einer Fehlspezifikation des Modelles sondern bei den unrealistischen Sprüngen der Forwardrates. Um diese Problematik zu vermeiden, wurden deshalb die zwischen den bekannten Zeitpunkten liegenden Spotrates anhand einer kubischen "Spline-Funktion" interpoliert[32]. Aus den

Abbildungen 7b und 7c ist ersichtlich, dass die aufgrund dieses Verfahrens berechneten Forwardrates und Parameter  $y(t)$  viel geringere Schwankungen und vor allem keine Sprünge aufweisen.

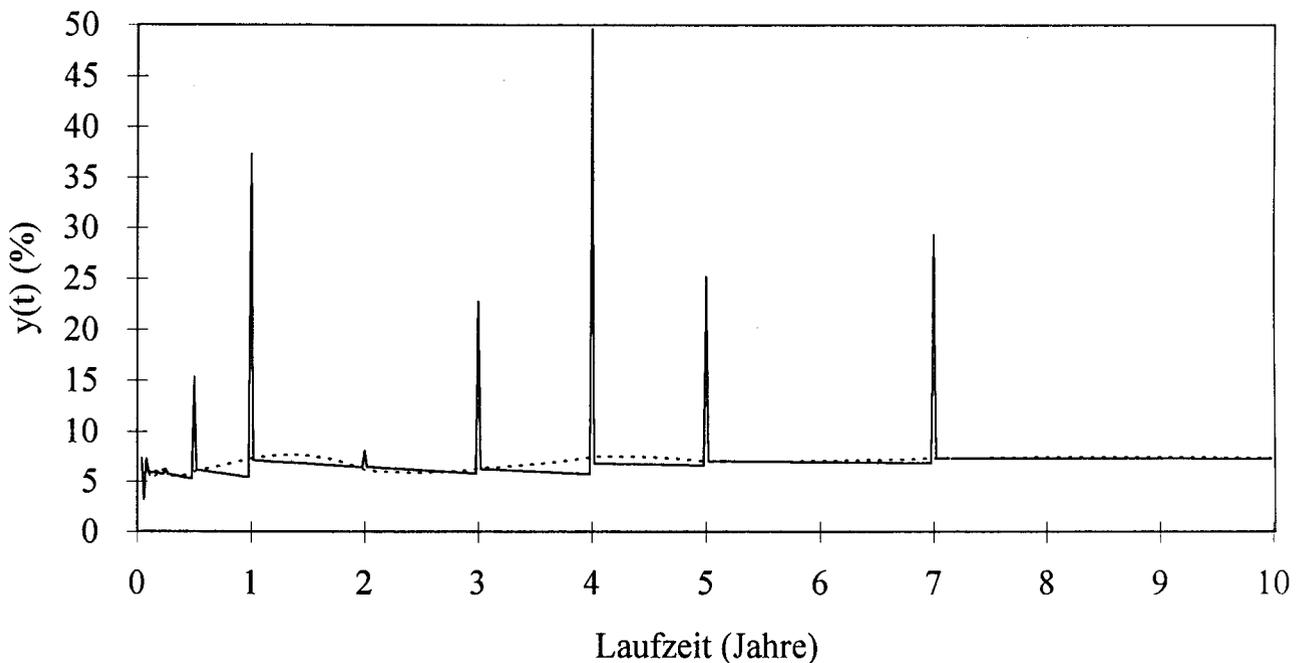
### 5. Preisbildungscharakteristika, Parametersensitivität und Risikomanagement

In Kapitel 3 und 4 wurde ein Modell zur "präferenzfreien" Bewertung von Zinsderivaten relativ zu einer vorgegebenen Fristenstruktur vorgestellt. Der Begriff präferenzfrei bedeutet dabei, dass in die Preisbildung keine Annahmen bezüglich der Risikobereitschaft der Marktteilnehmer einfließen. Das Modell bewertet Marktpreise relativ zu einer vorgegebenen Fristenstruktur, das heisst die anhand des

Modelles berechneten Preise von (Coupon-)Bonds stimmen mit den Marktpreisen überein. Diese zweite Eigenschaft des Modelles ist sowohl für die Preisbildungscharakteristika wie auch für das Risikomanagement von zentraler Bedeutung. Eine ansteigende Fristenstruktur der Spotrates reflektiert zum Beispiel höhere erwartete Spotrates in der Zukunft und dies drückt sich wiederum in einer bestimmten erwarteten Entwicklung des Preises der Zinsderivate aus. Dies ist die einzige Eigenschaft des Modelles, welche für das Verständnis dieses Kapitels bekannt sein muss. Die Kenntnis der eher formalen Herleitung im zweiten und dritten Kapitel wird nicht vorausgesetzt. Im folgenden Abschnitt werden die wichtigsten Preisbildungscharakteristika von Bondoptionen und kündbaren Bonds anhand von drei Beispielen diskutiert. Kompliziertere Zinsderivate wie zum Beispiel Swaptions, Caps, Floors

oder Collars können als Portfolios von Bondoptionen betrachtet werden und damit ergeben sich auch deren Preisbildungscharakteristika aus denjenigen der entsprechenden Bondoptionen. Interessant ist vor allem die Frage, wie sich diese Eigenschaften von denjenigen der anhand der BLACK/SCHOLES-Formel berechneten Preise von Aktienoptionen unterscheiden. Im zweiten Abschnitt wird die Sensitivität der Modellpreise bezüglich der Wahl der Parameter  $\sigma$  (Volatilität des momentanen Zinssatzes) und  $\kappa$  ("mean-reversion" des momentanen Zinssatzes) diskutiert. Es zeigt sich, dass die Preise sehr stark von dieser Parameterwahl abhängen. Der letzte Abschnitt in diesem Kapitel befasst sich mit dem Risikomanagement von zinsabhängigen Wertpapieren. Gibt es prinzipielle Unterschiede zwischen dem Risikomanagement von Portfolios bestehend aus Aktien und Aktienoptionen im Ver-

Abbildung 7c: "Mean-reversion"-Niveau  $y(t)$



— Lineare Interpolation    ..... Spline-Function

gleich zu Fixed-Income-Portfolios? Anhand des von HO (1992) entwickelten Ansatzes der Key-Rate-Durations kann dieser Frage ausführlich nachgegangen werden.

### 5.1 Bewertung von kündbaren Couponbonds und von Optionen auf Couponbonds

In Tabelle 2 sind 3 Beispiele für die Preise von Couponbonds, Optionen auf diese Bonds und kündbarer Couponbonds aufgelistet. Die den Berechnungen zugrundeliegenden Parameterwerte des Modelles sind die geschätzten annualisierten Werte aus Tabelle 1 mit der Restriktion  $\gamma = 0$  (Vgl. Abschnitt 2.3.). Ferner wurde die Fristenstruktur vom 12. Juni 1992 vorgegeben (Vgl. Abbildung 7a). Die kündbaren Couponbonds können vom Schuldner jederzeit nach dem angegebenen ersten Kündigungszeitpunkt zurückbezahlt werden.[33] Der im ersten Beispiel betrachtete 8%-Straight-Bond besitzt eine Restlaufzeit von 5 Jahren. Der kündbare Bond kann frühestens in 2 Jahren zu pari zurückbezahlt werden und die Bondoptionen verfallen in einem Jahr und der jeweilige Ausübungspreis beträgt 102. Es wurden die Preise von amerikanischen und europäischen Call- und Putoptionen berechnet. Der 8%-Coupon des Straight-Bondes liegt im Bereich der 1 bis 5-Jahres Spotrates (Vgl. Abbildung 7a). Der Preis dieses Bondes liegt deshalb nahe bei seinem Nennwert von 100. Um die Preisbildung der Bondoptionen zu verstehen, muss die erwartete Entwicklung des Bondpreises analysiert werden. Als Anhaltspunkt für die erwartete Entwicklung des Bondpreises wurde dessen erwarteter Wert zum Verfallzeitpunkt der Optionen  $E_{\pi}[P_S]$  ebenfalls in Tabelle 2 eingetragen.[34] Die erwartete Entwicklung der Bondpreise wird durch zwei Effekte bestimmt. Einerseits tendiert der Preis jedes Couponbondes mit abnehmender Restlaufzeit gegen seinen Nennwert. Aufgrund dieses Effekte sollte deshalb der in einem Jahr erwartete Preis des 8%-Straight-Bondes kleiner sein als der heutige Preis von 101.24. Andererseits enthält die heute beobachtete Fristenstruktur der Spotrates (Vgl. Abbildung

