MATTHIAS DENZLER*

Aus der Praxis: Die Duration kündbarer Obligationen

1. Einleitung

Im Artikel "Aus der Praxis: Die Duration kündbarer Obligationen" (Finanzmarkt und Portfolio Management, 1993, Nr. 1) hat St. JAEGER die Auswirkungen von vorzeitigen Rückzahlungsmöglichkeiten auf die Duration von Obligationen analysiert. Bei der Herleitung wurden zwei Vereinfachungen gemacht, auf die nicht speziell hingewiesen wurde; diese führen jedoch dazu, dass v.a. für Obligationen, die mit grosser Wahrscheinlichkeit vorzeitig zurückbezahlt werden, zu tiefe Durations resultieren. In diesem Artikel werden die Vereinfachungen aufgehoben und die entsprechenden Resultate anhand eines Beispiels illustriert.

Der Aufsatz ist wie folgt gegliedert. In Abschnitt 2 wird versucht, eine intuitive Vorstellung über die Duration kündbarer Obligationen zu vermitteln. In Abschnitt 3 wird der Modellansatz vorgestellt, auf dessen Basis in den folgenden Abschnitten 4 und 5 Formeln für die Duration-Berechnung von Call-Optionen und von kündbaren Obligationen hergeleitet werden. Die Formel für die Duration kündbarer Obligationen wird in Abschnitt 6 analysiert, und in Abschnitt 7 werden die Resultate graphisch dargestellt.

* Der Autor dankt Martin Janssen, Beat Keller, Vera Kupper, Cornelia Poignant-Eng und einem anonymen Gutachter für die wertvollen Hinweise.

2. Intuition

Es ist hilfreich, sich zu überlegen, in welchem Bereich sich die Duration einer kündbaren Obligation überhaupt bewegen kann. Dazu werden zwei Extremfälle betrachtet, nämlich einerseits eine Obligation, die mit sehr grosser Wahrscheinlichkeit *nicht gekündigt* wird, und andererseits eine Obligation, die mit sehr grosser Wahrscheinlichkeit *gekündigt* wird.

Falls der Preis einer ansonsten identischen, unkündbaren Obligation ("bullet bond") sehr tief ist, lohnt sich eine vorzeitige Rückzahlung für den Emittenten nicht. Die Option, als die das Kündigungsrecht aufgefasst werden kann, ist stark "out-of-the-money" und spielt für die Duration der Obligation praktisch keine Rolle. Folglich muss die Duration des "callable bond" ungefähr der Duration des "bullet bond" entsprechen.

Falls jedoch der Preis der unkündbaren Obligation sehr hoch ist, kann davon ausgegangen werden, dass die Obligation gekündigt wird; die Option ist stark "in-the-money". Wichtiger ist jedoch die Überlegung, dass in diesem Fall die kündbare Obligation einer unkündbaren Obligation entspricht, die zum Zeitpunkt der vorzeitigen Rückzahlung zum entsprechenden Rückzahlungspreis zurückbezahlt wird. Ist also beispielsweise eine Obligation mit einer Restlaufzeit von 5 Jahren in 3 Jahren rückzahlbar und kann mit grosser Sicherheit davon ausgegangen werden, dass dies auch geschehen

wird, hat man es praktisch mit einem "bullet bond" mit einer Restlaufzeit von 3 Jahren zu tun. Folglich muss die Duration des "callable bond" ungefähr der Duration des "bullet bond" mit der kürzeren Restlaufzeit entsprechen; bei einer Kündigungsmöglichkeit in 3 Jahren und einem Coupon von einigen Prozenten also etwas weniger als 3 Jahre.
Liegt kein derartiger Extremfall vor, ist also die Option weder sehr stark "in-the-money" noch sehr stark "out-of-the-money", muss die Duration irgendwo dazwischen liegen, d.h. zwischen der Duration der unkündbaren Obligation mit der längeren Restlaufzeit und der Duration der unkündbaren Obligation mit der kürzeren Restlaufzeit. Diese Tatsache wird im folgenden näher beleuchtet.

