Zeitveränderliche Volatilität in der Optionsbewertung - Ein Vergleich von Black/Scholes und GARCH Preisen

1. Einleitung

Die Standardversion des Black/Scholes (BS) Modells zur Bewertung von Europäischen Optionen (Calls und Puts) beruht - unter anderem - auf der vereinfachenden Annahme, dass die Volatilität der Aktienrenditen im Zeitablauf konstant ist. Seit der Einführung von GARCH Modellen durch ENGLE (1982) und BOLLERSLEV (1986) existiert ein neuer Ansatz zur Modellierung stochastischer Volatilität. Die Abkürzung GARCH steht für "generalized autoregressive conditional heteroskedasticy" und beschreibt den Sachverhalt, dass mit diesen Modellen die Veränderung der Volatilität im Zeitablauf beschrieben werden kann. Diese Möglichkeit wirft die Frage auf, ob bzw. inwieweit es notwendig und sinnvoll ist, diesen Umstand bei der Optionsbewertung zu berücksichtigen.

Dieser Beitrag hat zwei Ziele: Erstens eine Darstellung der Grundlagen von GARCH Modellen und zweitens ein Vergleich von BS Callpreisen mit jenen, die auf Basis von geschätzten GARCH Modellen österreichischer Aktien ermittelt werden.

Das Ergebnis dieser Untersuchung sei bereits vorweggenommen: Die Berücksichtigung der GARCH Modelle bei der Optionsbewertung zeigt, dass vor allem für weit out-of-the-money Calls und geringe Volatilitätsniveaus ein deutlich höherer Callpreis resultiert, als nach der BS Bewertung.

Die Arbeit ist folgendermassen aufgebaut. In Abschnitt 2 werden GARCH Modelle und deren Charakteristika beschrieben. In Abschnitt 3 wird die Problematik bei der Optionsbewertung mit GARCH Modellen erläutert. Empirische Analysen mit GARCH Modellen anhand von Aktien, für die Optionen an der Österreichischen Termin- und Optionsbörse (ÖTOB) gehandelt werden, fassen wir in Abschnitt 4.1 zusammen. Daran anschliessend vergleichen wir GARCH und BS Call Preise und interpretieren die gefundenen Abweichungen (Abschnitt 4.2). Abschnitt 5 fasst die Ergebnisse der Arbeit zusammen.

2. GARCH Modelle

Die Verbreitung von GARCH Modellen im Bereich der (empirischen) Finanzwirtschaft ist sehr rasch erfolgt. BOLLERSLEV/CHOU/KRONER (1992) geben einen ausführlichen Überblick der einschlägigen Literatur. Die Arbeit von ENGLE (1993) enthält eine einfache Einführung in GARCH Modelle. Wir versuchen in diesem Abschnitt einen eher intuitiven Zugang zu GARCH Modellen darzustellen, der nicht auf formalen, statistischen Ableitungen beruht.

Dazu betrachten wir Renditen y_t, die aus Aktienkursen S_t mit Hilfe von

$$y_t = \ln S_t - \ln S_{t-1} \qquad (1)$$

berechnet werden. Die Messung der Volatilität erfolgt über Abweichungen der Renditen vom Mittelwert, sodass wir von folgender Renditenzerlegung ausgehen:

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t, \tag{2}$$

wobei μ_t die erwartete Rendite für den Zeitpunkt t ist und z.B. einem ARMA Zeitreihen-Modell (siehe BOX/JENKINS (1976)) entnommen werden kann.[1] ε_t ist eine Abweichung vom Erwartungswert und kann daher als Überraschung (oder Schock) interpretiert werden.