7a) Informationen bezüglich der in der Zukunft erwarteten Spotrates und damit auch bezüglich des erwarteten Bondpreises. Die fallende Fristenstruktur im Beispiel impliziert tiefere Spotrates in der Zukunft und damit einen höheren erwarteten Bondpreis. Im ersten Beispiel dominiert scheinbar der zweite Effekt und deshalb ist der in einem Jahr erwartete Bondpreis (102.13) höher als der heutige Preis von 101.24. Wird ein steigender Bondpreis erwartet, so lohnt sich die vorzeitige Ausübung der amerikanischen Putoption weshalb auch deren Preis beträchtlich höher ist als derjenige der europäischen Putoption. Die Wahrscheinlichkeit der vorzeitigen Ausübung der amerikanischen Calloption ist viel geringer und deshalb ist auch deren Preisunterschied im Vergleich zur europäischen Calloption kleiner. Da in der Zukunft tiefere Spotrates erwartet werden, lohnt sich aus heutiger Sicht eine vorzeitige Rückzahlung des kündbaren Bondes in zwei Jahren oder später. Deshalb ist der Preis des kündbaren 8%-Bondes (98.4) beträchtlich tiefer als derjenige des 8%-Straight-Bondes (101.24). Das zweite Beispiel illustriert einen aufgrund des kleinen Coupons von 5% deutlich unter pari gehandelten Bond mit 10 Jahren Restlaufzeit. Der in zwei Jahren erwartete Bondpreis (86.59) liegt aufgrund der geringeren Restlaufzeit zu diesem Zeitpunkt und der fallenden Fristenstruktur deutlich über dem heutigen Preis (82.57). Die amerikanische Putoption wird deshalb sofort ausgeübt und deren Preis (3.43) ist gleich der Differenz zwischen deren Ausübungspreis (86) und dem heutigen Bondpreis (82.57). Der Preis der europäischen Putoption (0.66) ist viel kleiner und liegt unter dem inneren Wert der Option (3.43). Obwohl die europäische Putoption im Moment stark "in-the-money" liegt, ist deren Preis somit relativ gering. Das aus der Analyse von Aktienoptionen bekannte Konzept der Aufspaltung des Optionspreises in einen inneren Wert und einen Zeitwert macht also bezüglich des heutigen Bondpreises keinen Sinn. Sinnvoller ist die Berechnung des inneren Wertes und des Zeitwertes bezüglich des zum Verfallzeitpunkt erwarteten Bondpreises. Für die europäische Call-(Put)-Option ergibt sich dabei ein Wert von 0.63 (0.66)[35]. Da

ein steigender Bondpreis erwartet wird, ist eine vorzeitige Ausübung der amerikanischen Calloption sehr unwahrscheinlich, weshalb auch deren Preis (1.34) nur unwesentlich über demjenigen der europäischen Calloption (1.22) liegt. Eine vorzeitige Rückzahlung des kündbaren Bondes zu pari ist ebenfalls sehr unwahrscheinlich und deshalb liegt auch der Preis des kündbaren Bondes (82.45) nur geringfügig unter demjenigen des 5%-Straight-Bondes (82.57).

Der 10%-Straight-Bond mit 10 Jahren Restlaufzeit im dritten Beispiel wird deutlich über pari gehandelt. Der zum Verfallzeitpunkt der Optionen (1.5 Jahre) erwartete Bondpreis (116.56) liegt trotzdem nur unwesentlich unter dem heutigen Preis (116.63). Die oben beschriebenen zwei Effekte bezüglich des erwarteten Bondpreises scheinen sich fast gegenseitig aufzuheben. In 1.5 Jahren ist zwar die Restlaufzeit geringer, die aufgrund der heutigen Fristenstruktur in diesem Zeitpunkt erwarteten Spotrates sind jedoch ebenfalls tiefer. Trägt man dieser Tatsache Rechnung, so sind die in Tabelle 2 eingetragenen Optionspreise wiederum realistisch. Der Preis der amerikanischen Calloption (3.77) ist relativ hoch und die Preisdifferenz im Vergleich zur europäischen Calloption (2.70) deutet auf eine hohe Wahrscheinlichkeit einer vorzeitigen Ausübung hin. Obwohl die amerikanische Calloption im Moment einen hohen inneren Wert von 2.63 (116.63-114) aufweist, wird sie trotzdem nicht sofort ausgeübt ( $C_A > P - X$ ). Der optimale Ausübungszeitpunkt wird deshalb irgendwann zwischen heute und dem Verfallzeitpunkt in 1.5 Jahren liegen und das Recht, die Option zwischen diesen zwei Zeitpunkten auszuüben, hat scheinbar einen relativ hohen Wert. Für eine Erklärung dieser Beobachtung muss der erwartete Bondpreis vor Verfall der Option in 1.5 Jahren analysiert werden. Es zeigt sich, dass dieser Erwartungswert zuerst steigt, nach 9 Monaten ein Maximum von 116.93 erreicht und dann wieder auf 116.56 bei Verfall der Option sinkt. Eine Ausübung der amerikanischen Calloption lohnt sich deshalb trotz dem hohen inneren Wert heute noch nicht. Dieses Beispiel zeigt wiederum, wie wichtig die Kenntnis des erwarteten Bondpreises für das Ver-

ständnis der Preise von Bondoptionen ist. Der in einem Jahr kündbare 10%-Bond wird mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit in einem Jahr zurückbezahlt. Der Preis eines 10%-Couponbonds mit einem Jahr Restlaufzeit beträgt 101.09 und ist somit geringfügig höher als derjenige des kündbaren Bonds (100.53). Unter welchen Umständen ist jedoch eine Rückzahlung zu 100 bei einem in einem Jahr erwarteten Bondpreis von 116.88 nicht bereits in einem Jahr optimal? Eine genauere Analyse zeigt, dass der Bond bei einem momentanen Zinssatz von 8.67% und höher am ersten Kündigungstermin (in einem Jahr) nicht vorzeitig zurückbezahlt wird. Bei einem höheren momentanen Zinssatz lohnt sich eine Rückzahlung erst später, da aufgrund der "mean-reversion" tiefere Zinssätze in der Zukunft erwartet werden und dies mit tieferen Refinanzierungskosten für den Schuldner verbunden ist.

Aus der Analyse von Aktienoptionen ist bekannt, dass der erwartete Aktienkurs respektive die erwartete Aktienrendite nicht in den Optionspreis einfließt. Wieso spielt nun bei Bondoptionen der erwartete Bondpreis eine entscheidende Rolle? Bei Optionen auf Aktien ohne Dividenden ist der bezüglich der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten erwartete Aktienkurs für die Optionspreisbildung irrelevant. Dieser erwartete Aktienkurs ist stets gleich dem mit dem risikolosen Zinssatz aufgezinsten heutigen Aktienkurs. Ferner wird eine amerikanische Calloption auf eine Aktie ohne Dividenden nie vorzeitig ausgeübt und deren Preis ist deshalb gleich demjenigen der entsprechenden europäischen Calloption. Bei Optionen auf Aktien mit Dividenden gelten diese zwei Eigenschaften nicht mehr. Insbesondere wird der optimale Ausübungszeitpunkt für amerikanische Optionen hauptsächlich aufgrund des erwarteten Aktienkurses bestimmt und dieser hängt wiederum von den erwarteten Dividendenzahlungen ab. Optionen auf Couponbonds verhalten sich in vieler Hinsicht wie Optionen auf Aktien mit einer erwarteten kontinuierlichen Dividende[36]. Deshalb spielt auch bei der Preisbildung der Bondoptionen der erwartete Bondpreis eine entscheidende Rolle[37].

## 5.2 Sensitivität der Optionspreise bezüglich dem "mean-reversion"-Parameter $\kappa$ und der Volatilität $\sigma$ des momentanen Zinssatzes

In diesem Abschnitt wird eine komparativ-statische Analyse bezüglich der zwei im HULL/WHITE-Modell exogen zu spezifizierender Parameter  $\kappa$  und  $\sigma$  durchgeführt. In Abbildung 8a sind die Preise der 4 Optionen aus dem ersten Beispiel in Tabelle 2 für unterschiedliche Werte des Parameters  $\kappa$  bei konstantem  $\sigma = 2.92\%$  illustriert. Bei der numerischen Berechnung der Preise im letzten Kapitel wurde die Zeitdifferenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knoten im Trinomialbaum gleich  $\Delta t = 1/48$  Jahre gesetzt. Deshalb machen Werte für  $\kappa$  über 48 keinen Sinn, da sie ein erwartetes Überschreiten des momentanen Zinssatz über das "mean-reversion"-Niveau in jeder Zeitperiode bewirken würden. In Kapitel 3 wurde erwähnt, dass bei der Parameterwahl  $\kappa=0$  das HULL/WHITE-Modell dem HO/LEE-Modell entspricht. Vergleicht man die Preise der 4 Optionen für  $\kappa=0$  mit denjenigen, die aufgrund der Parameterwahl  $\kappa=0.72$  berechnet wurden (Vgl. Tabelle 2), so fallen die relativ hohen Preisunterschiede auf. Eine sorgfältige Wahl des Parameters

$\kappa$  ist deshalb von grosser Bedeutung. Wie aus Abbildung 8a ersichtlich ist, tendiert der Preis der amerikanischen Putoption bei hohem  $\kappa$  gegen ihren momentanen inneren Wert (0.76), d.h. sie wird sofort ausgeübt. Nimmt  $\kappa$  den Wert 48 an, so bedeutet dies, dass der in der nächsten Zeitperiode erwartete kurzfristige Zinssatz stets gleich dem mean-reversion-Niveau  $y(t)$  ist. Der momentane Zinssatz ist somit zu jedem Zeitpunkt gleich einer normalverteilten Zufallsvariable mit Mittelwert  $y(t)$  und Standardabweichung  $\sigma\sqrt{\Delta t}$ . Die Bondpreise in der Zukunft sind deshalb sehr gut prognostizierbar und die amerikanische Putoption wird sofort ausgeübt, da mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit der Bondpreis in jedem zukünftigen Zeitpunkt höher sein wird als der heutige Preis. Der Preis der europäischen Putoption strebt mit zunehmendem  $\kappa$  gegen null, da bei einem hohen  $\kappa$  der Bondpreis bei Verfall mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit höher als der Ausübungspreis von 102 sein wird und damit die Option wertlos verfallen wird. Der Wert der amerikanischen Calloption, strebt mit zunehmendem  $\kappa$  gegen den Wert der europäischen Calloption, weil die amerikanische Calloption mit zunehmender Sicherheit nicht vorzeitig ausgeübt wird. Die

