

# Shortfall-Risiko und Zeithorizonteffekte

## 1. Einleitung

Der Mean/Variance-Ansatz von Markowitz führt bei einer gegebenen erwarteten Rendite  $\mu$  zu einer Minimierung der Portfolio-Varianz  $\sigma^2$ . Aus der Menge der Mean/Variance-effizienten Portfolios lässt sich das für den einzelnen Anleger optimale Portfolio bestimmen. Der nutzentheoretische Ansatz stellt dabei das theoretisch am besten fundierte Konzept dar, doch versagen diese Verfahren in der Praxis, da die Bestimmung der individuellen Nutzenfunktion nicht möglich ist. Der Shortfall-Ansatz dagegen gehört zu den praktikabelsten Methoden für die Bestimmung optimaler Portfolios [1]. Ein Hauptanwendungsgebiet dieses Verfahrens ist die Portfolioauswahl bei Vorsorgeeinrichtungen (Surplus-Management). Auf Grund des langen Anlagehorizontes derartiger Institutionen kommt dem Zeithorizont hier eine grosse Bedeutung zu. Der Shortfall-Ansatz wurde bereits verschiedentlich bezüglich der Zeithorizonteffekte untersucht [2]. Man ging dabei von einer statischen Betrachtungsweise aus, bei der das Portfolio zu Beginn der Anlageperiode einmal festgelegt wurde. Es ist bekannt, dass die Risikotoleranz mit steigendem Anlagehorizont steigt.

\* Die Entstehung dieses Beitrages wurde vom Nationalfonds finanziell unterstützt. Der Autor dankt A. Keel, H. Müller, M. Rudolf, G. Scheuenstuhl, C. Zenger und H. Zimmermann für kritische Verbesserungsvorschläge.

In der vorliegenden Arbeit wird in einem ersten Teil die Ausfallwahrscheinlichkeit für eine Rendite  $R^* - \delta < R^*$  in Abhängigkeit des Zeithorizontes bestimmt (Abschnitt 3). Neben einer statischen Festlegung des Portfolios ist auch die dynamische Bestimmung des Portfolios zu Beginn jeder Teilperiode in Abhängigkeit der Renditerealisationen der Vorperioden möglich [3]. Drei Möglichkeiten dynamischer Shortfall-Ansätze werden in einem weiteren Abschnitt dieser Arbeit untersucht (Abschnitt 4). Um für die Zeithorizontbetrachtungen eine einheitliche Beschreibung zu erhalten, wird der Shortfall-Ansatz im folgenden zuerst für eine Periode betrachtet (Abschnitt 2).

## 2. Shortfall-Ansatz in einer Periode

Die Idee des Shortfall-Ansatzes besteht darin, dass man Mean/Variance-effiziente Portfolios betrachtet, die eine gegebene stetige Mindestrendite  $R^*$  mit einer Ausfallwahrscheinlichkeit  $(1-\alpha)$  nicht unterschreiten. Nimmt man für die stetige Rendite  $R$  eine Normalverteilung  $N(\mu, \sigma)$  an, so gilt:

$$Prob\{R < R^*\} = 1 - \alpha = \Phi\left(\frac{R^* - \mu}{\sigma}\right) \quad (1)$$

Dabei bezeichnet  $\Phi(z)$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung  $N(0,1)$ . Nimmt man eine

Ausfallwahrscheinlichkeit  $(1-\alpha) < \frac{1}{2}$  an, was für praktische Fälle keine relevante Beschränkung bedeutet, so muss das Argument von einer negativen Konstanten  $z$  entsprechen, die lediglich von der Ausfallwahrscheinlichkeit  $(1-\alpha)$  abhängt:

$$\mu = -z\sigma + R^*$$

$$\Leftrightarrow z := \Phi^{-1}(1-\alpha)$$

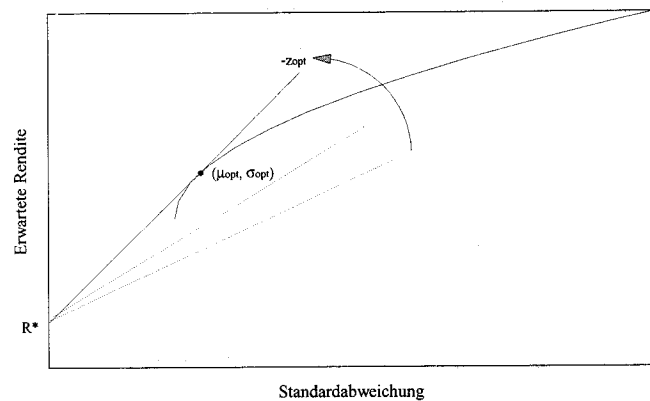
$$= \frac{R^* - \mu}{\sigma} < 0$$

$$\Leftrightarrow 1-\alpha < \frac{1}{2} \quad (2)$$

Dabei bezeichnet  $\Phi^{-1}(x)$  die Umkehrfunktion von  $\Phi(z)$ . Hieraus folgt, dass der geometrische Ort aller Portfolios, die für die Minimalrendite  $R^*$  eine Ausfallwahrscheinlichkeit  $(1-\alpha)$  aufweisen, in der  $(\sigma, \mu)$ -Ebene durch eine Gerade mit Steigung  $-z > 0$  und Achsenabschnitt  $R^*$  definiert ist.

