

Zur vorzeitigen Ausübung von Amerikanischen Aktienoptionen

In bezug auf die Zulässigkeit einer vorzeitigen Ausübung wird in der Optionspreistheorie zwischen Europäischen und Amerikanischen Optionen unterschieden. Während Optionen vom Europäischen Typ nur am Fälligkeitstermin vom Optionsinhaber ausgeübt werden können, bieten Optionen vom Amerikanischen Typ dem Optionsinhaber die Möglichkeit, die Option jederzeit während der gesamten Restlaufzeit auszuüben.

Das in Amerikanischen Optionen zusätzlich verbrieftete Recht der vorzeitigen Ausübung wirft die Frage nach dem optimalen Zeitpunkt für die Ausübung dieser Optionen auf. Die Beantwortung dieser Frage ist insbesondere für Amerikanische Aktienoptionen nicht nur aus theoretischer Sicht reizvoll sondern auch für die Praxis bedeutsam, da die Mehrzahl der in Nordamerika und Europa gehandelten Aktienoptionen vom Amerikanischen Typ ist. Dies trifft neben den an der Frankfurter und Düsseldorfer Börse gehandelten Optionen auch auf die seit Januar 1990 an der Deutschen Terminbörse (DTB) gehandelten Aktienoptionen zu.

Die Optimalität einer vorzeitigen Ausübung ist auch deshalb interessant, weil sie direkte Konsequenzen für die Bewertung von Amerikanischen Optionen hat. Wäre eine vorzeitige Ausübung Amerikanischer Optionen niemals optimal, dann wäre das Recht auf vorzeitige Ausübung wertlos und Amerikanische Optionen könnten wie sonst identische Europäische Optionen mit den BLACK-SCHOLES-Formeln für Calls und Puts bewertet

werden [1]. Könnte hingegen die Vorteilhaftigkeit einer vorzeitigen Ausübung von Amerikanischen Aktienoptionen nicht generell ausgeschlossen werden, dann sollten diese Optionen mehr wert sein als sonst identische Europäische Optionen, die die Möglichkeit der vorzeitigen Ausübung nicht bieten. Bewertungsmodelle für Europäische Optionen können dann nur eine Wertuntergrenze für Amerikanische Optionen darstellen.

Im allgemeinen hängt die Optimalität einer vorzeitigen Ausübung von Amerikanischen Aktienoptionen

- vom Typ der Option (Call oder Put),
- von eventuellen Kursabschlägen der zugrundeliegenden Aktie während der Restlaufzeit der Option und
- von der Existenz von Schutzklauseln in den Optionsbedingungen in bezug auf diese Aktienkursabschläge

ab. Bei den angesprochenen Aktienkursabschlägen ist zu beachten, dass die in Deutschland gehandelten Aktienoptionen einerseits gegenüber Kursabschlägen bei Bezugsrechten und Berichtigungsaktien geschützt sind. In diesen beiden Fällen wird der Basispreis der Option so angepasst, dass die Abschläge so gut wie keinen Einfluss auf den Wert der Option und den Ausübungszeitpunkt haben. Deshalb können diese Aktienkursabschläge ignoriert werden. Andererseits sind deutsche Aktienoptionen gegenüber Dividendenabschlägen ungeschützt. Eine Anpassung des Basispreises findet in diesem

Fall nicht statt, so dass Dividenden während der Restlaufzeit der Option den Ausübungszeitpunkt und den Wert der Option beeinflussen.

Die folgenden Darstellungen über die Optimalität einer vorzeitigen Ausübung von in Deutschland gehandelten Aktienoptionen beruhen ausschliesslich auf Arbitrageüberlegungen [2]. Somit brauchen keinerlei Annahmen über die Risikoeinstellung der Investoren oder über die Verteilung der zukünftigen Aktienkurse getroffen werden. Wir werden zeigen, bei welchen Konstellationen eine vorzeitige Ausübung niemals optimal ist und unter welchen Bedingungen und zu welchen Zeitpunkten die vorzeitige Ausübung optimal sein kann. Dabei wird sich herausstellen, dass die Optimalität einer vorzeitigen Ausübung vor allem

- von der Existenz und der Höhe der Dividende, die die zugrundeliegende Aktie während der Restlaufzeit der Option zahlt, und
- von der Relation des aktuellen Aktienkurses zum Basispreis

abhängt. In den Fällen, in denen die Optimalität einer vorzeitigen Ausübung nicht ausgeschlossen werden kann, werden wir auf Optionspreismodelle hinweisen, mit denen diese Optionen exakter als mit den BLACK-SCHOLES-Formeln zu bewerten sind.

1. Calls auf Aktien

1.1 Calls auf Aktien ohne Dividende

Für Amerikanische Calls auf Aktien ohne Dividende während der Restlaufzeit ist eine vorzeitige Ausübung niemals optimal, da diese Calls nicht vorzeitig ausgeübt immer mindestens ebenso viel wert sind wie vorzeitig ausgeübt. Dies sollen nachfolgende Überlegungen verdeutlichen, wobei wir sinnvollerweise annehmen, dass der heutige Aktienkurs S_0 über dem Basispreis X liegt.