**Tabelle 2: Preise von Couponbonds, kündbaren couponbonds und Bondoptionen**

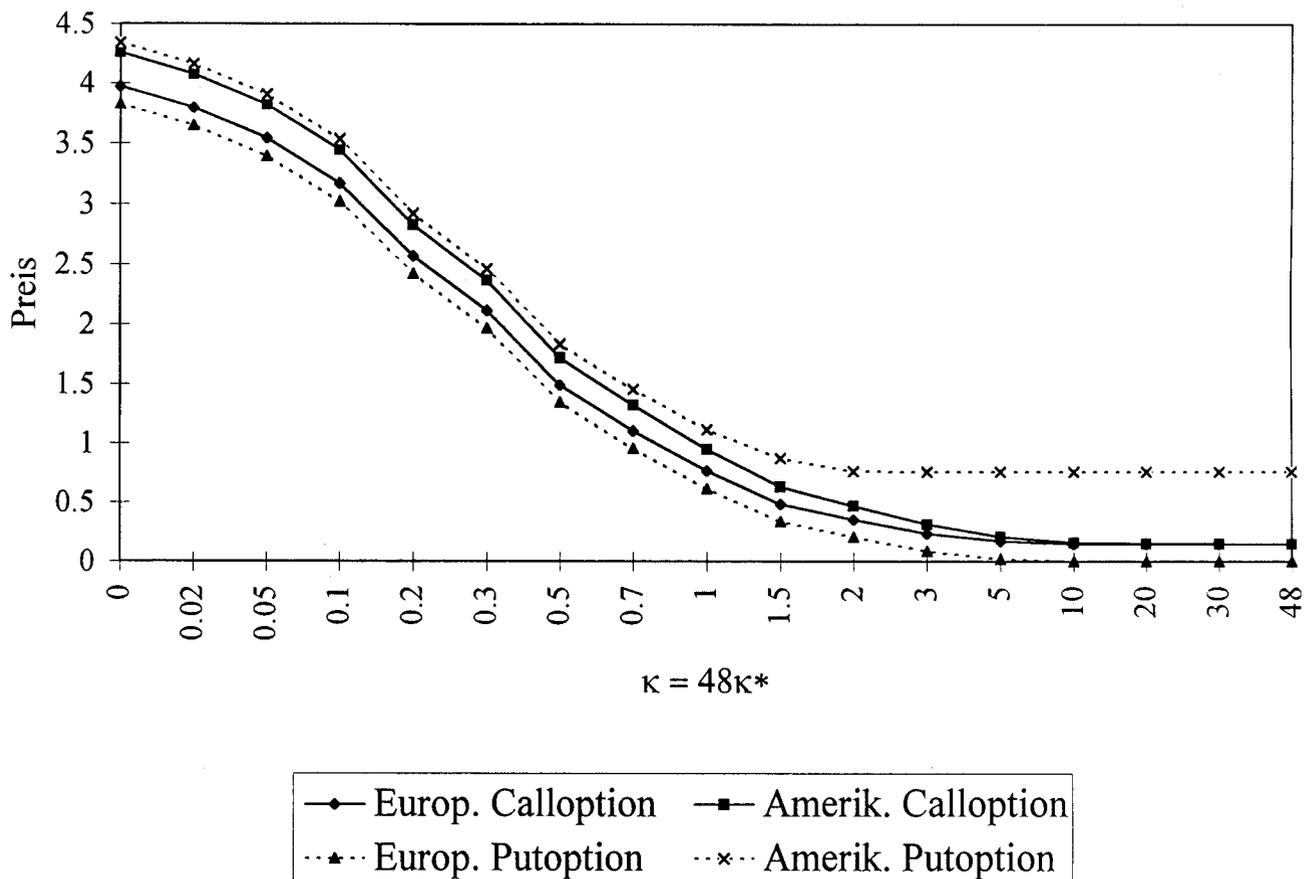
Straight Bond	$P_s$	Optionen	$C_E$	$C_A$	$P_E$	$P_A$	$E_\pi[P_s]$	Kündbarer Bond	$P_K$
T = 5J. C = 8%	101.24	$T_x = 1J.$ $X = 102$	1.08	1.29	0.93	1.43	102.13	$T_y = 2J.$ $Y = 100$	98.40
T = 10J. C = 5%	82.57	$T_x = 2J.$ $X = 86$	1.22	1.34	0.66	3.43	86.59	$T_y = 5J.$ $Y = 100$	82.45
T = 10J. C = 10%	116.63	$T_x = 1.5 J.$ $X = 114$	2.70	3.77	0.39	0.61	116.56	$T_y = 1 J.$ $Y = 100$	100.53

Den Preisberechnungen liegt das HULL/WHITE-Modell mit folgenden Parametern zugrunde:

$\kappa = 0.72$ ,  $\sigma = 2.92\%$ ,  $\Delta t = 1/48$  Jahre,  $\Delta r = \sigma \sqrt{3\Delta t}$ . Ferner wurden die Preise relativ zur beobachteten Fristenstruktur der Spotrates am 12. Juni 1992 berechnet (Vgl. Abbildung 7a). Folgende Bezeichnungen wurden gewählt:

$P_s$ : Preis des Straight-Bondes;  $P_K$ : Preis des kündbaren Bondes;  $C_E$ : Preis des europäischen Calls;  $C_A$ : Preis des amerikanischen Calls;  $P_E$ : Preis des europäischen Puts;  $P_A$ : Preis des amerikanischen Puts;  $X$ : Ausübungspreis der Optionen;  $Y$ : Rückzahlungsbetrag des kündbaren Bonds;  $T_x$ : Verfallzeitpunkt der Optionen;  $T_y$ : Erster Rückzahlungstermin des kündbaren Bonds.

$E_\pi[P_s]$  ist der zum Verfallzeitpunkt der Optionen erwartete Preis des Straight-Bondes.

Abbildung 8a: Preissensitivität bezüglich  $\kappa$ 

Resultate der komparativ statischen Analyse bezüglich der Wahl des Parameters  $\sigma$  bei einem konstanten  $\kappa=0.72$  sind in der Abbildung 8b wiedergegeben. Gilt  $\sigma=0$ , so besteht keine Unsicherheit bezüglich der zukünftigen Zinsentwicklung und die Preise der europäischen Optionen entsprechen dem risikolos abdiskontierten inneren Wert bei Verfall. Ferner wird die amerikanische Putoption sofort ausgeübt und die amerikanische Calloption wird nicht vorzeitig ausgeübt. Wie vermutet steigen die Preise der Optionen bei zunehmender Volatilität des momentanen Zinssatzes und damit mit zunehmender Volatilität der Bondpreise.

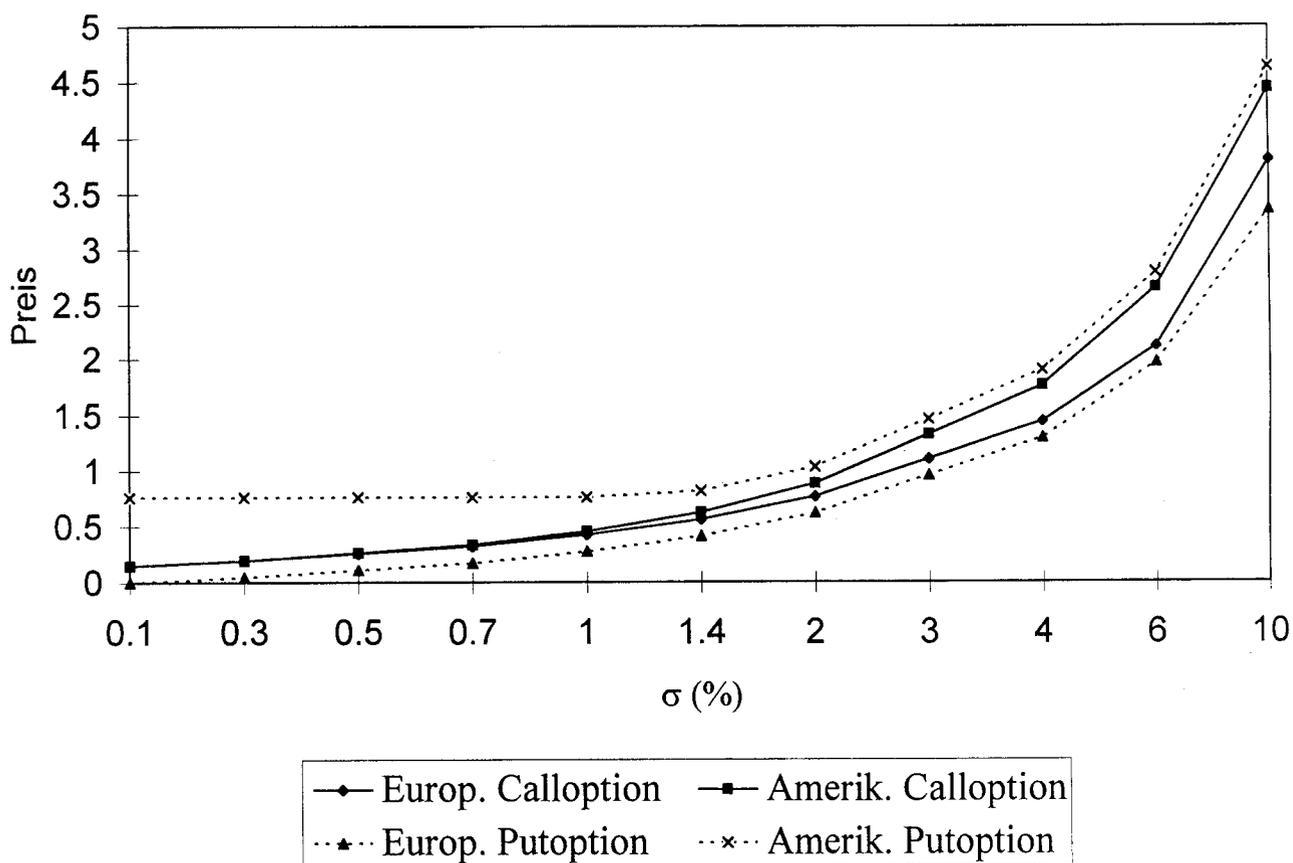
### 5.3 Risikomanagement von Zinsderivaten und Key-Rate-Durations

Das beim Risikomanagement von Portfolios mit Aktienoptionen wohl am häufigsten verwendete Risikomass ist das sogenannte Delta ( $\delta$ ) einer Option. Das Delta einer Option gibt an, wie stark der Preis der Option auf Preisänderungen der der Option zugrundeliegenden Aktie reagiert. Eine Calloption weist z.B. immer ein positives  $\delta$  auf, d.h. der Preis der Calloption steigt bei steigendem Aktienpreis und es gilt[38]:

$$\Delta C \approx \delta \Delta S$$

In diesem Abschnitt wird unter anderem gezeigt, dass das  $\delta$  einer Bondoption nicht eindeutig bestimmt werden kann. Der Preis einer Calloption auf einen Couponbond kann z.B. bei steigendem Bond-

Abbildung 8b: Preissensitivität bezüglich  $\sigma$



preis entweder zunehmen oder abnehmen. Entscheidend ist dabei die Frage, aufgrund welcher Laufzeitsegmente der Fristenstruktur die entsprechende Bondpreisänderung zustande gekommen ist. Sind z.B. die kurzfristigen oder die langfristigen Zinssätze gesunken? Im folgenden soll deshalb untersucht werden, wie die Preise von Optionen auf Couponbonds auf Bewegungen in verschiedenen Laufzeitsegmenten der Fristenstruktur reagieren. Das von HO (1992) entwickelte Konzept der Key-Rate-Durations liefert dabei ein interessantes Analyseinstrument.