Für das Verständnis von GARCH Modellen ist es nützlich, zuerst von einem einfachen, in der Praxis häufig angewandten Ansatz zur Volatilitätsbestimmung, dem gleitenden Durchschnittsverfahren, auszugehen: Diesem Ansatz entsprechend wird z.B. die Volatilität jeweils auf Basis der Abweichung der Renditen vom Mittelwert der vergangenen hundert Tage bestimmt und jede Woche so adaptiert, dass die letzten fünf Werte weggelassen und die aktuellsten fünf Werte hinzugenommen werden:

Erste Woche

$$V_1 = \frac{1}{100}\sum_{t=1}^{100}(y_t - \bar{y}_1)^2$$

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{100}\sum_{t=1}^{100} y_t \tag{3}$$

Zweite Woche

$$V_2 = \frac{1}{100}\sum_{t=6}^{105}(y_t - \bar{y}_2)^2$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{100}\sum_{t=6}^{105} y_t \tag{4}$$

oder allgemein für die k-te Woche:

$$V_k = \frac{1}{100}\sum_{t=i}^{i+100-1}(y_t - \bar{y}_k)^2$$

$$i = 5(k-1)+1 \tag{5}$$

Zwei Elemente dieser Volatilitätsberechnung seien hervorgehoben:

1. die Notwendigkeit zur Festlegung der Länge des Zeitausschnittes;
2. jede Abweichung der Renditen vom Erwartungswert im Ausschnitt wird mit demselben Faktor 1/100 (oder $1/n$ wenn die Ausschnittslänge n beträgt) gewichtet.[2]

GARCH Modelle beruhen zwar auf einer ähnlichen Vorschrift zur Berechnung der Volatilität, haben aber den grossen Vorteil, dass weder die Ausschnittslänge noch die Gewichtung vorgegeben werden müssen. Ausserdem resultiert eine monoton abfallende Gewichtung. Wenn ein GARCH Modell aus historischen Daten geschätzt wird, kann aus den Parameterwerten auf die Form der abfallenden Gewichtung geschlossen werden.[3]

Wir beschränken uns in der weiteren Darstellung auf GARCH(1,1) Modelle, die sich in vielen internationalen (siehe BOLLERSLEV/CHOU/KRONER (1992)) und auch in österreichischen empirischen Untersuchungen (siehe GEYER (1992)) als adäquat erwiesen haben.

Die Grundgleichung eines GARCH(1,1) Modells [4]

$$\sigma_{t+1}^2 = a_0 + a_1(y_t - \mu_t)^2 + b_1\sigma_t^2.$$

$$= a_0 + a_1\varepsilon_t^2 + b_1\sigma_t^2 \tag{6}$$

hat folgende erklärungsbedürftige Elemente:

1. die Volatilität ändert sich jeden Tag (oder jede Periode). Dies wird durch den Zeitindex t im Symbol σ_t^2 angezeigt.

2. für die Bestimmung der Volatilität für morgen (in t+1) wird die heutige Volatilität (in t) fortgeschrieben. Der aktuelle Wert σ_t^2 wird dabei mit b_1 gewichtet.
3. eine Abweichung gegenüber dem heutigen Wert gibt es vor allem aufgrund von sogenannten "Neuigkeiten": $\varepsilon_t = y_t - \mu_t$.
Das heisst, genauso wie im oben beschriebenen Verfahren wird die Volatilität auf Basis der Abweichung der Renditen vom ε_t, desto grösser ist die Änderung der Volatilität. Der Gewichtungsfaktor a_1 bestimmt das Ausmass der Änderung. Durch die Quadrierung von ε_t ist es jedoch irrelevant, ob positive oder negative Abweichungen von der erwarteten Rendite μ_t. vorliegen. Ausserdem wird erreicht, dass ein Mass für die Varianz resultiert, das stets positiv ist.
4. der Wert a_0 legt fest, dass die tägliche Volatilität um ein durchschnittliches Niveau schwankt, das identisch mit der (unbedingten) Varianz der Renditen σ^2 (ohne Zeitindex) ist:

$$\sigma^2 = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1}. \tag{7}$$

Die Parameter a_0, a_1 und b_1 können aus historischen Daten geschätzt werden. Die Summe $g = a_1 + b_1$ misst die Persistenz der Volatilität und bestimmt die Anzahl vergangener Abweichungen vom Mittelwert, die mit abfallender Gewichtung bei der Bestimmung von σ_{t+1} berücksichtigt werden. Der Fall $g = 1$ wird mit dem Begriff IGARCH (integrierter GARCH; siehe ENGLE/BOLLERSLEV (1986)) bezeichnet. In einigen empirischen Anwendungen wurden Werte $g \geq 1$ ermittelt. Dies ist für finanzwirtschaftliche Modelle insofern problematisch, da in diesem Fall die (unbedingte) Varianz der Renditen - im statistischen Sinn - nicht existiert (siehe Gleichung (7)).[5] Eine endliche Varianz wird jedoch z.B. bei der Optionsbewertung vorausgesetzt.