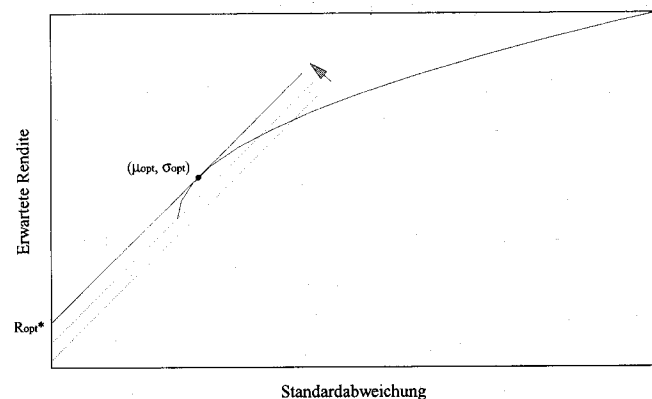
Der Shortfall-Ansatz ergibt im allgemeinen keine eindeutige Lösung, sondern schränkt den Möglichkeitsraum der Portfolios lediglich ein. Um nun doch eine eindeutige Lösung zu erhalten, muss das Optimalitätskriterium zusätzlich spezifiziert werden. Hierzu bestehen mehrere Möglichkeiten: Kennt man beispielsweise die Minimalrendite  $R^*$ , so lässt sich dasjenige Mean/Variance-effiziente Portfolio bestimmen, das diese Minimalrendite mit minimaler Ausfallwahrscheinlichkeit erreicht. Dieses derart definierte Optimalitätskriterium wird auch als Roy-Kriterium bezeichnet [4]. Alle Portfolios, die eine Minimalrendite  $R^*$  mit einer Ausfallwahrscheinlichkeit  $(1-\alpha)$  erreichen, liegen in der  $(\mu, \sigma)$ -Ebene auf einer Geraden mit festem Ordinatenabschnitt  $R^*$ , wobei sich die Steigung dieser Geraden  $-z$  mit abnehmender Ausfallwahrscheinlichkeit erhöht. Das gesuchte Portfolio, das unter allen Mean/Variance-effizienten Portfolios für eine feste Minimalrendite  $R^*$  die geringste Ausfallwahrscheinlichkeit aufweist, wird somit durch den Tangentialpunkt  $P$  auf der Effizienzgrenze bestimmt, deren zugehöriger Tangenten-Ordinatenabschnitt gerade  $R^*$  beträgt (vgl. Abbildung 1).

Abbildung 1: Roy-Kriterium



Beim Roy-Kriterium wird die Ausfallwahrscheinlichkeit  $(1-\alpha)$  für eine gegebene Minimalrendite  $R^*$  minimiert. Es besteht aber auch umgekehrt die Möglichkeit, unter den Mean/Variance-effizienten Portfolios dasjenige zu bestimmen, das bei fester Ausfallwahrscheinlichkeit  $(1-\alpha)$  die Minimalrendite  $R^*$  maximiert. Dieses Optimalitätskriterium wird auch als Kataoka-Kriterium bezeichnet [5]. Hier bilden die Portfolios mit der gleichen Ausfallwahrscheinlichkeit, aber unterschiedlicher Minimalrendite, eine Parallelschar mit Ordinatenparameter  $R^*$ . Das optimale Portfolio wird durch denjenigen Tangentialpunkt  $P$  auf der Effizienzgrenze definiert, bei dem die Steigung der Effizienzgrenze gerade  $-z = \Phi^{-1}(1-\alpha)$  beträgt (vgl. Abbildung 2).

Abbildung 2: Kataoka-Kriterium



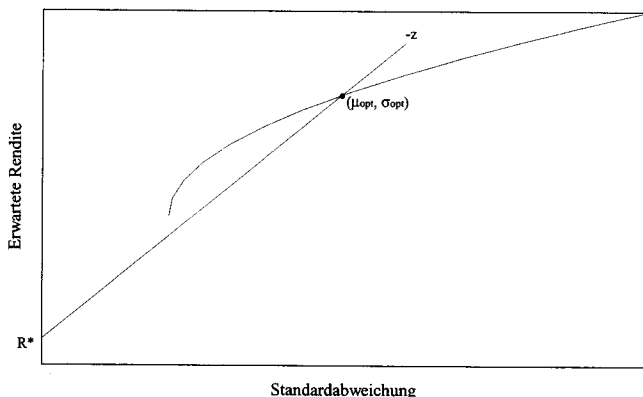
Neben den bereits betrachteten Tangentialkriterien besteht noch ein weiteres. Man kann bei gegebener Minimalrendite  $R^*$  und bekannter Ausfallwahrscheinlichkeit  $(1-\alpha)$  dasjenige Portfolio auswählen, das die maximale erwartete Rendite  $\mu$  aufweist [6]:

$$\mu \rightarrow \max$$

$$s.t. \text{Prob}\{R < R^*\} \leq 1-\alpha \quad (3)$$

Das gesuchte Portfolio lässt sich im allgemeinen graphisch als Schnittpunkt der Shortfall-Linie mit der Effizienzgrenze bestimmen. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz mindestens eines Schnittpunktes besteht darin, dass die gegebene Mindestrendite  $R^*$  kleiner ist als die Mindestrendite beim Kataoka-Kriterium für dieselbe Ausfallwahrscheinlichkeit.