### 5.3.1 Key-Rate-Durations

Die MACAULEY-Duration misst die Sensitivität des Bondpreises bezüglich paralleler Bewegungen

der Fristenstruktur. Key-Rate-Durations messen die Sensitivität beliebiger Zinsderivate bezüglich Bewegungen der Fristenstruktur in unterschiedlichen Laufzeitsegmenten. Als erstes werden sogenannte Key-Rates definiert, die im folgenden gleich den bekannten Spotrates (also 1,2,3,6,12 Monate und 2,3,4,5,7,10 Jahre) gesetzt werden (Vgl. Kapitel 4). Die Definition einer Bewegung einer Key-Rate ist aus Abbildung 9 ersichtlich. Die zwei gestrichelten Linien stellen eine 4-Jahres- Key-Rate-Bewegung und eine Bewegung der 5-Jahres-Key-Rate um  $\Delta R_4$  respektive  $\Delta R_5$  dar[39]. Die einzelnen Bewegungen sind so definiert, dass die Summe sämtlicher Bewegungen um denselben Wert  $\Delta R_j$  einer Parallelverschiebung der Fristenstruktur gleichkommt. Durch eine unterschiedliche Wahl der einzelnen  $\Delta R_j$  kann auch eine nicht-parallele Bewegung der Fristenstruktur abgebildet werden.

Key-Rate-Durations können nun in folgender Weise berechnet werden (Vgl. HO (1992), p. 32):

$$KRD_j = - \frac{\frac{V_j^* - V}{V}}{\Delta R_j}$$

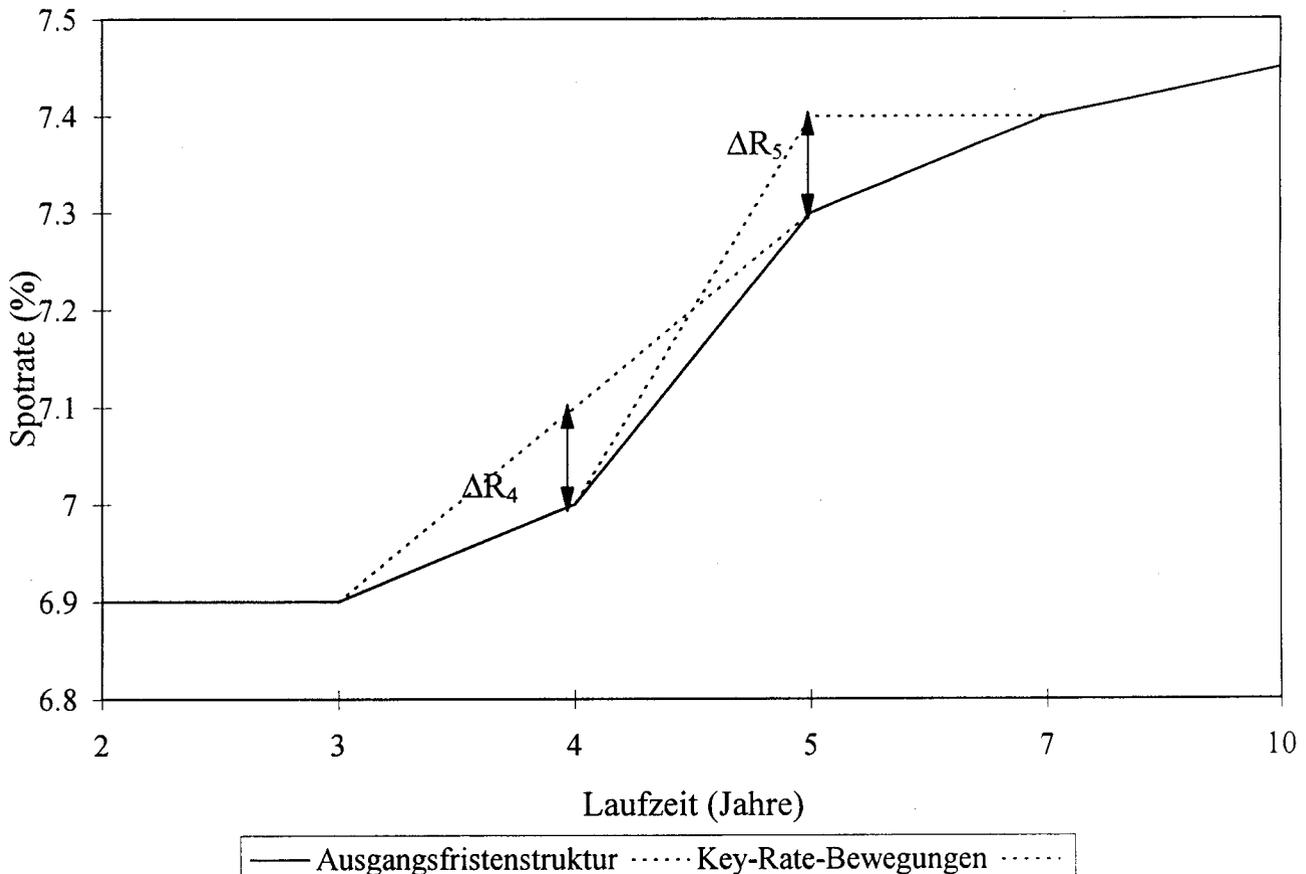
V ist der Preis des jeweiligen Zinsderivates vor und  $V_j^*$  der Preis nach der Bewegung der j-ten Key-Rate um  $\Delta R_j$ . Beide Preise werden anhand des in Kapitel 3 beschriebenen HULL/WHITE-Modelles berechnet.

In Tabelle 3 und den Abbildungen 10a-c sind die Key-Rate-Durations für den Couponbond, den kündbaren Couponbond und die Optionen aus dem ersten Beispiel in Tabelle 2 eingetragen. Die Key-Rate-Durations des Straight-Bondes sind relativ einfach zu interpretieren. Je weiter die Couponzahlungen in

der Zukunft liegen, desto stärker reagiert der Bondpreis auf Bewegungen der entsprechenden Key-Rate und desto grösser ist demnach die entsprechende Key-Rate-Duration. Bei der Analyse der Key-Rate-Durations der Optionen und des kündbaren Bonds müssen verschiedene im folgenden erläuterte Effekte berücksichtigt werden. Als erstes sollen die negativen (positiven) Key-Rate-Durations der Call (Put)-Optionen für Laufzeiten bis und mit einem Jahr erklärt werden. Dazu müssen folgende zwei Effekte berücksichtigt werden:

- Aus der Analyse von Aktienoptionen ist bekannt, dass der Call (Put)-Preis mit zunehmendem Zinssatz steigt (sinkt). Eine Calloption kann z.B. als teilweise fremdfinanzierte Aktienposition aufgefasst werden und deren Preis steigt deshalb mit zunehmendem Zinssatz[40]. Bei Optionen auf Bonds kann prinzipiell genau

Abbildung 9: Definition einer Key-Rate-Bewegung



**Tabelle 3: Key-Rate-Durations**

Key-Rates	P <sub>S</sub>	P <sub>K</sub>	C <sub>E</sub>	C <sub>A</sub>	P <sub>E</sub>	P <sub>A</sub>
1 Monat	0	0	0	-0.105	0	1.809
2 Monate	0	0	0	-0.713	0	1.321
3 Monate	0	0	0	-1.445	0	1.353
6 Monate	0	0	0	-10.873	0	7.153
1 Jahr	0.073	0.075	-43.284	-16.520	51.267	6.904
2 Jahre	0.134	1.092	8.643	7.306	-4.707	-5.382
3 Jahre	0.188	0.682	9.173	8.352	-9.907	-8.398
4 Jahre	0.234	0.440	11.484	10.452	-12.302	-10.444
5 Jahre	3.692	0.512	198.4	177.2	-177.8	-156.6
Summe	4.321	2.801	184.4	173.7	-153.4	-162.3

Für die Charakteristika des Straight-Bonds, des kündbaren Bonds und der Optionen Vgl. das erste Beispiel in Tabelle 2. Die Key-Rate-Durations wurden anhand folgender Formel numerisch berechnet:

$$KRD_j = - \frac{V_j^* - V}{\Delta R_j} \cdot \frac{V}{V}$$

V ist dabei der Preis des jeweiligen Zinsderivates vor und  $V_j^*$  der Preis nach der Verschiebung der j-ten Key-Rate um  $\Delta R_j = 10$  bp. Die Summe der Key-Rate-Durations ist gleich der Effective Duration und sie widerspiegelt die Sensitivität der Preise der Zinsderivate bezüglich einer parallelen Verschiebung der Fristenstruktur.

derselbe Effekt beobachtet werden. Bei europäischen Optionen ist dabei die Spotrater über die Restlaufzeit der Option relevant und bei amerikanischen Optionen sämtliche Spotrater mit einer Laufzeit kleiner als die Restlaufzeit der Option. Sämtliche Optionen in Tabelle 3 haben eine Restlaufzeit von einem Jahr. Der soeben beschriebene Effekt bewirkt, dass die 1-Jahres-Key-Rate-Duration der europäischen Calloption stark negativ und diejenige der europäischen Putoption stark positiv ist. Somit reagiert der Call (Put)-Preis positiv (negativ) auf eine Bewegung der 1-Jahres-Key-Rate nach oben. Für die amerikanischen Optionen ist dieser Effekt weniger ausgeprägt und tritt bereits bei Key-Rates geringerer Laufzeit auf.