3. Modellansatz

Es wird der gleiche Modellansatz verwendet wie in JAEGER (1993). Der Einfachheit halber wird jedoch anstelle der jährlichen Zinsverrechnung mit kontinuierlicher Zinsverrechnung gearbeitet, was jedoch die Resultate nicht beeinflusst.[1] Der Preis der unkündbaren Obligation ist:

$$B = CF_1 \cdot e^{-t_1 r} + \ldots + CF_n \cdot e^{-t_n r} \tag{1}$$

mit:

- B Preis der Obligation
- r Zinssatz (Rendite)
- CF_i i-ter Cash-Flow
- t_i Zeitpunkt des i-ten Cash-Flows, gemessen in Jahren vom aktuellen Zeitpunkt aus

Für die Duration D_B erhält man:

$$D_B = \frac{t_1 \cdot CF_1 \cdot e^{-t_1 r} + \ldots + t_n \cdot CF_n \cdot e^{-t_n r}}{B} \tag{2}$$

Die Duration kann einerseits als mittlere Zeit in Jahren bis zum Eintreffen der Cash-Flows (Zinszahlung und Rückzahlung) verstanden werden. Gleichzeitig ist sie ein Mass für die Zinssensitivität, denn es gilt:

$$D_B = -\frac{dB}{dr} \cdot \frac{1}{B} \tag{3}$$

Bei der Verwendung des Duration-Konzeptes wird vereinfachend unterstellt, dass es für die betreffende Obligation nur *einen* relevanten Zinssatz gibt. Es wird somit von einer flachen Zinsstruktur ausgegangen, die sich parallel verschieben kann.
Das Kündigungsrecht kann als Call-Option des Schuldners auf die unkündbare Obligation interpretiert werden. Der Rückzahlungspreis, der auch mehr als 100% betragen und damit eine Prämie enthalten kann, entspricht dem Basispreis (Strike) der Option. Es wird folgende Notation verwendet:

- X Rückzahlungspreis (Basispreis der Option)
- t_m Zeitpunkt der vorzeitigen Rückzahlung (fällt mit dem m-ten Zinstermin zusammen)
- C Wert der Call-Option

4. Die Duration der Call-Option

Bei der Berechnung der Zinssensitivität der Call-Option werden gegenüber JAEGER (1993) zwei Aspekte zusätzlich berücksichtigt. Erstens reagiert der Callpreis nicht nur indirekt über die Preisänderung der Obligation (Wert des Basisinstrumentes) auf eine Zinssatzänderung, sondern auch direkt - so wie beispielsweise auch eine Aktienoption auf den Zinssatz reagiert -, d.h. über die Diskontierung des Basispreises.[2]
Zweitens muss berücksichtigt werden, dass bei einer Option auf eine Obligation wegen der Zinszahlungen ähnlich wie bei einer Option auf eine dividendenzahlende Aktie vorgegangen werden muss. Während bei der Aktienoption die Aktie (resp. der Aktienkurs) abzüglich der diskontierten Dividenden während der Laufzeit der Option das "Underlying" bildet, müssen entsprechend bei einer Option auf eine Obligation die Zinszahlungen während der Laufzeit der Option (die ersten m Zinszahlungen) in Abzug gebracht werden. Im folgenden wird der Wert der ersten m Zinszahlun-

gen mit B_m bezeichnet, während B_n der Wert der Obligation ohne die ersten m Zinszahlungen ist, d.h. ohne die Zinszahlungen bis zum Kündigungstermin. Es gilt somit:

$$B = B_m + B_n$$

$$B_m = CF_1 \cdot e^{-t_1 r} + \ldots + CF_m \cdot e^{-t_m r} \tag{4}$$

$$B_n = CF_{m+1} \cdot e^{-t_{m+1} r} + \ldots + CF_n \cdot e^{-t_n r}$$

Basisinstrument der Option ist, gemäss den obigen Ausführungen, B_n. Der Wert der Option ist eine (je nach Modell möglicherweise komplizierte) Funktion der bekannten Einflussgrössen (mit σ als Mass für die Volatilität):

$$C = C\left(B_n(r), X, t_m, r, \sigma\right) \tag{5}$$

Die Sensitivität der Call-Option gegenüber Zinssatzänderungen lässt sich schreiben als:

$$\frac{dC}{dr} = \frac{\partial C}{\partial B_n} \cdot \frac{\partial B_n}{\partial r} + \frac{\partial C}{\partial r} \tag{6}$$

Für die Duration des Calls erhält man:

$$\begin{aligned} D_C &\equiv -\frac{dC}{dr} \cdot \frac{1}{C} \\ &= -\frac{\partial C}{\partial B_n} \cdot \frac{\partial B_n}{\partial r} \cdot \frac{1}{C} - \frac{\partial C}{\partial r} \cdot \frac{1}{C} \\ &= \Delta \cdot D_{Bn} \cdot \frac{B_n}{C} - \frac{\partial C}{\partial r} \cdot \frac{1}{C} \end{aligned} \tag{7}$$