Die Verbreitung von GARCH Modellen in der empirischen Finanzwirtschaft ist - unter anderem - deshalb rasch erfolgt, weil sie zwei häufig beobachtete Eigenschaften von Aktienrenditen nachbilden können: 1. "volatility clustering" und 2. "Leptokurtosis". Der erste Begriff umschreibt die Tendenz, dass grosse Renditen von weiteren grossen Renditen mit identischen oder umgekehrten (aber nicht prognostizierbaren) Vorzeichen gefolgt werden. Mandelbrot hat dies mit dem vielzitierten Satz "... large changes tend to be followed by large changes - of either sign - and small changes tend to be followed by small changes, ... (MANDELBROT (1963), p. 418)" beschrieben.
Für die Optionsbewertung ist insbesonders die zweite Eigenschaft relevant, die sich auf die Form der Wahrscheinlichkeitsdichte von Aktienrenditen bzw. Aktienkursen bezieht. In zahlreichen empirischen Arbeiten [6] wurde festgestellt, dass die Verteilung von Aktienrenditen stärker um den Mittelwert konzentriert ist und breitere Enden hat als eine Normalverteilung. Das entsprechende statistische Mass für diese Eigenschaft ist die Kurtosis, die für einen Normalverteilung den Wert 3 aufweist, für beobachtete Renditen aber meist deutlich grösser ist.
Die BS Optionsbewertung beruht auf der Annahme einer Normalverteilung für Aktienrenditen. Im nächsten Abschnitt zeigen wir, welche Konsequenzen in der Optionsbewertung damit verbunden sind, wenn diese Annahme aufgegeben wird und stattdessen ein GARCH Modell für Renditen unterstellt wird.

3. Die Optionsbewertung mit GARCH Modellen

Spätestens seit BACHELIER (1900) bedient man sich bei der Bewertung europäischer Optionen des Barwertkonzeptes, demzufolge der Optionswert durch Abdiskontierung der am Verfalltag aus der Option resultierenden Zahlung bestimmt wird.
Das dabei entstehende Problem der korrekten Bestimmung des Diskontierungsfaktors konnte aber erst spät, nämlich durch BLACK/SCHOLES (1973) bzw. COX/ROSS (1976), gelöst werden. Basie-

rend auf dem bahnbrechenden Aufsatz von Black/ Scholes zeigten Cox/Ross, dass arbitragefreie Optionspreise u.a. den Preisen in einer risikoneutralen Ökonomie entsprechen. Folglich kann der Optionswert durch Abdiskontierung der in einer derartigen Ökonomie für den Verfalltag erwarteten Optionszahlung mit dem risikolosen Zins bestimmt werden. Die arbitragetheoretische Fundierung dieses "risikoneutralen" Bewertungsansatzes wurde von Cox/ Ross allerdings nur für eine Black/Scholes Ökonomie gegeben. Wird nun z.B. die Annahme einer im Zeitablauf konstanten Renditenvarianz zugunsten einer GARCH Varianzstruktur aufgegeben, dann fällt diese Fundierung. Um dem Ansatz aber dennoch ein ökonomisches Fundament zu geben, versuchte DUAN (1991), ihn gleichgewichtstheoretisch zu stützen. So konnte er in Theorem 1 (DUAN (1991), p. 10) zeigen, dass der Markt in Form eines Repräsentanten mit zeitadditiver Nutzenfunktion, der den Erwartungsnutzen maximiert, unter den drei folgenden alternativen Bedingungen risikoneutral bewertet:

a) einer Nutzenfunktion mit konstanter relativer Risikoaversion und einer einem GARCH Prozess folgenden logarithmischen Konsumrate;
b) einer Nutzenfunktion mit konstanter absoluter Risikoaversion und einer einem GARCH Prozess folgenden Konsumrate;
c) einer linearen Nutzenfunktion;