- Im Gegensatz zu Aktienoptionen wird der Preis der einer Bondoption zugrundeliegenden Anlage ebenfalls durch Zinsänderungen direkt beeinflusst. Für die Preisbildung europäischer Bondoptionen ist der Einfluss der Key-Rate-

Bewegungen auf den zum Verfallzeitpunkt der Option erwarteten Bondpreis relevant. Steigt im Beispiel in Tabelle 3 die 1-Jahres-Key-Rate, so nimmt die in einem Jahr erwartete 1,2,3 und 4-Jahres-Spot-Rate ab und deshalb steigt der in einem Jahr erwartete Bondpreis. Dies bewirkt, dass der heutige Preis der Call (Put)-Option steigt (sinkt).

Die negative (positiven) 1-Jahres-Key-Rate-Duration der Call (Put)-Optionen können somit auf zwei Effekte zurückgeführt werden, die in derselben Richtung wirken. Es kann gezeigt werden, dass der erste Effekte vor allem bei langfristigen Optionen und der zweite Effekt vor allem bei kurzfristigen Optionen beobachtet werden kann.

Steigt im Beispiel in Tabelle 3 die 5-Jahres-Key-Rate, so sinkt der erwartete Bondpreis in einem Jahr und deshalb nimmt der heutige Preis der Calloptionen ab und derjenige der Putoptionen zu. Derselbe Effekt gilt in geringerem Ausmass für die 2,3 und 4-

Jahres-Key-Rates. Deshalb sind die 2,3, 4 und 5-Jahres-Key-Rate-Durations der Calls (Puts) positiv (negativ). Im Gegensatz zu Aktienoptionen sind also die Preiseffekte von Zinsänderungen bezüglich Bondoptionen ziemlich komplex. Der Investor muss diese teilweise konkurrierenden Effekte stets im Auge behalten. Wird z.B. eine Senkung der Leitzinsen der Zentralbank erwartet, so kann der Kauf von europäischen Calloptionen trotz korrekter Erwartungen nicht zum erwünschten Gewinn führen. Sinken die kurzfristigen Zinssätze aufgrund der Leitzinssatzsenkung viel stärker als die langfristigen Zinssätze, so kann im Extremfall der Preis des Calls abnehmen.

Die Sensitivität des kündbaren Couponbonds auf parallele Verschiebungen der Fristenstruktur (Summe der Key-Rate-Durations) ist geringer als diejenige des Straight-Bonds. Dies ist darauf zurückzuführen, dass der kündbare Bond mit grosser Wahrscheinlichkeit vorzeitig zurückbezahlt wird. Die von null verschiedene 5-Jahres-Key-Rate-Duration

deutet jedoch auf die Möglichkeit hin, dass der Bond nicht vorzeitig gekündigt wird. Die Preissensitivität bezüglich der 5-Jahres-Key-Rate des kündbaren Bonds ist jedoch ca. 7 mal geringer als diejenige des Straight-Bonds.

Wie die MACAULEY-Duration, so besitzen die Key-Rate-Durations die Eigenschaft, dass die Key-Rate-Durations eines Portfolios gleich der barwertgewichteten Summe der Key-Rate-Durations der einzelnen Anlagen im Portfolio sind[41]. Somit können die Key-Rate-Durations eines Portfolios relativ einfach bestimmt werden. Im folgenden Abschnitt wird das Konzept der MACAULEY-Duration mit demjenigen der Key-Rate-Durations kurz verglichen.