Dabei entspricht Δ dem Optionsdelta (im Sinne der partiellen Ableitung des Optionswertes nach dem Wert des Basisinstrumentes) und D_{Bn} der Duration von B_n:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial B_n}$$

$$D_{Bn} = -\frac{\partial B_n}{\partial r} \cdot \frac{1}{B_n}$$

5. Die Duration der kündbaren Obligation

Der Preis der kündbaren Obligation, BC, setzt sich zusammen aus dem Preis der unkündbaren Obligation und dem Preis der (geschriebenen) Call-Option:

$$BC = B - C \tag{8}$$

Die Zinssensitivität, d.h. die Ableitung nach dem Zinssatz, hängt von den Zinssensitivitäten von B und C ab,

$$\frac{dBC}{dr} = \frac{dB}{dr} - \frac{dC}{dr} \tag{9}$$

und die Duration lässt sich darstellen als:

$$\begin{aligned} D_{BC} &= -\left(\frac{dBC}{dr} \cdot \frac{1}{BC}\right) \\ &= -\left(\frac{dB}{dr} \cdot \frac{1}{BC} - \frac{dC}{dr} \cdot \frac{1}{BC}\right) \\ &= -\frac{dB_m}{dr} \cdot \frac{1}{BC} - \frac{dB_n}{dr} \cdot \frac{1}{BC} + \frac{dC}{dr} \cdot \frac{1}{BC} \end{aligned} \tag{10}$$

Die Duration eines Portefeuilles, in unserem Fall der kündbaren Obligation, kann auch als gewichtetes Mittel der Durations der Bestandteile geschrieben werden. Auch die Duration der unkündbaren Obligation lässt sich auf diese Weise in die Duration ihrer Bestandteile B_m und B_n zerlegen:

$$\begin{aligned} D_{BC} &= D_B \cdot \frac{B}{BC} + D_C \cdot \frac{-C}{BC} \\ &= D_{Bm} \cdot \frac{B_m}{BC} + D_{Bn} \cdot \frac{B_n}{BC} - \Delta \cdot D_{Bn} \cdot \frac{B_n}{BC} + \frac{\partial C}{\partial r} \cdot \frac{1}{BC} \\ &= D_{Bm} \cdot \frac{B_m}{BC} + (1 - \Delta) D_{Bn} \cdot \frac{B_n}{BC} + \frac{\partial C}{\partial r} \cdot \frac{1}{BC} \end{aligned} \tag{11}$$

Diese Darstellung ist v.a. nützlich, wenn mit einem konkreten Optionenbewertungsmodell gearbeitet wird.

6. Analyse der Duration der kündbaren Obligation

6.1 Call-Option "out-of-the-money"

Einer der beiden in Abschnitt 1 beschriebenen Extremfälle ist die sehr *unwahrscheinliche* Kündigung. Die Call-Option ist in diesem Fall nahezu wertlos, und daraus folgt, dass auch die Ableitung von C nach dem Zinssatz, dC/dr, nahe bei null liegt. Aus Gleichung (10) erkennt man, dass somit die Duration der kündbaren Obligation derjenigen der unkündbaren nahekommt.

Die gleiche Schlussfolgerung liefert Gleichung (11), da bei einem sehr kleinen Optionswert auch das Delta und die partielle Ableitung des Optionswertes nach dem Zinssatz, $\partial C/\partial r$, nahe bei null liegen müssen.

6.2 Call-Option "in-the-money"

Die Gleichungen (10) und (11) sind wenig geeignet, um den anderen Extremfall, nämlich den Fall der sehr *wahrscheinlichen* Kündigung, zu analysieren. Eine einfach interpretierbare Gleichung ergibt sich jedoch bei Verwendung der Put-Call-Parität,

$$C = B_n - X \cdot e^{-rt_m} + P \qquad (12)$$

Dabei ist P der Wert der Put-Option mit identischen Bedingungen wie die Call-Option. Dieser Zusammenhang - resp. die entsprechenden Ableitungen nach r - kann in Gleichung (10) eingesetzt werden. Die Duration der kündbaren Obligation kann somit auch wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} D_{BC} &= -\frac{dB_m}{dr}\cdot\frac{1}{BC} - \frac{d\left(X\cdot e^{-rt_m}\right)}{dr}\cdot\frac{1}{BC} + \frac{dP}{dr}\cdot\frac{1}{BC} \\ &= -\left(\frac{dB_m}{dr}\cdot\frac{1}{BC} + \frac{d\left(X\cdot e^{-rt_m}\right)}{dr}\cdot\frac{1}{BC} - \frac{dP}{dr}\cdot\frac{1}{BC}\right) \end{aligned} \qquad (13)$$