Von dieser "risk neutral valuation relationship" ausgehend leitete er in Theorem 2 (DUAN (1991), p. 10) die Invarianz der GARCH Struktur bei der Transformation des Wahrscheinlichkeitsmasses in das risikoneutrale (oder Martingale) Bewertungsmass ab. Mit diesem Bewertungsmass lässt sich die am Verfalltag zu erwartende Optionszahlung berechnen und auch deren - mit dem risikolosen Zins gebildeter - Barwert bestimmen.
Im GARCH Fall kann der Optionspreis allerdings nicht analytisch bestimmt werden, da die Form der Verteilung am Verfalltag nicht in allgemeiner Form angegeben werden kann. Die Verteilung kann jedoch durch Simulation ermittelt werden. Die bedingte Renditenvarianz im Zeitablauf entspricht aufgrund des Theorems 2 von Duan weiterhin der empirischen, nur der bedingte Erwartungswert ist zu modifizieren:

$$\mu_t = r - 0.5\sigma_t, \tag{8}$$

wobei r der risikofreie Zinssatz ist. Wir bestimmen die Aktienkurse am Verfalltag aus

$$\begin{aligned} S_T &= S_0 \exp\left\{\sum_{t=1}^{T}(\mu_t + \varepsilon_t)\right\} \\ &= S_0 \exp\left\{rT - 0.5\sum_{k=1}^{T}\sigma_k^2 + \sum_{k=1}^{T}\varepsilon_k\right\}, \end{aligned} \tag{9}$$

wobei $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$ auf Zufallszahlen beruht, die einem GARCH Prozess mit Varianz σ_t^2 folgen. Der Optionspreis C_0 wird durch Abdiskontierung der simulierten Optionswerte mit r bestimmt:

$$C_0 = \exp\{-rT\}\mathrm{E}\big[\max\{(S_T - X), 0\}\big], \tag{10}$$

wobei E[] für den Durchschnitt der simulierten Preise steht.

4. Empirische Analyse

Die folgende empirische Analyse basiert auf dem von DUAN (1991) abgeleiteten Optionsbewertungsansatz. Sie hat den Zweck, die Konsequenzen der Änderungen der Standardannahmen bei der Optionsbewertung anhand einiger Beispiele zu illustrieren. Wir gehen dazu in zwei Schritten vor: Zuerst schätzen wir GARCH(1,1) Modelle für die Renditen der Basiswerte von fünf an der ÖTOB gehandelte Optionen und zwar CA-Vorzug, EVN, Lenzing, ÖMV und Wienerberger (Abschnitt 4.1). Die Ergebnisse dieser Analyse verwenden wir im zweiten Schritt (Abschnitt 4.2), um mit Hilfe von Simulationen Optionspreise auf Basis der geschätzten GARCH Parameter zu ermitteln und mit BS Preisen zu vergleichen.[7]

4.1 Schätzung von GARCH Modellen

Die täglichen Renditen y_t der fünf Aktien werden gemäss Gleichung (1) berechnet, wobei S_t Schlusskurse sind, die vom Österreichischen Institut für Wirtschaftsforschung (WIFO) stammen. Die Kurse sind um Kapitalmassnahmen, aber nicht um Dividendenzahlungen korrigiert. Für den Fall, dass kein Aktienkurs zur Verfügung steht, werden keinerlei Korrekturen vorgenommen. D.h. die entsprechenden Tage fehlen in den Zeitreihen. Zur Schätzung verwenden wir den Zeitraum 2.1.1989-31.8.1992.

Als Modell zur Bestimmung der erwarteten Rendite μ_t (siehe Gleichung 2) verwenden wir das MA(1) (moving-average erster Ordnung) Modell

$$y_t = m + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{11}$$

mit dessen Hilfe die signifikante Autokorrelation erster Ordnung in den Daten berücksichtigt werden soll. Die Varianz von ε_t wird mit einem GARCH(1,1) Modell der Form (6) bestimmt.