Abbildung 3: Schnittpunkt-Kriterium



### 3. Statischer Zeithorizonteffekt

Man kann sich für die Festlegung einer Anlagestrategie einen festen Zeithorizont  $T > 1$  vorgeben. Die Anlagestrategie wird so festgelegt, dass die stetige Mindestrendite  $TR^*$  mit einer vorgegebenen Ausfallwahrscheinlichkeit  $(1-\alpha) < 1/2$  nicht unterschritten wird. Da das einmal festgelegte Portfolio bis zum Zeitpunkt  $T$  nicht mehr geändert wird, bezeichnet man dieses Anlageverhalten als statisch (buy and hold). Die Wahrscheinlichkeit, eine Mindestrendi-

te von  $TR^*$  nach  $T$  Perioden zu unterschreiten, beträgt [7]:

$$\text{Prob}\left\{\sum_{i=1}^T R_i \leq TR^*\right\} = \Phi(z\sqrt{T}) < \Phi(z) \leftrightarrow T > 1 \quad (4)$$

Somit nimmt die Ausfallwahrscheinlichkeit für ein Portfolio mit einer erwarteten Rendite  $\mu$  und einer Standardabweichung  $\sigma$  mit steigendem  $T$  ab. Will man nun die Ausfallwahrscheinlichkeit konstant halten, so bedeutet dies umgekehrt, dass mit steigendem  $T$  ein Portfolio mit einer höheren erwarteten Rendite beziehungsweise einer höheren Standardabweichung gewählt werden kann. Im Pensionskassenkontext bedeutet dies einerseits, dass allgemein auf Grund des langen Anlagehorizontes eine risikoreichere Anlagepolitik verwendet werden kann. Man kann andererseits dieses Zeithorizonteffekt aber auch derart interpretieren, dass eine Vorsorgeeinrichtung mit hohem Durchschnittsalter ein risikoärmeres Portfolio halten wird als eine Kasse mit einem kleinen Durchschnittsalter [8].

Um die Konsequenzen, die sich aus der Anwendung dieses Zeithorizonteffektes ergeben, abschätzen zu können, soll im folgenden untersucht werden, wie sich die Ausfallwahrscheinlichkeit für eine Mindestrendite, die kleiner ist als  $R^*$ , i.e.  $R^* - \delta$  ( $\delta > 0$ ), verhält. Hierzu wird folgendes Vorgehen gewählt:

Man gibt sich eine Mindestrendite  $R^*$  und eine Ausfallwahrscheinlichkeit  $(1-\alpha)$  vor und bestimmt hieraus dasjenige Mean/Variance-effiziente Portfolio  $(\mu_1, \sigma_1)$ , das bei einem Anlagehorizont von einer Konversionsperiode unter diesen Bedingungen die maximale erwartete Rendite aufweist:

$$\Phi\left(\frac{R^* - \mu_1}{\sigma_1}\right) = 1-\alpha \leftrightarrow z = \frac{R^* - \mu_1}{\sigma_1} \quad (5)$$

Nun berechnet man die Wahrscheinlichkeit  $(1-\alpha_1)$ , mit der eine geringere Rendite  $R^* - \delta$  unterschritten wird:

$$1-\alpha_1 = \Phi\left(z - \frac{\delta}{\sigma_1}\right) < \Phi(z) = 1-\alpha \quad (6)$$

Man verlängert nun den Anlagehorizont auf das  $T$ -fache der Konversionsperiode und bestimmt wiederum analog dem obigen Fall das optimale Portfolio  $(\mu_T, \sigma_T)$  für dieselben Parameter:

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{T}R^* - \mu_T}{\sigma_T}\right) = 1 - \alpha \leftrightarrow z = \frac{\sqrt{T}R^* - \mu_T}{\sigma_T} \quad (7)$$

Die Ausfallwahrscheinlichkeit  $(1 - \alpha_T)$  des Portfolios  $(\mu_T, \sigma_T)$  für die Mindestrendite  $R^* - \delta$  beträgt in diesem Fall:

$$1 - \alpha_T = \Phi\left(z - \sqrt{T} \frac{\delta}{\sigma_T}\right) < \Phi(z) = 1 - \alpha \quad (8)$$

Es stellt sich nun die Frage, welcher Zusammenhang zwischen der Ausfallwahrscheinlichkeit für die Mindestrendite  $R^* - \delta$  und dem Zeithorizont besteht. Hierbei sind folgende Aussagen äquivalent:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha_1 &< 1 - \alpha_T \\ \leftrightarrow z - \frac{\delta}{\sigma_1} &< z - \sqrt{T} \frac{\delta}{\sigma_T} \\ \leftrightarrow \sigma_T &> \sqrt{T} \sigma_1 \end{aligned} \quad (9)$$