Es ist nun zu beachten, dass

$$B_m + X \cdot e^{-rt_m}$$

gerade dem Wert der unkündbaren Obligation mit der kürzeren Laufzeit entspricht, die in Abschnitt 2 erwähnt wurde. Diese besteht aus den Zinszahlungen bis zum Kündigungstermin und aus der Rückzahlung am Kündigungstermin (Rückzahlungspreis X). Gleichung (13) widerspiegelt die Tatsache, dass die kündbare Obligation auch als Portefeuille aus einer unkündbaren Obligation mit kürzerer Restlaufzeit (d.h. die Rückzahlung erfolgt am vorzeitigen Rückzahlungstermin der kündbaren Obligation) und einem geschriebenen Put interpretiert werden kann. Mit dem Put erwirbt sich der Emittent das Recht, die soeben zurückbezahlte Obligation dem Investor sofort wieder zum gleichen Preis zu verkaufen.

Da einem "In-the-money"-Call ein "Out-of-the-money"-Put entspricht und sowohl dessen Wert als auch dessen Zinssensitivität, dP/dr, nahe bei null liegen, folgt aus Gleichung (13), dass die Duration der kündbaren Obligation mit hoher Kündigungswahrscheinlichkeit etwa derjenigen der unkündbaren Obligation mit kürzerer Restlaufzeit entspricht.

6.3 Verwendung des Black-Scholes-Modells

Gleichung (11) kann erst praktisch benützt werden, wenn mit einem Optionenbewertungsmodell Werte für den Callpreis, Delta etc. bestimmt werden. Im folgenden wird das Black-Scholes-Modell verwendet.

Die Anwendung des Black-Scholes-Modells für Optionen auf Obligationen ist mit einigen Problemen verbunden (vgl. z.B. HULL (1993)). Diese beruhen v.a. darauf, dass sich die Standardabweichung des Preises einer Obligation grundsätzlich anders verhält als diejenige einer Aktie.[3] Während bei Aktien die Unsicherheit bezüglich Aktienkurs umso grösser ist, je weiter man in die Zukunft blickt, besteht bei Obligationen die Gewissheit, dass der Preis schliesslich zum Rückzahlungspreis (in der Regel 100%) am Verfalltag konvergiert.

Dies ist als "pull-to-par"-Phänomen bekannt; es führt dazu, dass nicht angenommen werden darf, die Volatilität des Obligationenkurses sei während der Laufzeit der Obligation konstant.
Trotzdem ergeben sich in vielen Fällen für praktische Zwecke genügend exakte Optionswerte, wenn dem "pull-to-par"-Phänomen durch die Wahl eines geeigneten Wertes für die Volatilität Rechnung getragen wird. Der Wert für die Volatilität wird aus der Standardabweichung des Obligationenkurses am Verfalltag der Option, die unter Berücksichtigung des "pull-to-par"-Phänomens bestimmt wird, berechnet und in die Black-Scholes-Formel eingesetzt. Der Wert des Calls gemäss Black-Scholes ist:

$$C = S \cdot N_1 + X \cdot e^{-rt_m} \cdot N_2 \tag{14}$$

mit den allgemein bekannten Ausdrücken für N_1 und N_2. Für Delta und $\partial C / \partial r$ gilt:

$$\begin{aligned} \Delta &= N_1 \\ \frac{\partial C}{\partial r} &= t_m \cdot X \cdot e^{-rt_m} \cdot N_2 \end{aligned} \tag{15}$$

Dies kann in Gleichung (11) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} D_{BC} &= D_{Bm} \cdot \frac{B_m}{BC} + (1 - N_1) D_{Bn} \cdot \frac{B_n}{BC} + \frac{t_m \cdot X \cdot e^{-rt_m} \cdot N_2}{BC} \\ &= D_{Bm} \cdot \frac{B_m}{BC} + (1 - N_1) D_{Bn} \cdot \frac{B_n}{BC} + N_2 \cdot D_X \frac{X \cdot e^{-rt_m}}{BC} \end{aligned} \tag{16}$$

Dabei ist D_X die Duration einer Zahlung in der Höhe von X am Kündigungstermin; sie entspricht trivialerweise gerade t_m. Die in den Unterabschnitten 4.1 und 4.2 gemachten Überlegungen können anhand dieser Gleichung leicht verifiziert werden. Ist der Call "in-the-money", gehen N_1 und N_2 gegen 1; ist der Call "out-of-the-money", gehen N_1 und N_2 gegen 0. Daraus folgen die oben hergeleiteten Aussagen für die Duration der kündbaren Obligation in den beiden Extremfällen.