Abbildung 10a :Key-Rate-Durations Straight-Bond und kündbarer Bond

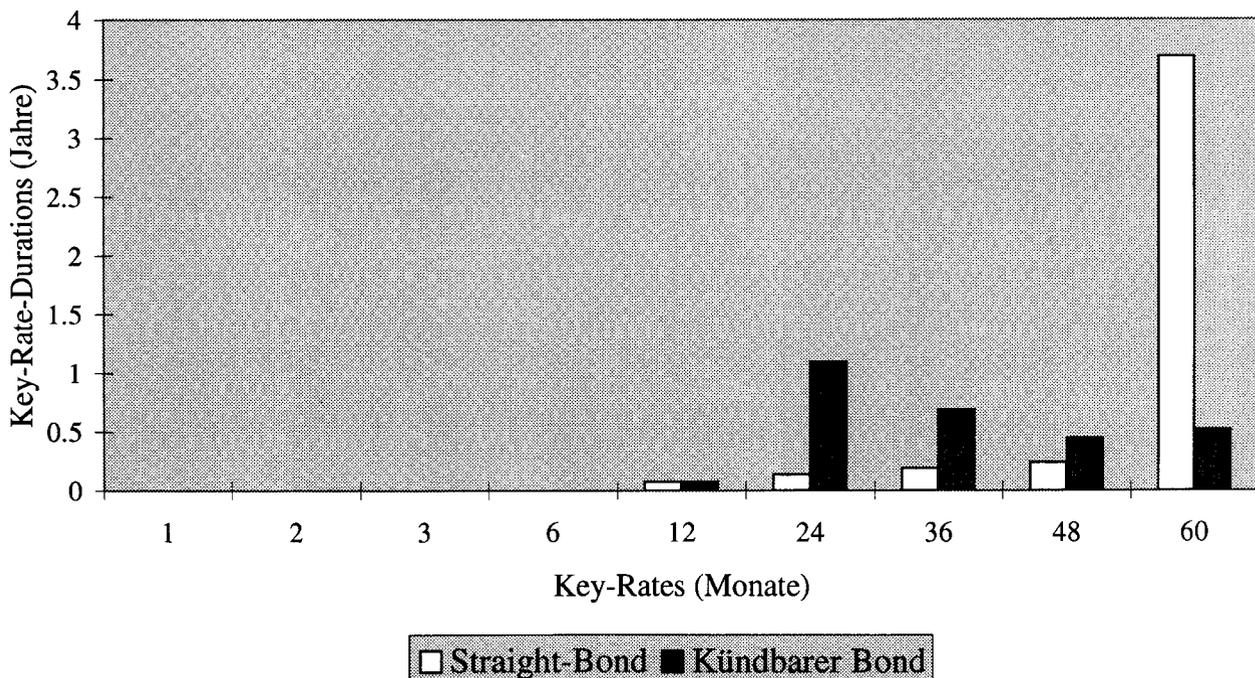


Abbildung 10b: Key-Rate-Durations Calloptionen

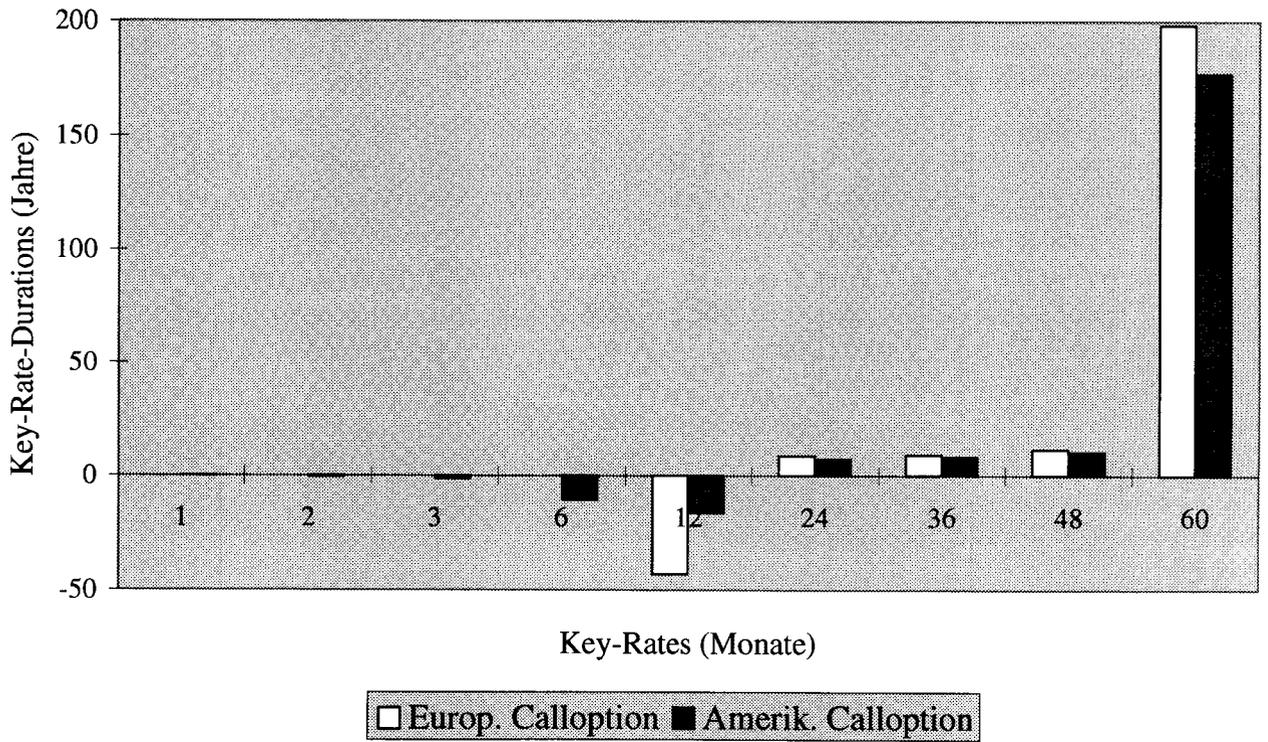
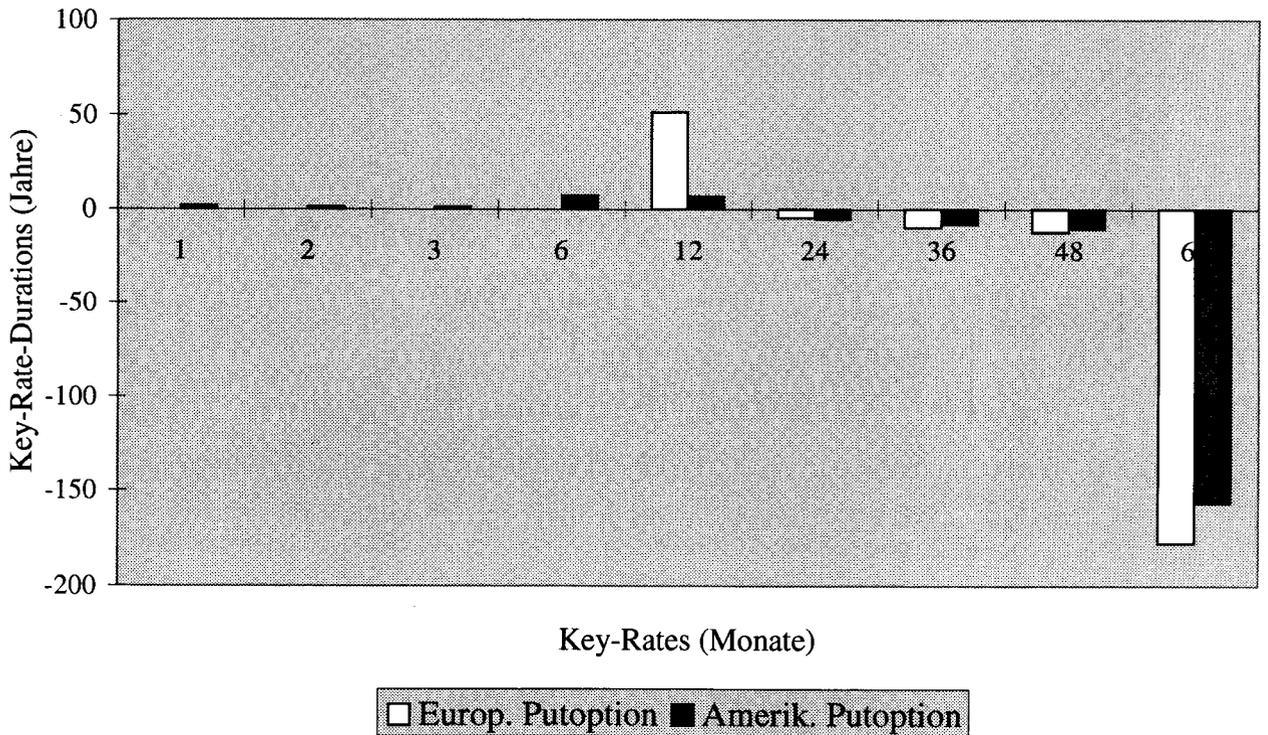


Abbildung 10c: Key-Rate-Durations Putoptionen



### 5.3.2. MACAULEY-Duration versus Key-Rate-Durations

In der Praxis wird oft die MACAULEY-Duration als Mass für das Zinsrisiko eines Portfolios verwendet. Durch den Kauf/Verkauf von Zinsderivaten kann die MACAULEY-Duration eines Portfolios gleich null gesetzt werden, d.h. das Portfolio weist kein Zinsrisiko auf und ist immunisiert. Die Immunisierung ist jedoch nur dann gewährleistet, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

- Flache Fristenstruktur
- Parallele Verschiebungen der Fristenstruktur -
- Kleine Änderung der Zinssätze[42]

Die erste Bedingung ist offensichtlich in den meisten Fällen nicht erfüllt. Wie die Faktoranalysen in BÜHLER/ZIMMERMANN (1994) zeigen, sind parallele Bewegungen der Fristenstruktur in der Schweiz während der letzten 7 Jahre nicht typisch. Somit kann auch ein bezüglich der MACAULEY-Duration perfekt immunisiertes Portfolio noch ein beträchtliches Zinsrisiko aufweisen.

Das Konzept der Key-Rate-Durations setzt weder eine flache Fristenstruktur noch parallele Bewegungen derselben voraus. Anhand der Key-Rates können die verschiedensten Bewegungen der Fristenstruktur modelliert werden[43]. Ist ein Portfolio bezüglich sämtlicher Key-Rate-Durations immunisiert, so kann das Zinsrisiko fast vollständig eliminiert werden[44]. Je mehr Key-Rates verwendet werden, desto besser gelingt die Immunisierung. Werden  $n$  verschiedene Key-Rates eingesetzt, so setzt eine Immunisierung mindestens  $n+1$  verschiedene Zinsderivate im Portfolio voraus. Ferner steigt mit zunehmendem  $n$  auch der entsprechende Rechenaufwand. In Bezug auf die Wahl der Anzahl der Key-Rates besteht also ein Trade-off zwischen der Hedge-Effizienz und den Kosten der Immunisierungsstrategie.

Die bei der Immunisierung bezüglich der MACAULEY-Duration erwähnte Bedingung kleiner Zinsänderungen muss auch bei der Immunisierung bezüglich der Key-Rate-Durations erfüllt sein. Je öfter der entsprechende Hedge angepasst wird, desto

kleiner ist die Problematik. Voraussetzung für eine kostengünstige Implementation einer solchen Strategie ist jedoch die Existenz liquider Zinsderivate. Die Einführung des CONF-Futures und der Optionen auf denselben an der SOFFEX führen sicherlich auch in dieser Beziehung einen Schritt in die richtige Richtung.

## 6. Zusammenfassung

Im vorliegenden Artikel wird das VASICEK (1977)-Einfaktormodell zur Bewertung von zinsderivativen Anlagen und die von HULL/WHITE (1993) vorgeschlagene Verallgemeinerung desselben vorgestellt. Das Modell ist einerseits präferenzfrei und andererseits werden Zinsderivate bezüglich einer vorgegebenen Fristenstruktur der Spotrates bewertet. Es kann gezeigt werden, dass das HO/LEE (1986)-Modell ein Spezialfall dieses Modelles ist. Eine komparativ-statische Analyse zeigt, dass die für das HULL/WHITE-Modell typische mean-reversion des momentanen Zinssatzes einen bedeutenden Einfluss auf die anhand des Modelles berechneten Preise hat. Je ausgeprägter die mean-reversion, desto kleiner sind die Preise der Zinsderivate. Wie bei Aktienoptionen sind die Preise der Zinsderivate eine monoton steigende Funktion der Volatilität des zugrundeliegenden Risikofaktors. Anhand der in Abschnitt 5.1 illustrierten Beispiele zur Bewertung von Bondoptionen und kündbaren Bonds konnte gezeigt werden, dass für die Preisbestimmung derselben insbesondere die erwartete Bondpreisentwicklung im Zeitablauf relevant ist. Die erwartete Bondpreisentwicklung hängt wiederum von der erwarteten Differenz zwischen dem Coupon und dem momentanen Zinssatz und andererseits von der beobachteten Fristenstruktur der Spotrates ab. Es handelt sich dabei nicht um subjektive Erwartungen sondern um diejenigen, welche implizit in der beobachteten Fristenstruktur enthalten sind. Im Rahmen des Risikomanagements von Zinsderivaten muss beachtet werden, dass die Beziehung zwischen Bondpreisänderungen und Optionspreisänderungen nicht wie bei Aktienoptionen

eindeutig bestimmt ist. Soll ein Fixed-Income-Portfolio gegen Zinsrisiken abgesichert werden, so muss es gegenüber allen möglichen Änderungen der Fristenstruktur der Spot-Rates gehedgt werden. Der Ansatz der MACAULEY-Duration ist dabei insbesondere aufgrund der angenommenen parallelen Verschiebung der Fristenstruktur wenig geeignet und es drängt sich ein allgemeineres Konzept wie dasjenige der Key-Rate-Durations auf. Anhand dieses Konzeptes kann z.B. gezeigt werden, dass der Preis einer Calloption auf einen Bond bei steigendem Bondpreis durchaus fallen kann. Solche Preiseffekte können anhand des Key-Rate-Duration-Ansatzes erfasst werden und müssen natürlich beim Risikomanagement berücksichtigt werden.