Um zu zeigen, dass die letzte Ungleichung für effiziente Portfolios immer gilt, betrachtet man das Portfolio  $P_1 (\mu_1, \sigma_1)$ , das die maximale erwartete Rendite für einen Zeithorizont von einer Konversionsperiode bei einer vorgegebenen Mindestrendi-

te  $R^*$  mit einer Ausfallwahrscheinlichkeit  $(1 - \alpha)$  aufweist. Dieses Portfolio bestimmt man graphisch als Schnittpunkt der Ausfall-Linie mit der Steigung  $-z$  und dem Ordinatenabschnitt  $R^*$  mit der Effizienzgrenze (vgl. Abbildung 4). Das analoge Portfolio  $P_T (\mu_T, \sigma_T)$  für einen Zeithorizont von  $T$  Konversionsperioden ( $T > 1$ ) ergibt sich durch den Schnittpunkt der Ausfall-Linie mit Ordinatenabschnitt  $R^*$  und Steigung  $-zT^{1/2}$  mit der Effizienzgrenze. Bezeichnet man den Schnittpunkt der Abszissenparallele durch  $P_1$  mit der Ausfall-Linie zum Zeithorizont  $T$  mit  $(\mu_1, \sigma_1')$ , so folgt die Gleichung:

$$\frac{R^* - \mu_1}{\sigma_1} = z \wedge \frac{R^* - \mu_1}{\sigma_1'} = \frac{z}{\sqrt{T}} \leftrightarrow \sigma_1' = \sqrt{T} \sigma_1 \quad (10)$$

Da nun für Mean/Variance-effiziente Portfolios  $P_T$  oberhalb der Abszissenparallelen liegt, gilt auch die obige Ungleichung:

$$\sigma_T > \sigma_1' = \sqrt{T} \sigma_1 \leftrightarrow 1 - \alpha_1 < 1 - \alpha_T \quad (11)$$

Es soll nun noch gezeigt werden, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit  $(1 - \alpha_T)$  für  $T$  unabhängig von  $\delta$  gegen  $(1 - \alpha)$  strebt. Dies ist äquivalent mit der Aussage:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (1 - \alpha_T) = 1 - \alpha \leftrightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{T}}{\sigma_T} = 0 \quad (12)$$

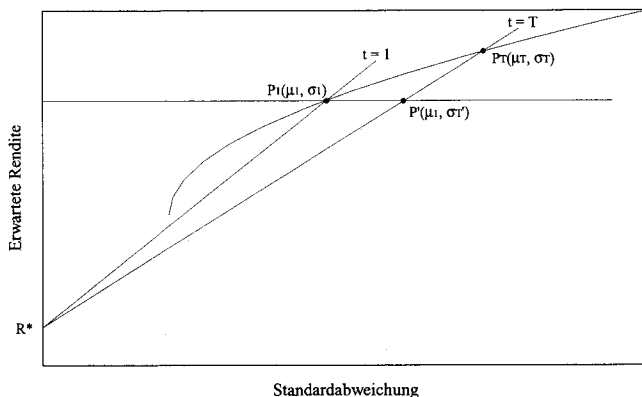
Setzt man nun

$$\sigma_T = \frac{\sqrt{T}R^* - \mu_T}{z} \quad (13)$$

ein, so erhält man, da  $\mu_T \rightarrow \infty$  für  $T \rightarrow \infty$ , den Beweis für die obige Behauptung [9]:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{T}}{\sigma_T} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{z}{R^* - \mu_T} = 0 \\ \leftrightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} (1 - \alpha_T) &= 1 - \alpha \end{aligned} \quad (14)$$

Abbildung 4: Beweisgraphik für  $\sigma_T > T^{1/2} \sigma_1$



Um die Abhängigkeit von  $(1-\alpha_T)$  vom Zeithorizont zu illustrieren, betrachtet man im folgenden numerischen Beispiel Mean/Variance-effiziente Portfolios aus drei Anlagen. Die erwarteten stetigen Renditen und die Inverse der Kovarianzmatrix  $V^{-1}$  sind gegeben als:

$$100\mu := \begin{pmatrix} 5.60 \\ 5.13 \\ 5.60 \end{pmatrix}$$

$$V^{-1} := \begin{pmatrix} 38.99 & -19.89 & -0.98 \\ -19.89 & 613.65 & -27.74 \\ -0.98 & -27.74 & 287.65 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Man bestimmt für diese drei Anlagen nach dem Schnittpunkt-Kriterium für verschiedene Zeithorizonte dasjenige Portfolio, das bei einer Mindestrendite von 0 eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 10 Prozent aufweist. Für dieses Portfolio bestimmt man die Ausfallwahrscheinlichkeit für die Rendite  $\log(0.98) = -2.0203 \cdot 10^{-2}$  und  $\log(0.95) = -5.1293 \cdot 10^{-2}$  (vgl. Abbildung 5).