7. Beispiel

Anhand des schon in JAEGER (1993) verwendeten Beispiels einer kündbaren 5 3/8 % Anleihe können die Auswirkungen der Kündigungsmöglichkeit auf die Eigenschaften der Obligation illustriert werden. Als Optionenbewertungsmodell kommt das Black-Scholes-Modell zum Einsatz.[4]
Die Obligation verfällt am 6.6.1998; sie ist kündbar zu 101% per 6.6.1995. Das aktuelle Datum (Valuta) sei der 15.1.1993. Abbildung 1 zeigt die Duration der unkündbaren Obligation mit Verfall am 6.6.1998 (Bullet 98), die Duration der unkündbaren Obligation mit Verfall am 6.6.1995 und einem Rückzahlungspreis von 101% (Bullet 95) sowie die Duration der kündbaren Obligation (Callable) in Abhängigkeit vom Marktzinssatz. Man erkennt deutlich, dass sich die Duration der kündbaren Obligation zwischen den Durations der beiden unkündbaren Obligationen bewegt und sich bei einem sehr hohen resp. einem sehr tiefen Zinssatz der Duration der entsprechenden unkündbaren Obligationen annähert.
Abbildung 2 zeigt die Preise der drei Obligationen als Funktion des Marktzinssatzes. Die Preise sind Marktpreise ohne Marchzinsen, d.h., vom berechneten Wert der Obligation wurden die Marchzinsen per 15.1.93 subtrahiert. Der Preis der kündbaren Obligation liegt in jedem Fall unter den Preisen der beiden anderen Obligationen, da der Investor eine Option geschrieben hat. Bei einem sehr hohen resp. einem sehr tiefen Zins nähert sich der Preis der kündbaren dem Preis einer der beiden unkündbaren Obligationen an. Die Differenz zwischen dem Preis der unkündbaren Obligation mit Verfall 1998 und der kündbaren Obligation entspricht dem Preis der Call-Option. Die Differenz zwischen dem Preis der unkündbaren Obligation mit Verfall 1995 und der kündbaren Obligation entspricht dem Preis der Put-Option, wenn die kündbare Obligation als Portefeuille aus der unkündbaren Obligation mit Verfall 1995 und einem geschriebenen Put betrachtet wird.