Tabelle 1 enthält die Parameterschätzwerte des GARCH Modells. Die Parameter $\hat{m}$ und $\hat{\theta}_1$ dienen zur Bestimmung der erwarteten Rendite $\mu_t = \hat{m} + \hat{\theta}_1 \varepsilon_{t-1}$. Die Eintragungen in der Tabelle sind so geordnet, dass typische Konstellationen der Parameter $\hat{a}_1$ und $\hat{b}_1$, welche die Dynamik der bedingten Varianz bestimmen, deutlich werden.[8] Für EVN und LEN ist der Parameter $\hat{b}_1$ deutlich grösser als $\hat{a}_1$. Diese Parameterkonstellation findet man in der einschlägigen Literatur sehr häufig (siehe Tabelle 5.6 in GEYER (1992)). In diesem Fall schwingt σ_t^2 nach aussergewöhnlichen Ereignissen (grosse ε_t) typischerweise langsam auf das Ausgangsniveau ab. Wenn $\hat{a}_1$ grösser als $\hat{b}_1$ ist, erfolgt die Rückkehr zum Ausgangsniveau tendenziell rascher (CAV und WIE).

Im Fall der ÖMV sind beide Parameter annähernd gleich gross. Bemerkenswert ist allerdings, dass die Summe von $\hat{a}_1$ und $\hat{b}_1$ grösser als Eins ist. In diesem Fall kann die unbedingte Varianz der Renditen nicht aus Gleichung (7) ermittelt werden. Bereits MANDELBROT (1963) hat eine unendliche (oder nicht existierende) Varianz als charakteristisches Merkmal von Aktienrenditen bezeichnet. Aus einer endlichen Stichprobe resultiert jedoch immer einer endlicher Schätzwert für σ. In Tabelle 1 ist daher in der Spalte $\hat{\sigma}$ für ÖMV der Stichprobenschätzwert angegeben. Für alle anderen Aktien ist $\hat{\sigma}$ aus Gleichung (7) errechnet.

Für die Optionsbewertung mit GARCH Modellen ist dieser Fall insofern problematisch, als diese Parameterkonstellation im Rahmen von Simulationen zu numerischen Problemen aufgrund von explosiven Verläufen von σ_t^2 führt. Für ÖMV werden daher keine GARCH Optionspreise ermittelt.

Tabelle 1: Parameterschätzwerte des MA(1)-GARCH Modells (Gleichungen 11 und 6) für einzelne Aktien

Aktie	$\hat{a}_0^*$	$\hat{a}_1$	$\hat{b}_1$	$\hat{m}^{**}$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\sigma}^{***}$
EVN	0.37	0.06	0.82	-0.01	0.22	0.27
LEN	0.33	0.13	0.78	0.04	0.31	0.31
CAV	2.39	0.36	0.15	-0.29	0.29	0.35
WIE	2.18	0.45	0.14	0.22	0.29	0.36
ÖMV	0.23	0.64	0.56	0.07	0.16	0.33

* geschätzter Parameter multipliziert mit 10^4

** geschätzter Parameter multipliziert mit 250

*** geschätzte Standardabweichung multipliziert mit $\sqrt{250}$

4.2 Gegenüberstellung von GARCH und BS Optionspreisen

Wir verwenden die im vorigen Abschnitt erzielten Schätzergebnisse, um Optionspreise auf Basis von Simulationen zu bestimmen und diese sodann mit BS Preisen zu vergleichen. Die Varianz, die in die BS Formel eingesetzt wird, entspricht dem Wert von $\hat{\sigma}$ in Tabelle 1.

Bei der Simulation wird der Möglichkeit von Verzerrungen durch eine antithetische Strategie begegnet, d.h. jede Zufallszahl ε_t wird zweimal verwendet; einmal mit positivem und einmal mit negativem Vorzeichen. Dadurch werden Asymmetrien in den Ergebnissen verhindert. Ausserdem wird auch ein BS Preis auf Basis derselben Zufallszahlen ermittelt und mit dem theoretischen Wert verglichen. Diese Abweichung wird zur Korrektur des GARCH Preises verwendet (siehe HULL (1989), p. 218).

Die Tabelle 2 enthält BS (C_0^{BS}) und GARCH (C_0) Optionspreise, sowie die prozentuale Abweichung (100 (C_0 - C_0^{BS}/C_0^{BS}) der vier Optionen für verschiedene Verhältnisse S_T/X.