Um die Bedeutung dieses Effektes zu illustrieren, betrachtet man beispielsweise zwei Anleger A und B. Der Anlagehorizont des ersten Anlegers soll ein Jahr betragen, derjenige des zweiten dagegen 40 Jahre. Beide Anleger möchten während ihres Anlagehorizontes eine stetige Mindestrendite  $R^* = 0$  Prozent (Nominalwerterhaltung) mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 Prozent erreichen. Haben die

beiden Investoren aus den obigen drei Anlagen ohne weitere Restriktionen entsprechende Portfolios zu bilden, so wird das Portfolio des Anlegers A eine erwartete Rendite  $\mu_1 = 5.465$  Prozent und eine Standardabweichung  $\sigma_1 = 4.265$  Prozent aufweisen, währenddem für den Investor B  $\mu_{40} = 8.171$  Prozent und  $\sigma_{40} = 40.325$  Prozent (sic!) betragen. Um sich zu vergewissern, dass diese Portfolios die Mindestrendite/Auswahrscheinlichkeit-Bedingung für den jeweiligen Anlagehorizont erfüllen, setzt man die entsprechenden Werte in Formel (5) respektive (7) ein. Nun bestimmt man für diese beiden derart festgelegten Portfolios die Wahrscheinlichkeiten, eine durchschnittliche einfache Rendite vom -5 Prozent (entspricht einer stetigen Rendite  $\log(0.95) = -5.1293 \cdot 10^{-2}$ ) zu verfehlen:

$$Prob\{R \leq \log(0.95)\}$$

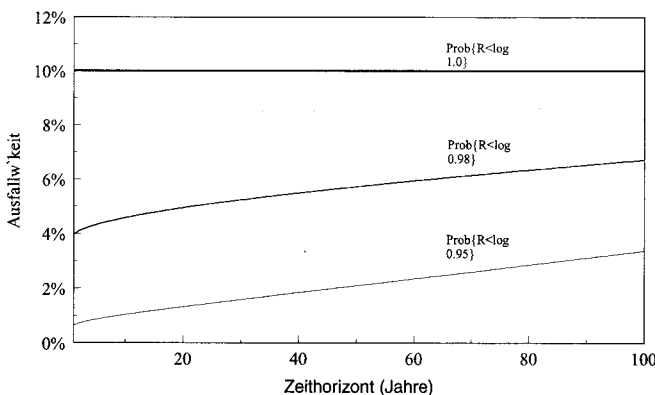
$$= \Phi \left( \frac{\log(0.95) - 0.05465}{0.04265} \right) = 0.649\%$$

$$Prob\left\{ \sum_{t=1}^{40} R_t \leq 40 \log(0.95) \right\}$$

$$= \Phi \left( \frac{\sqrt{40} \log(0.95) - 0.08171}{0.40325} \right) = 1.849\% \quad (16)$$

Dies bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, eine einfache Durchschnittsrendite -5 Prozent über den jeweiligen Anlagehorizont zu unterschreiten, bei einem Horizont von 40 Jahren fast dreimal grösser ist, als im Falle eines einjährigen Zeithorizontes. Man beachte dabei, dass die Portfolios derart bestimmt werden, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit für eine einfache Durchschnittsrendite von 0 Prozent über den entsprechenden Zeithorizont in beiden Fällen 10 Prozent beträgt. Dieses numerische Beispiel lässt sich auch auf das Anlageverhalten von Vorsorgeeinrichtungen übertragen. Hierzu betrachtet man eine Vorsorgeeinrichtung im finanziellen Gleichgewicht (Deckungsgrad  $\lambda_t = 100$  Prozent). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit

Abbildung 5: Ausfallwahrscheinlichkeit für  $R^*$  und  $R^* - \delta$



wird angenommen, dass die notwendige Mindestrendite, um das Gleichgewicht zu halten, 0 Prozent beträgt. Werden wiederum zwei Anlagehorizonte von 1 respektive 40 Jahren angenommen, so werden dieselben Portfolios  $(\mu_1, \sigma_1)$  beziehungsweise  $(\mu_{40}, \sigma_{40})$  gewählt, falls die gewünschte Wahrscheinlichkeit einer Unterdeckung am Ende des Anlagehorizontes ebenfalls 10 Prozent beträgt. Die derart festgelegte Anlagestrategie führt dazu, dass die Wahrscheinlichkeit einer doch massiven Unterdeckung von 5 Prozent (Deckungsgrad in der folgenden Periode  $\lambda_{t+1} = 95$  Prozent) am Ende des jeweiligen Anlagehorizontes wiederum 0.649 Prozent (1 Jahr) respektive 1.849 (40 Jahre) beträgt. Die Aussage, dass eine Vorsorgeeinrichtung auf Grund ihres langen Zeithorizontes in risikobehaftete Anlagen investieren kann, muss somit relativiert werden [10]. Zwar nimmt die Ausfallwahrscheinlichkeit für eine gegebene Mindestrendite  $R^*$  mit steigendem Anlagehorizont ab, und damit kann bei gleicher Ausfallwahrscheinlichkeit  $(1-\alpha)$  eine risikoreichere Anlagepolitik verfolgt werden, doch steigt dabei zugleich die Ausfallwahrscheinlichkeit, eine geringere Mindestrendite  $R^* - \delta < R^*$  zu unterschreiten. Dieser Effekt lässt sich folgendermaßen veranschaulichen: Mit steigendem Zeithorizont  $T$  nimmt die erwartete Rendite  $\mu$  zu, i.e. die Renditeverteilung "wandert" nach rechts. Gleichzeitig steigt aber auch die Standardabweichung  $\sigma$ , i.e. die Verteilung wird "breiter". Die Zunahme der Ausfallwahrscheinlichkeit für  $R^* - \delta$  bedeutet nun, dass der zweite Effekt den ersten überwiegt.