Abbildung 1: Durations der drei Obligationen in Abhängigkeit vom Marktzinssatz

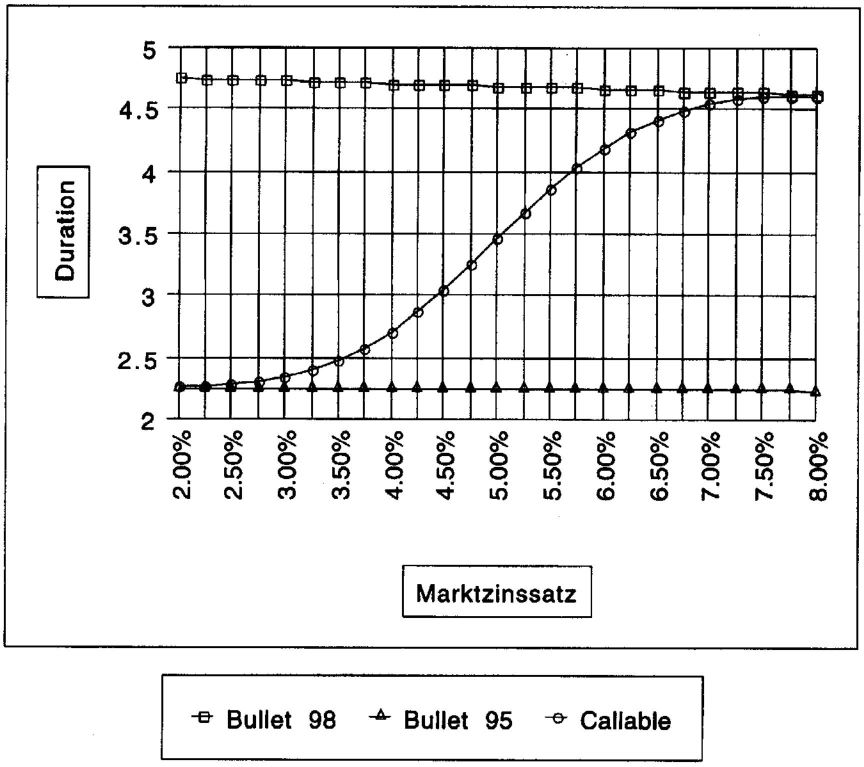
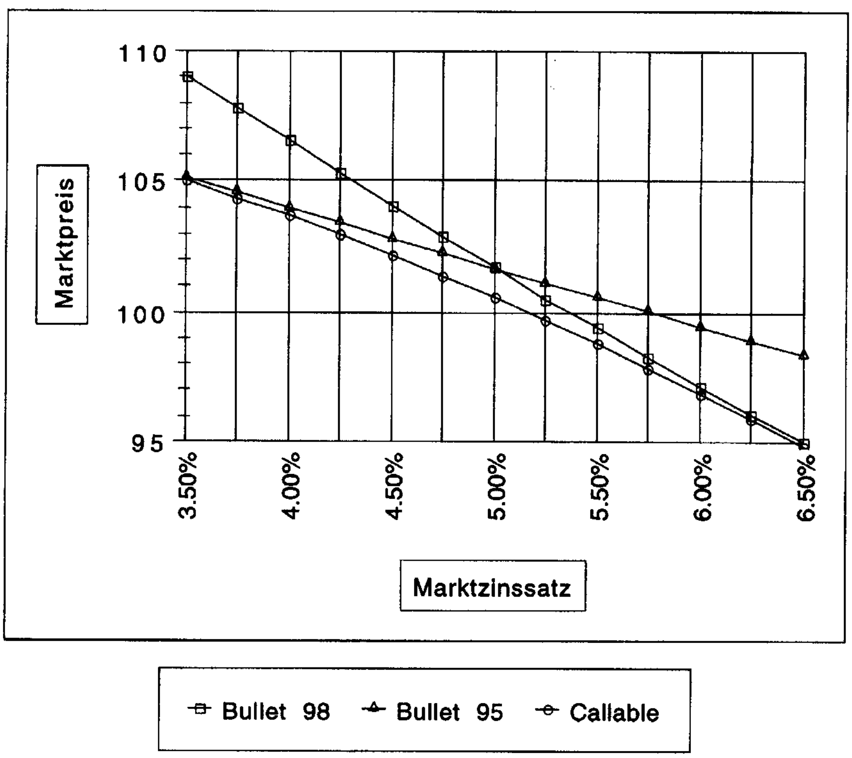


Abbildung 2: Preise der drei Obligationen in Abhängigkeit vom Marktzinssatz



Fussnoten

[1] Die Macaulay Duration ist unabhängig von der Zinsverrechnung. Wird die kontinuierliche Zinsverrechnung verwendet, sind Modified Duration und Macaulay Duration identisch.

[2] Diesen Ansatz verwenden auch BROOKS/ATTINGER (1992).

[3] Weitere Probleme betreffen die Annahme eines konstanten kurzfristigen Zinssatzes im Black-Scholes-Modell sowie die unterstellte Lognormalverteilung der Kurse. Der Einfluss dieser Ungenauigkeiten auf die Optionswerte ist in den meisten Fällen gering.

[4] Es muss ein Wert für die Volatilität vorgeben werden, unter Berücksichtigung der unter 6.3 erwähnten Eigenschaften des Obligationenpreises. In den vorliegenden Berechnungen wurde 2% eingesetzt. Dies entspricht einer Standardabweichung des Zinsniveaus zum Zeitpunkt der vorzeitigen Kündigung (d.h. in etwa 2.5 Jahren) von knapp 2 Prozentpunkten oder einer Standardabweichung der Zinsniveauänderung von etwa 1.2 Prozentpunkten pro Jahr (ohne Berücksichtigung einer allfälligen "mean reversion"-Eigenschaft der Zinssätze).

Literatur

BROOKS, R. and ATTINGER, B. (1992): "Using Duration and Convexity in the Analysis of Callable Convertible Bonds", Financial Analysts Journal 48, July-August, pp. 74-77.

HULL, J. C. (1993): "Options, Futures, and Other Derivative Securities", 2nd edition, Prentice-Hall.

JAEGER, St. (1993): "Aus der Praxis: Die Duration kündbarer Obligationen", Finanzmarkt und Portfolio Management 7, pp. 94-99.