Man erkennt, dass für weit aus dem Geld liegende Optionen ($S_0/X = 0.8$) die GARCH Callpreise grösser als die BS Preise sind, wobei die prozentuelle Abweichung zum Teil beträchtlich ist. Dieser "positive" GARCH Effekt kann durch die Eigenschaften der GARCH Renditenverteilung erklärt werden: Sehr grosse und sehr kleine Renditen haben im Vergleich zur Normalverteilung eine viel grössere Eintrittswahrscheinlichkeit - ein Umstand der auch mit dem bereits oben erwähnten Begriff Leptokurtosis bezeichnet wird. Die Ausübung eines Calls wird dadurch wahrscheinlicher als bei normalverteilten Renditen und treibt den Preis gegenüber BS in die Höhe.

Tabelle 2: BS und GARCH Callpreise sowie prozentuale Abweichung für eine Restlaufzeit von 30 Tagen und S_0 = 100.

		S_0/X 0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
	BS	0.0297	0.6414	3.7300	9.8069	16.7495
EVN	GARCH	0.0363	0.6306	3.6769	9.7920	16.7558
	%-Abw.	22.44	-1.68	-1.42	-0.15	0.037
	BS	0.0824	0.9766	4.2821	10.1420	16.8467
LEN	GARCH	0.1097	0.9173	4.1020	10.0728	16.8600
	%-Abw.	33.07	-6.07	-4.21	-0.68	0.079
	BS	0.1744	1.3566	4.8340	10.5133	16.9878
CAV	GARCH	0.1929	1.2924	4.6908	10.4421	16.9859
	%-Abw.	10.60	-4.73	-2.96	-0.68	-0.012
	BS	0.2041	1.4573	4.9719	10.6107	17.0298
WIE	GARCH	0.2300	1.3442	4.7335	10.4866	17.0193
	%-Abw.	12.67	-7.76	-4.79	-1.17	-0.062

In wenigen Fällen tritt der positive GARCH Effekt auch bei weit in-the-money liegenden Optionen ($S_0/X = 1.2$) und bei geringer Varianz auf (EVN und LEN). Dieses Ergebnis ist vorerst überraschend: Aufgrund der Leptokurtosis der GARCH Verteilung sind auch sehr kleine Kurse wahrscheinlicher als bei der Normalverteilung und es muss eher damit gerechnet werden, dass die Option bis zum Verfalltag out-of-the-money ist und somit verfällt. Dies sollte sich in einem niedrigeren GARCH Optionspreis niederschlagen. Allerdings ist auch zu berücksichtigen, dass die Verteilung von S_T nicht symmetrisch bezüglich S_0 ist. Dies ist ein Resultat der Standardannahme einer Lognormalverteilung der Kurse, die auch in Gleichung (1) zum Ausdruck kommt. Dadurch werden die besonders grossen Kurse am rechten Ende der Verteilung bei der Berechnung des Erwartungswertes höher gewichtet und können den negativen Effekt am linken Ende überkompensieren. Für den resultierenden Preis ist entscheidend, welcher Effekt überwiegt. Wie die Beispiele in Tabelle 2 zeigen, hängt der Nettoeffekt und die resultierende Abweichung gegenüber BS von der Varianz und der Dynamik des GARCH Prozesses (Parameter a_1 und b_1) ab.

Bei weniger weit in oder out-of-the-money bzw. bei at-the-money Calls liegt der GARCH Preis unter dem BS Preis. Diesen Umstand erklären wir erneut mit der Leptokurtosis der GARCH Renditenverteilung im Vergleich zur Normalverteilung: Bei der Erwartungswertbildung schlägt sich nun insbesondere der Bereich der Dichtefunktion um die beiden Wendepunkte nieder, in dem die leptokurtische Verteilung weniger Masse als die Normalverteilung aufweist. Der daraus resultierende geringere Erwartungswert des GARCH Callpreises erklärt die negative Abweichung vom BS Preis.