#### 4. Dynamischer Zeithorizonteffekt

Bei der bisherigen statischen Zeithorizontbetrachtung ging man davon aus, dass das einmal für den Zeithorizont  $T$  festgelegte Portfolio nicht mehr verändert wird. Dies ist beispielsweise dann eine realistische Annahme, wenn es auf Grund der Marktliquidität nicht möglich ist, das Portfolio periodisch anzupassen. Bei einer dynamischen Anlagestrategie dagegen wird das Portfolio nach jeder Teilperiode  $t$  ( $1 \dots T$ ) in Abhängigkeit von den

bisherigen Renditerealisationen  $r_1 \dots r_{t-1}$  neu festgelegt. Zur Illustration kann man sich wiederum einen Investor vorstellen, der mit 90-prozentiger Sicherheit eine Nominalwerterhaltung erreichen will. Um dieses Ziel während der ersten Periode zu erreichen, gibt er sich eine Mindestrendite von 0 Prozent und eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 10 Prozent vor. Beträgt nun die tatsächliche Rendite während des ersten Jahres 6 Prozent, so genügt ihm für die gewünschte Nominalwerterhaltung bereits für die Folgeperiode eine Mindestrendite von -6 Prozent (stetig gerechnet).

Im Zeitablauf können drei unterschiedliche Strategien verwendet werden:

Bei Verwendung des Roy-Kriteriums bestimmt man zu Beginn der ersten Periode als Minimalrendite gerade  $R_1^* := R^*$  und berechnet hieraus dasjenige Portfolio  $(\mu_1, \sigma_1)$ , das eine minimale Ausfallwahrscheinlichkeit  $(1-\alpha_1)$  aufweist. Dieses Portfolio wird in der ersten Periode eine Rendite  $r_1$  realisieren. Für die zweite Periode wird nun die Mindestrendite  $R_2^*$  derart festgelegt, dass die Mindestrendite über beide Perioden  $2R^*$  beträgt. Allgemein wird zu Beginn der  $t$ -ten Periode ein Portfolio  $(\mu_t, \sigma_t)$  bestimmt, mit dem die Mindestrendite  $tR^*$  mit geringstmöglicher Ausfallwahrscheinlichkeit  $(1-\alpha_t)$  erreicht wird:

$$\text{Prob}\{R_t < R_t^*\} = \Phi\left(\frac{R_t^* - \mu_t}{\sigma_t}\right) \rightarrow \min \quad (17)$$

mit

$$R_t^* := tR^* - \sum_{\tau=1}^{t-1} r_\tau \quad (18)$$

Die Mindestrendite der  $t$ -ten Periode hängt somit von den Renditerealisationen  $r_\tau$  aller Vorperioden ab. Da das Roy-Kriterium eine Ausfallwahrscheinlichkeit  $(1-\alpha) < 1/2$  voraussetzt, fallen die Renditerealisationen  $r_t$  mehrheitlich höher aus als die vorgegebenen Mindestrenditen  $R_t^*$  [11]. Somit fällt auch die Mindestrendite  $R_{t+1}^*$  der folgenden Periode häufiger tiefer aus als diejenige in der gegenwärtigen Periode  $R_t^*$ . Eine geringere Mindestrendite hat wiederum eine Verminderung der Ausfallwahrscheinlichkeit zur Folge.

scheinlichkeit  $(1-\alpha_{t+1}) < (1-\alpha_t)$  in der jetzigen Periode zur Folge. Damit wird auch die Wahrscheinlichkeit weiter vermindert, in der kommenden Periode eine Erhöhung der Mindestrendite  $R_{t+1}^*$  zu erreichen. Dies bedeutet, dass die Verwendung des Roy-Kriteriums mehrheitlich zu einem Absinken der Mindestrendite führt, wodurch die ausgewählten Portfolios sich immer weiter dem Minimum-Varianz-Portfolio nähern und somit die Risikotoleranz eines solchen Anlegers mit zunehmendem Zeithorizont fällt.

Das Kataoka-Kriterium lässt sich ebenfalls anwenden. Im Gegensatz zum Roy-Kriterium, bei dem man die vorgegebene Verzinsung  $R^*$  als Mindestverzinsung  $R_1^*$  für die erste Periode festlegen kann, erfolgt die Festlegung des Startwertes für die Ausfallwahrscheinlichkeit  $(1-\alpha_1)$  beim Kataoka-Kriterium willkürlich. Es muss lediglich sichergestellt sein, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit für die Mindestrendite  $R_1^*$  kleiner als  $1/2$  ist. Eine Möglichkeit, das Startportfolio  $(\mu_1, \sigma_1)$  festzulegen, besteht in der Anwendung des Roy-Kriteriums für die Mindestrendite  $R_1^*$ . Die Realisation  $r_1$  wird nach Voraussetzung mit einer Wahrscheinlichkeit  $p > 1/2$  über  $R_1^*$  liegen. Allgemein errechnet sich die Ausfallwahrscheinlichkeit  $(1-\alpha_t)$  beziehungsweise die Steigung der Ausfall-Linie  $z$  als Richtgröße für die  $t$ -te Periode zu:

$$z = \frac{R_t^* - \mu_t}{\sigma_t} \quad (19)$$

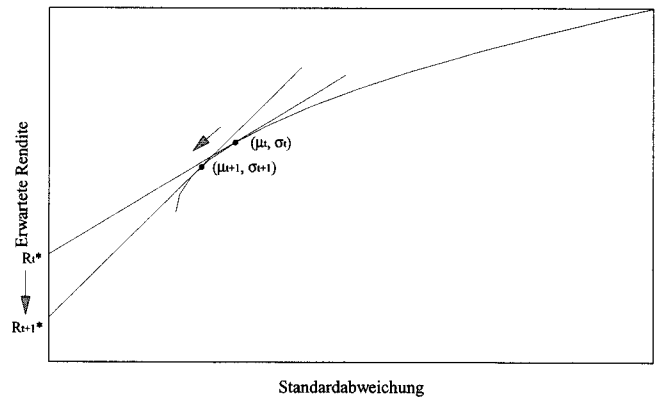
mit

$$R_t^* := tR^* - \sum_{\tau=1}^{t-1} r_\tau \quad (20)$$

Da die Mindestrendite  $R_t^*$  der  $t$ -ten Periode auf Grund derselben Überlegungen im Falle des Roy-Kriteriums gegenüber der Mindestrendite der Vorperiode  $R_{t-1}^*$  mehrheitlich fällt, wird die Ausfallwahrscheinlichkeit  $(1-\alpha_t)$  ebenfalls mehrheitlich sinken. Daher werden bei beiden Tangential-Kriterien mit zunehmendem  $t$  fast immer weniger risiko-

behaftete Portfolios gewählt (vgl. Abbildung 6). Neben den Tangential-Kriterien, die im Zeitablauf zum Minimum/Varianz-Portfolio tendieren, kann auch das Schnittpunkt-Kriterium verwendet werden. Man gibt sich dabei eine für alle Perioden konstante Ausfallwahrscheinlichkeit  $(1-\alpha)$  vor und bestimmt für die Mindestrendite  $R_t^*$ , die gleich den obigen Fällen definiert wird, das entsprechende

**Abbildung 6: Abfallen von  $\mu$  und  $\sigma$  beim Tangential-Kriterien**

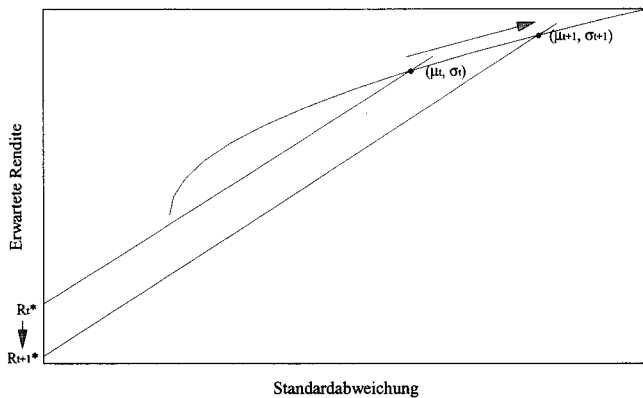


Schnittpunktportfolio. Analog den Überlegungen bei den Tangential-Kriterien fällt die Mindestrendite  $R_t^*$  mehrheitlich. Während jedoch bei den Tangential-Kriterien eine Verminderung der Mindestrendite ein weniger risikobehaftetes Portfolio impliziert, geht mit dem Sinken der Mindestrendite eine Steigerung des Portfoliorisikos einher. Dadurch strebt eine Vermögensanlage bei Verwendung des Schnittpunktkriteriums im Zeitablauf gegen ein beliebig risikobehaftetes Portfolio [12] (vgl. Abbildung 7).

### 5. Fazit

Ziel dieses Aufsatzes war es, den Shortfall-Ansatz, ein einfaches und anschauliches Konzept für die Bestimmung optimaler Portfolios, auf sein Verhalten im Zeitablauf zu untersuchen. Legt man das Portfolio zu Beginn einer Periode der Länge  $T$

Abbildung 7: Anstieg von  $\mu$  und  $\sigma$  beim Schnittpunkt-kriterium



(Zeithorizont) einmal fest, so zeigt sich dabei, dass in diesem Fall mit zunehmendem Zeithorizont  $T$  bei konstanter Ausfallwahrscheinlichkeit  $(1-\alpha)$  und bei einer gegebenen Mindestrendite  $R^*$  die Standardabweichung der Rendite je Konversionsperiode  $\sigma_T$  ebenfalls steigt, also ein grösserer Zeithorizont mit einer zunehmenden Risikotoleranz einhergeht. Andererseits nimmt mit dem Zeithorizont  $T$  für ein derart bestimmtes Portfolio auch die Ausfallwahrscheinlichkeit zu, dass eine kleinere Rendite  $R^* - \delta < R^*$  verfehlt wird.

Man kann auch das Portfolio nach jeder Teilperiode  $t (1 \dots T)$  in Abhängigkeit von den bisherigen Renditerealisationen neu festlegen. Ein mögliches Anlageverhalten besteht darin, das Portfolio so zu wählen, dass der Durchschnitt der realisierten Rendite der  $t$  Vorperioden und der für die Periode  $(t+1)$  definierte Mindestrendite  $R_{t+1}^*$  gerade der gegebenen Mindestrendite  $R^*$  entspricht. Dabei zeigte sich, dass bei diesem Vorgehen die Portfolios im Zeitablauf zum Minimum/Varianz-Portfolio tendieren. Verwendet man dagegen das Schnittpunkt-Kriterium, so führt dies fast sicher zu beliebig risikobehafteten Portfolios.