#### Anhang A: Berechnung des variablen mean-reversion-Niveaus $y(t)$ anhand einer vorgegebenen Fristenstruktur

In Kapitel 3 wurde die Berechnung von  $y(0)$  anhand des in Abschnitt 2.2 eingeführten Beispiels ( $r_0 = 10\%$ ,  $\kappa = 0.2$ ,  $\sigma = 1\%$ ,  $\Delta r = 2\%$  und  $\Delta t = 1$ ) und der vorgegebenen Fristenstruktur ( $s_1 = 10\%$ ,  $s_2 = 10.1\%$ ,  $s_3 = 10.2\%$ ) demonstriert. An dieser Stelle soll die Berechnung von  $y(1)$  anhand desselben Beispiels illustriert werden. Für die Berechnung der  $y(t)$ ,  $t = 1, \dots, T$  müssen jeweils die Zustandspreise  $Q(t, j)$  bestimmt werden.  $Q(t, j)$  ist der heutige Preis einer Anlage, die zum Zeitpunkt  $t$  im Zustand (Knoten)  $j$  einen Wert von 1 und in allen anderen Knoten zum selben Zeitpunkt einen Wert von 0 aufweist. Die Zustandspreise  $Q(1, j)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , werden nun wie folgt berechnet, wobei die Wahrscheinlichkeiten  $\pi_j$  anhand Gleichung (8) mit  $y = y(0)$  berechnet werden (Vgl. auch Abbildung 5):

$$Q(1, j) = \pi_j e^{-r_0}$$

Die Zustandspreise  $Q(1, j)$  sind somit gleich dem Wert des 1-Jahres-Zerobondes multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit  $\pi_j$ . Für  $y(1)$  gilt nun folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} e^{-3s_3} &= Q(1,1)e^{-(r_0+\Delta r)} E\left[e^{-\tilde{r}_2} \mid r_1 = r_0 + \Delta r\right] \\ &+ Q(1,2)e^{-r_0} E\left[e^{-\tilde{r}_2} \mid r_1 = r_0\right] \\ &+ Q(1,3)e^{-(r_0-\Delta r)} E\left[e^{-\tilde{r}_2} \mid r_1 = r_0 - \Delta r\right] \end{aligned}$$

Auf der linken Seite der Gleichung steht der Wert eines 3-Jahres-Zerobonds. Dieser Wert ist in einer risikoneutralen Welt gleich dem erwarteten Produkt der Preise der entsprechenden 1-Jahres-Zerobonds. Die rechte Seite der obigen Gleichung stellt dieses erwartete Produkt dar. Wird für die Erwartungswerte eingesetzt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} e^{-3s_3} &= Q(1,1)e^{-(r_0+\Delta r)} e^{-(r_0+\Delta r+\kappa|y(1)-r_0-\Delta r|-\frac{1}{2}\sigma^2)} \\ &+ Q(1,2)e^{-r_0} e^{-(r_0+\kappa|y(1)-r_0|-\frac{1}{2}\sigma^2)} \\ &+ Q(1,3)e^{-(r_0-\Delta r)} e^{-(r_0-\Delta r+\kappa|y(1)-r_0+\Delta r|-\frac{1}{2}\sigma^2)} \end{aligned}$$

Diese Gleichung nach  $y(1)$  aufgelöst führt zu:

$$y(1) = r_0 + \frac{3s_3 - 2r_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 + \log \bar{Q}}{\kappa} = 11.26\%$$

Wobei:

$$\bar{Q} = Q(1,1)e^{\Delta r(\kappa-2)} + Q(1,2) + Q(1,3)e^{\Delta r(2-\kappa)}$$

Anhand dieses Wertes können nun die neuen Wahrscheinlichkeiten im Trinomialbaum zum Zeitpunkt 1 anhand Formel (9) bestimmt werden und somit auch die Werte  $Q(2, j)$ ,  $j = 1, \dots, 5$ . Es gilt zu beachten, dass z.B. der Knoten  $Q(2,3)$  von allen 3 verschiedenen Knoten zum Zeitpunkt 1 erreicht werden kann. In Abbildung 5 und 6 ist die Bewertung eines 3-Jahres-Zero-Bonds und einer europäischen Calloption mit Ausübungspreis  $X = 90$  und Verfall in 2 Jahren graphisch illustriert[45].

## Anhang B: Das HO/LEE-Modell als Spezialfall des HULL/WHITE-Modelles

Das HO/LEE-Modell impliziert in stetiger Zeit für den momentanen Zinssatz folgenden Random-Walk mit zeitabhängigem Drift  $\mu(t)$  [46] (HULL (1993), p. 403):

$$dr = \mu(t)dt + \sigma dz$$

Dieser Prozess ist jedoch ein Spezialfall des ORNSTEIN-UHLENBECK-Prozesses (6):

$$dr = \kappa[y(t) - r]dt + \sigma dz$$

$$= \kappa \left[ \theta(t) - \frac{\lambda(t)\sigma}{\kappa} - r \right] dt + \sigma dz$$

$$= [\kappa\theta(t) - \lambda(t)\sigma - \kappa r]dt + \sigma dz$$

Für  $\kappa=0$  gilt nun:

$$\begin{aligned} dr &= -\lambda(t)\sigma dt + \sigma dz \\ &= \mu(t)dt + \sigma dz \end{aligned}$$

Das HO/LEE -Modell ist somit ein Spezialfall des HULL/WHITE-Modelles mit  $\kappa = 0$ .

## Fussnoten

- [1] Vgl. dazu die SOFFEX-Broschüre "SOFFEX-Produkte im Zinsbereich".
- [2] Eine risikolose Anlage ist ein Wertpapier, welches über einen vorgegebenen Zeithorizont eine zum voraus bekannte vom jeweiligen realisierten Umweltzustand unabhängige Rendite aufweist. Depositen oder Geldmarktanlagen werden oft als risikolose Anlagen aufgefasst.
- [3] Für eine ausführlichere Darstellung des geometrischen Wiener-Prozesses vgl. z.B. RITCHKEN (1987), pp. 118 ff..
- [4] Für diesen Prozess gilt ferner:  $dz \sim N(0, dt)$
- [5] Für eine ausführliche Herleitung der BLACK/SCHOLES-Formel anhand des Arbitrageprinzipes wird auf die entsprechenden Kapitel in COX/RUBINSTEIN (1985), GIBSON (1991), HULL (1993) oder RITCHKEN (1987) verwiesen.
- [6] Der momentane Zinssatz wird dabei als der Zinssatz über eine unendlich kleine Zeitperiode  $dt$  definiert.
- [7] Ito's Lemma besagt, dass wenn  $x$  ein sogenannter Ito-Prozess  $dx(t) = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dz$  und  $F(x,t)$  eine Funktion von  $x$  und  $t$  ist, so gilt die folgende stochastische Differentialgleichung (Vgl. Arnold (1973), pp. 101ff.):

$$\begin{aligned} dF(x, t) &= \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} dx(t) + \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial x^2} \sigma^2(x, t) dt. \end{aligned}$$

- [8] Die exakten Werte für die Momentanrenditen und deren Standardabweichungen müssen dabei nicht bekannt sein. Für die folgende Arbitrageüberlegung muss nur vorausgesetzt werden, dass diese Werte für die beiden Zerobonds existieren.
- [9] Ein Marktpreis des Risikos von null bedeutet, dass die Marktteilnehmer keine Risikoprämie für risikobehaftete Anlagen verlangen und dies ist nur möglich, wenn die Marktteilnehmer risikoneutral sind.
- [10] Wird der "risikoneutrale" Prozess (6) als  $dr = [\kappa(\theta-r) + \lambda\sigma]dt + \sigma dz$  notiert, so erkennt man, dass dem ursprünglichen ORNSTEIN-UHLENBECK-Prozess (2) zusätzlich ein Drift-Term  $\lambda\sigma dt$  überlagert wird.
- [11] Der heutige Preis  $V_0$  eines Zinsderivates, welches nur zum Zeitpunkt  $T$  einen Cash-Flow von  $C_T$  abwirft, ist zum Beispiel

$$V_0 = E \left[ e^{-\int_0^T r(t)dt} C_T \right]$$

(Vgl. DUFFIE (1992), p. 131 oder HEATH/JARROW/MORTON (1990), p. 438).  $r(t)$  ist dabei der "risikoneutrale" ORNSTEIN-UHLENBECK-Prozess (6) und der Erwartungswert wird bezüglich den aufgrund dieses Prozesses "generierten" Wahrscheinlichkeiten gebildet. Es muss beachtet werden, dass im Gegensatz zur Bewertung von Aktienoptionen der erste Term nicht aus dem Erwartungswert herausgenommen werden kann und sich der Preis als der risikolos abdiskontierte Erwartungswert ergibt. Ferner besteht für viele Zinsderivate eine Korrelation zwischen den zwei Termen im Erwartungswert. Aus diesen zwei Gründen ist die Bewertung von Zinsderivaten viel komplexer als diejenige von Aktienoptionen und für den Preis  $V_0$  der meisten Zinsderivate kann keine analytische Lösung gefunden werden.

- [12] Der Preis  $P_0(T)$  des Zerobondes ist gleich dem in Fussnote 11 erwähnten Erwartungswert

$$P_0(T) = E \left[ e^{-\int_0^T r(t) dt} \right]$$

da  $C_T = 1$  gilt.

- [13] Vgl. dazu HULL/WHITE (1990b)  
 [14] CHAN/KAROLIY/LONGSTAFF/SANDERS (1992) implementieren einen sogenannten General Method of Moments (GMM)-Schätzer. Dieser Schätzer wird wegen seiner Robustheit gegenüber nicht-normalverteilter Prozessresiduen einem Maximum-Likelihood-Schätzer vorgezogen. Eine ausführliche Beschreibung der GMM-Schätztechnik findet sich im zitierten Artikel.  
 [15] Die geschätzten Parameterwerte  $\theta$  und  $\gamma$  sind unabhängig vom Zeitintervall  $\Delta t$ .  
 [16] Gemäss PERSON/SUN (1988) ist dieser Wert gleich

$$\frac{\log(0.5)}{\kappa^*}$$

[17]

$$6.49 = 8.5 - \frac{8.5 - 4.48}{2}$$

- [18] Das GMM-Kriterium misst die "Abweichung" zwischen den Momentschätzungen mit und ohne die entsprechenden Restriktionen. Es ist  $\chi^2(n)$ -Verteilt, wobei  $n$  die Anzahl Restriktionen angibt.  
 [19] Vgl. z.B. BERENDES/BÜHLER (1993) oder das erweiterte HO/LEE-Modell in BÜHLER/SCHULZE (1992).  
 [20] Diese Erweiterung des VASICEK-Modelles um einen variablen Parameter  $y(t)$  wird im folgenden als HULL/WHITE-Modell bezeichnet.

- [21]  $s_t$  bezeichnet dabei die am Markt beobachteten (oder anhand von Bondpreisen berechneten) Spotrates über  $t$  Jahre.