5. Zusammenfassung

Die Arbeit hatte das Ziel, GARCH Modelle für die Bewertung von Calls einzusetzen und die sich daraus ergebenden Preise mit den Black/Scholes Preisen zu vergleichen. Anhand von empirisch ermittelten Parametern und der auf DUAN (1991) zurückgehenden Transformation des bedingten Renditenerwartungswertes erhalten wir folgendes Ergebnis: für weit out-of-the-money Calls und geringe Volatilitätsniveaus resultiert ein im Vergleich zum BS Preis deutlich höherer Callpreis. Dieses Ergebnis stimmt mit dem Befund von RUBINSTEIN (1985) überein, demzufolge kurzlaufende out-of-the-money Calls signifikant höher als nach BS bewertet werden. Das vorgestellte Optionsbewertungsmodell kann daher auch zur Erklärung dieses Befundes herangezogen werden.

Fussnoten

[1] μ_t wird auch als bedingter Erwartungswert von y_t bezeichnet.

[2] Weiter sei angemerkt, dass mit diesem Ansatz die Varianz überschätzt (unterschätzt) wird, wenn y_t positiv (negativ) autokorreliert ist.

[3] Aus der Arbeit von LAMOUREUX/LASTRAPES (1992) für eine Stichprobe von dreissig US Aktien kann z.B. auf eine Ausschnittslänge von etwa 65 Tagen geschlossen werden.

[4] Ein GARCH (p,q) Modell hat die Form:

$$\sigma_{t+1}^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{q} a_i \varepsilon_{t-i+1}^2 + \sum_{i=1}^{p} b_i \sigma_{t-i+1}^2$$

[5] Bereits MANDELBROT (1963) hat dies als charakteristisches Merkmal von Aktienrenditen bezeichnet.

[6] Einen aktuellen Überblick gibt die Arbeit von TUCKER (1992).

[7] Vergleiche mit Marktpreisen der fünf Optionen können wir aufgrund mangelnder Daten nicht durchführen.

[8] Der GARCH Parameter $\hat{a}_1$ für EVN ist statistisch nicht signifikant. Aus Symmetriegründen wurde der Parameter dennoch beibehalten.

Literatur

BACHELIER, L. (1900): "Théorie de la spéculation", Annales de l'Ecole Normale Supérieure, Ser.3, 17, 21-86.

BLACK, F. and M. SCHOLES (1973): "The pricing of options and corporate liabilities", Journal of Political Economy 81, pp. 637-654.

BOLLERSLEV, T. (1986): "Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity", Journal of Econometrics 31, pp. 307-327.

BOLLERSLEV, T., R.Y. Chou and K.F. Kroner (1992): "ARCH modeling in finance", Journal of Econometrics 52, pp. 5-59.

BOX, G.E.P. and G.M. JENKINS (1976): "Time Series Analysis Forecasting and Control", revised edition, Holden-Day, San Francisco.

COX, J.C. and S.A. Ross (1976): "The valuation of options for alternative stochastic processes", Journal of Financial Economics 3, pp. 145-166.

DUAN, J.C. (1991): "The GARCH option pricing model", Proceedings, European Finance Association, 18th Annual Meeting, August 29-31, Rotterdam.

ENGLE, R.F. (1982): "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation", Econometrica 50, No. 4, pp. 987-1007.

ENGLE, R.F. AND T. BOLLERSLEV (1986): "Modelling the persistence of conditional variances", Econometric Reviews 5, pp. 1-50.

ENGLE, R.F (1993): "Statistical models for financial volatility", Financial Analysts Journal 50, January/February, 72-78.

GEYER, A.L.J. (1992): "Information, Erwartung und Risiko - Aspekte der Verteilung, Abhängigkeit und Varianz von finanzwirtschaftlichen Zeitreihen", V. Florentz, München.

HULL, J. (1989): "Options, Futures and other Derivative Securities", Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ.

LAMOUREUX, C.G. and W.D. LASTRAPES (1990): "Persistence in variance, structural change and the GARCH model", Journal of Business and Economic Statistics 8, pp. 225-234.

MANDELBROT, B. (1963): "The variation of certain speculative prices", Journal of Business 36, pp. 394-419.

RUBINSTEIN, M. (1985): "Nonparametric tests of alternative option pricing models using all reported trades and quotes on the 30 most active CBOE option classes from August 23, 1976 through August 31, 1978", Journal of Finance 40, pp. 455-480.

TUCKER, A.L. (1992): "A reexamination of finite- and infinite-variance distributions as models of daily stock returns", Journal of Business and Economic Statistics 10, pp. 73-81.