Damit ist es nicht möglich, den Shortfall-Ansatz zufriedenstellend auf Zeithorizontprobleme anzuwenden. Das Shortfall-Konzept stellt die Grundlage des Surplus-Ansatzes zur Festlegung der Anlagestrategie bei Vorsorgeeinrichtungen dar. Für die Beurteilung des Anlageverhaltens von Vorsorge-

einrichtungen stellt der Zeithorizont eine wichtige Komponente dar. Da der Shortfall-Ansatz hier nicht befriedigend angewendet werden kann, gilt dies ebenso für den Surplus-Ansatz, der damit für die Festlegung von Anlagestrategien für Vorsorgeeinrichtungen abgelehnt werden muss.

#### Fussnoten

- [1] LEIBOWITZ/HENRIKSSON (1987), LEIBOWITZ/LANGETIEG (1989), SHARPE/TINT (1989), LEIBOWITZ/KOGELMAN (1991).
- [2] LEIBOWITZ/KRASKER (1988), ZENGER (1992), ZIMMERMANN (1991) und (1992).
- [3] Der dynamische Ansatz wird als Dynamic Surplus Control bezeichnet (ZIMMERMANN/ARCE/JAEGER/WOLTER (1992) p. 142-144H).
- [4] ELTON/GRUBER (1991), p. 218.
- [5] ELTON/GRUBER (1991), p. 219.
- [6] ELTON/GRUBER (1991), p. 221.
- [7] Dabei werden die stetigen Renditen  $R_t$  i.i.d  $\sim N(\mu, \sigma)$  angenommen.
- [8] Diese Aussage gilt nur für geschlossene Gesamtheiten.
- [9]  $\mu_T$  wird nicht erst für  $T$  erreicht, sondern bereits für  $T = (z/m)^2$ . Dabei bezeichnet  $m$  die Steigung der Asymptote der Effizienzgrenze. Für das vorliegende numerische Beispiel beträgt  $T = 318$  Jahre. Für Zeithorizonte, die über  $T$  hinausgehen, ist die Ausfallwahrscheinlichkeit, am Ende eine Rendite von 0 Prozent zu erreichen, auch dann kleiner als 10 Prozent, wenn ein beliebig risikobehaftetes Portfolio gewählt wird. Für praktische Anwendungen sind diese Überlegungen im allgemeinen ohne Relevanz.
- [10] WYDLER (1991).
- [11] Es gibt Fälle, in denen das Verfahren nicht fortgesetzt werden kann. Dies ist der Fall, wenn die Renditerealisationen derart gering ausfallen, dass für die entsprechende Mindestrendite  $R_t^*$  nach dem Roy-Kriterium kein Portfolio mehr gefunden werden kann.
- [12] Ein Beispiel für diesen Sachverhalt findet man im Dynamic Surplus Control Ansatz bei ZIMMERMANN/ARCE/JAEGER/WOLTER (1992) p. 143 .



## Literatur

ELTON, E. und M. GRUBER (1991): "Modern Portfolio Theory and Investment Analysis", John Wiley & Sons.

LEIBOWITZ, M. und R. HENRIKSSON (1987): "Portfolio Optimization under Shortfall Constraints", Salomon Brothers, August.

LEIBOWITZ, M. und W. KRASKER (1988): "Persistence of Risk: Stocks versus Bonds over the Long Term", Financial Analysts Journal, November/December, pp. 40-47.

LEIBOWITZ, M. und T. LANGETIEG (1989): "Shortfall risk and the Asset Allocation Decision: A Simulation Analysis of Stock and Bond Risk Profiles", Journal of Portfolio Management, Autumn, pp. 61-68.

LEIBOWITZ, M. und S. KOGELMAN (1991): "Asset Allocation under Shortfall Constraints", Journal of Portfolio Management, Winter, pp. 18-23.

SHARPE, W. und L. TINT (1990): "Liabilities - A new Approach", Journal of Portfolio Management, Winter, pp. 4-10.

WYDLER, D. (1991): "Kurzfristiger Zeithorizont für langfristige Pensionskassengelder", Neue Zürcher Zeitung, Nr. 109, 14. Mai.

ZENGER C. (1992): "Zeithorizont, Ausfallwahrscheinlichkeit und Risiko: Einige Bemerkungen aus der Sicht des Praktikers", Finanzmarkt und Portfolio Management 6, pp. 104-113.

ZIMMERMANN H. (1991): "Zeithorizont, Risiko und Performance: Eine Übersicht", Finanzmarkt und Portfolio Management 5, Nr. 2, pp. 164-181.

ZIMMERMANN H. (1992): "Replik zum Thema 'Ausfallrisiko und Zeithorizont'", Finanzmarkt und Portfolio Management 6, pp. 114-117.

ZIMMERMANN H., C. ARCE, S. JAEGER und H.J. WOLTER (1992): "Pensionskassen Schweiz: Neue Strategien für wachsende Leistungsansprüche", Wirtschaft und Gesellschaft 6, Zürcher Kantonalbank.