- [22] Der Wert eines 1-Jahres-Zerobondes  $P_0(1)$  im Trinomialbaum ist gleich

$$\pi_1 e^{-r_0} + \pi_2 e^{-r_0} + \pi_3 e^{-r_0} = e^{-r_0}$$

und damit unabhängig von den gewählten Wahrscheinlichkeiten und damit auch unabhängig von  $y(0)$ .

- [23] Der Term  $\frac{1}{2}\sigma^2$  tritt in der Gleichung aufgrund folgender Beziehung auf:

$$E(e^x) = e^{E(x) + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

für eine normalverteilte Zufallsvariable  $x$  mit Standardabweichung  $\sigma$ .

- [24]  $\kappa$  und  $\sigma$  werden in Gleichung 11 als konstant vorausgesetzt.

- [25] Vgl. dazu AMES (1977), f. 45.

- [26] Vgl. dazu HULL/WHITE (1990b), pp. 92ff.

- [27] Vgl. dazu HULL/WHITE (1993), pp. 240ff.

- [28] Vgl. dazu HULL/WHITE (1993), p. 250.

- [29] Am einfachsten wird dabei die vorgegebene Fristenstruktur so lange parallel verschoben, bis der Markt- und der Modellpreis des entsprechenden Bondes übereinstimmen.

- [30] Für eine ausführlichere Darstellung der für den schweizerischen Bondmarkt spezifischen Problematik illiquider Preise und der Berechnung der implizit in Swapsätzen enthaltenen Spotrates wird auf LEITHNER (1992), pp. 94ff. verwiesen.

- [31] Für die Parameter  $\sigma$  und  $\kappa$  wurden dabei die geschätzten annualisierten Werte  $\kappa = 0.060 \cdot 12 = 0.72$  und  $\sigma = 0.843\% \cdot \sqrt{12} = 2.92\%$  unter der Restriktion  $\gamma = 0$  verwendet (Vgl. Abschnitt 2.3).

- [32] Für jedes Zeitintervall zwischen zwei bekannten Spotrates wurde eine kubische Funktion bestimmt, die folgende Bedingungen erfüllt: Erstens müssen die jeweiligen Endpunkte der Funktion gleich den jeweiligen anhand der Euro- und Swapsätze berechneten Spotrates sein und zweitens werden die ersten und zweiten Ableitungen zweier benachbarter Funktionen gleichgesetzt. Insgesamt müssen somit 44 Parameter (11 kubische Funktionen mit je 4 Parametern) bestimmt werden, wobei die beschriebenen Bedingungen 42 Restriktionen setzen. Das Absolutglied der ersten und letzten Funktion wurde nun so bestimmt, dass die Summe der quadrierten ersten Differenzen der aus den jeweiligen Spotrates berechneten Forwardrates minimal wird. Dies soll garantieren, dass die Forwardrates möglichst geringe Schwankungen im Zeitablauf aufweisen und damit möglichst kleine Schwankungen von  $y(t)$  implizieren.

- [33] Zur Bewertung von kündbaren Bonds vgl. JAMSHIDIAN/ZHU (1988).

- [34] Der Erwartungswert wurde dabei bezüglich den in Kapitel 2 besprochenen "risikoneutralen" Wahrschein-

- lichkeiten  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  und  $\pi_3$  gebildet.
- [35] Der bezüglich des zum Verfallzeitpunkt erwarteten Bondpreises ermittelte Zeitwert der europäischen Calloption ist gleich dem Preis der Option (1.22) minus dem bei Verfall erwarteten inneren Wert (86.59-86 = 0.59). Der bei Verfall der europäischen Putoption erwartete innere Wert ist gleich null und deshalb ist deren heutiger Preis (0.66) gleich dem Zeitwert.
- [36] Diese erwartete kontinuierliche Dividende ist bei Couponbonds gleich dem Coupon minus dem erwarteten momentanen Zinssatz. Der erwartete momentane Zinssatz hängt wiederum von den Parametern des ORNSTEIN-UHLENBECK-Prozesses sowie der heute beobachteten Fristenstruktur ab.
- [37] Die Couponzahlungen sind jedoch in der Regel beträchtlich höher als die Dividendenzahlungen und deshalb sind auch die entsprechenden Auswirkungen auf die Preisbildung der Bondoptionen viel ausgeprägter.
- [38] Da das  $\delta$  eine Funktion der Restlaufzeit der Option und des Aktienpreises  $S$  ist, gilt diese Beziehung nur für unendlich kleine Zeitintervall  $\Delta t$  und unendlich kleine Änderungen des Aktienpreises  $\Delta S$ .
- [39] Für eine formale Definition der Key-Rate-Bewegungen Vgl. HO (1992), pp. 31f..
- [40] Das eine Calloption dynamisch replizierende Portfolio besteht aus einer Long-Position aus Aktien und einer Short-Position aus Zero-Bonds mit einer mit dem Verfall der Option identischen Restlaufzeit. Steigt der Zinssatz, so sinkt der Preis dieser Zero-Bonds und damit steigt der Preis des replizierenden Portfolios. Für eine intuitive Erklärung der Sensitivität von Aktienoptionen bezüglich Zinsänderungen Vgl. RITCHKEN (1987), p. 27.
- [41] Für einen Beweis dieser Eigenschaft der Key-Rate-Durations Vgl. HO (1992), p. 40.
- [42] Die MACAULEY-Duration ist eine lineare Approximation der konvexen Beziehung zwischen Bondpreis und yield.
- [43] Für ein Beispiel zur Effizienz eines Key-Rate-Duration-Hedges bei einer nicht-parallelen Verschiebung der Fristenstruktur vgl. BÜHLER/HIES (1994).
- [44] Natürlich können bei einer endlichen Anzahl Key-Spotrates nicht sämtliche Bewegungen der Fristenstruktur nachvollzogen werden.
- [45] Für eine allgemeine Darstellung der hier an einem Beispiel besprochenen Methode wird auf HULL/WHITE (1993) (Anhang A) verwiesen.
- [46] In stetiger Zeit ist der Drift-Term  $\mu(t)$  durch die "Steigung" der heute beobachteten Fristenstruktur der Forwardrates  $F_t(t)$  und der Volatilität des momentanen Zinssatzes  $\sigma$  bestimmt:  $\mu(t) = F_t(t) + \sigma^2 t$ . Diese Beziehung folgt direkt aus Gleichung (29) in HEATH/JARROW/MORTON (1992), p. 90.

## Literaturverzeichnis

- AMES, W.F. (1977): "Numerical Methods for Partial Differential Equations", New York: Academic Press.
- BERENDES, M. und W. BÜHLER (1993): "Analyse der Preisunterschiede von Zinsforward und Zinsfuture", Arbeitsbericht 93-2, Lehrstuhl für Finanzierung, Universität Mannheim.
- BRENNAN, M.J. and E.S. SCHWARTZ (1979): "A Continuous-Time Approach to the Pricing of Bonds", Journal of Banking and Finance 3, pp. 135-155.
- BÜHLER, A. und M. HIES (1994): "Key Rate Duration: Ein neues Instrument zur Messung des Zinsänderungsrisikos", Die Bank 2/95.
- BÜHLER, A. and H. ZIMMERMANN (1994): "Factors Affecting the Term Structure of Interest Rates: Switzerland and Germany", Working Paper, Schweizerisches Institut für Banken und Finanzen (s/bf), Hochschule St. Gallen.
- BÜHLER, W. and M. SCHULZE (1992): "Valuation of Callable Bonds. An Empirical Study of the German Market", Lehrstuhl für Finanzierung, Universität Mannheim.
- CHAN, K.C., A. KAROLYI, F.A. LONGSTAFF and A.B. SANDERS (1992): "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate", Journal of Finance 47, pp.1209- 1227.
- COX, J.C., J.E. INGERSOLL and S.A. ROSS (1985): "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", Econometrica 53, pp. 385-407.
- DUFFIE, D. (1992): "Dynamic Asset Pricing Theory", Princeton University Press.
- GIBSON, R. (1991): "Option Valuation: Analysing and Pricing Standardized Option Contracts", McGraw-Hill.
- HEATH, D., R. JARROW and A. MORTON (1990): "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation", Journal of Financial and Quantitative Analysis 25/4, pp. 419 - 440.
- HEATH, D., R. JARROW and A. MORTON (1992): "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation", Econometrica 60, pp. 77-105.
- HO, T.S.Y. and S. LEE (1986): "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", Journal of Finance 41, pp. 1011-1029.
- HO, T.S.Y. (1992): "Key Rate Durations: Measures of Interest Rate Risks. Journal of Fixed Income", pp. 29-44.
- HULL, J. (1993): "Options, Futures, and Other Derivative Securities", Englewood Cliffs.
- HULL, J., A. WHITE (1990a): "Pricing Interest-Rate-Derivative Securities", Review of Financial Studies 3/4, pp. 573-592.
- HULL, J. and A. WHITE (1990b): "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method", Journal of Financial and Quantitative Analysis 25/1, pp. 87-100.

HULL, J., A. WHITE (1993): "One-Factor Interest-Rate Models and the Valuation of Interest-Rate Derivative Securities", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 28/2, pp. 235-254.

JAMSHDIAN, F. and Y. ZHU (1988): "Analysis of Bonds with Imbedded Options", in: Fabozzi, F.J., *Advances in Futures and Options Research* 3, pp. 63-95.

LEITHNER, S. (1992): "Valuation and Risk Management of Interest Rate Derivative Securities", Verlag Paul Haupt, Bern.

PERSON, N.D. and T.-S. SUN (1988): "An Empirical Examination of the Cox, Ingersoll, Ross Model of the Term Structure of Interest Rates Using the Method of Maximum Likelihood", Working Paper, University of Rochester, Rochester, NY.

RITCHKEN, P. (1987): "Options: Theory, Strategy, and Applications", Harper Collins.

SOFFEX (1994): "SOFFEX-Produkte im Zinsbereich".

VASICEK, O. (1977): "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics* 5, pp. 177-188.