Für den Fall der vorzeitigen Ausübung lässt sich der heutige Callwert C_0^A eindeutig bestimmen: Der Optionsinhaber zahlt den Basispreis X und erhält dafür im Gegenzug eine Aktie im Wert von S_0

$$C_0^A = S_0 - X.$$

Wird der Call heute nicht vorzeitig ausgeübt, so kann zwar sein exakter Wert C_0^N ohne Annahmen über den zukünftigen Aktienkursverlauf nicht bestimmt werden, aber mit einfachen Arbitrageüberlegungen lässt sich folgende Wertuntergrenze für den Call herleiten

$$C_0^N \geq S_0 - X(1+r)^{-T},$$

wobei T die Restlaufzeit der Option und r den risikolosen Zinssatz darstellen. Die Ungleichung besagt, dass der Wert des nicht vorzeitig ausgeübten Calls C_0^N mindestens der Differenz zwischen dem aktuellen Aktienkurs S_0 und dem Barwert des Basispreises $X(1+r)^{-T}$ entsprechen muss. Wäre diese Bedingung verletzt, so könnten Investoren ohne Einsatz von Eigenkapital risikolose Gewinne realisieren, indem sie die in Tabelle 1 dargestellte Strategie verfolgen.

Tabelle 1 zeigt, dass bei Verletzung der Ungleichung ein rationaler Investor heute eine Aktie leerverkauft und mit dem Erlös einen unterbewerteten Call kauft bzw. den Barwert des Basispreises $X(1+r)^{-T}$ bis zum Verfalltag in T Jahren zum risikolosen Zinssatz r anlegt. Bis zum Fälligkeitstag des Calls wird dann nichts unternommen. Am Verfalltag werden die eingegangenen Positionen in Abhängigkeit vom dann herrschenden Aktienkurs glattgestellt. Diese Strategie führt zu einem Arbitragegewinn, da sie ohne Risiko und ohne Einsatz von Eigenkapital heute einen sicheren positiven Cash Flow und in der Zukunft einen sicheren nichtnegativen Cash Flow impliziert. Bei Verletzung der Wertuntergrenze für C_0^N wäre es daher möglich, risikolos und ohne den Einsatz von eigenem Geld unendlich reich zu werden. Im Gleichgewicht sollte somit die Wertuntergrenze für C_0^N Bestand haben. Die bisherigen Überlegungen haben gezeigt, dass der heutige Wert des betrachteten Calls bei Ausübung $S_0 - X$ bzw. bei Nichtausübung mindestens $S_0 - X(1+r)^{-T}$ beträgt. Folglich gilt vor dem Fälligkeitstermin des Calls für einen positiven risikolosen Zinssatz r

Tabelle 1: Strategie zur risikolosen Gewinnerzielung bei Verletzung der Arbitragebedingung $C_0^N \geq S_0 - X(1+r)^{-T}$.*Heute:*

Transaktion	Cash Flow
Leerverkauf einer Aktie	$+ S_0$
Kauf des unterbewerteten Calls	$- C_0^N$
Anlage des Barwertes des Basispreises bis zum Verfalltag zum risikolosen Zinssatz r	$- X(1+r)^{-T}$
Cash Flow heute insgesamt:	$S_0 - C_0^N - X(1+r)^{-T} > 0$

*Am Fälligkeitstag der Option:*a) Für $S_T \leq X$:

Transaktion	Cash Flow
Call verfallen lassen	0
Endwert aus Geldanlage	X
Kauf einer Aktie an der Börse	$- S_T$
Glattstellen der Leerposition	0
Cash Flow bei Fälligkeit für $S_T \leq X$:	$X - S_T \geq 0$

b) Für $S_T > X$:

Transaktion	Cash Flow
Ausübung des Calls:	
- Zahlung des Basispreises	$- X$
- Erhalt der Aktie und Glattstellen der Leerposition	0
Endwert aus Geldanlage	X
Cash Flow bei Fälligkeit für $S_T > X$:	0

$$C_0^N > C_0^A.$$

Ein rationaler Investor wird demnach einen Call auf eine Aktie, die während der Restlaufzeit des Calls keine Dividende ausschüttet, nicht vorzeitig ausüben [3].

Da bei Amerikanischen Optionen auf Aktien ohne Dividende während der Restlaufzeit der Option eine optimale vorzeitige Ausübung ausgeschlossen werden konnte, ist das Recht auf vorzeitige Ausübung wertlos und daher können diese Calls wie

Europäische Calls mit der BLACK-SCHOLES-Formel bewertet werden.

1.2 Calls auf Aktien mit Dividende

Bei Amerikanischen Calls auf Aktien mit Dividende während der Restlaufzeit kann eine optimale vorzeitige Ausübung nicht grundsätzlich ausgeschlossen werden. Dies wollen wir an einem Extremfall demonstrieren. Wir betrachten dazu die

Exterminator AG, die gerade ihre Liquidation plant. Dabei soll der gesamte Liquidationserlös zum nächsten Dividententermin in Form einer letzten grossen Dividende ausgeschüttet werden. Welche Auswirkungen hat die Umsetzung dieses Plans auf den Kurs der Aktien der Exterminator AG und auf den Wert von Amerikanischen Calls auf Aktien dieser Unternehmung, die erst nach der Ausschüttung des Liquidationserlöses fällig werden?

Für die Aktien der Exterminator AG bedeutet die geplante Liquidation, dass sie nach dem Ex-Dividendentermin wertlos sein werden. Da ein Call höchstens so viel wert sein kann wie die zugrundeliegende Aktie, werden auch die Calls der Exterminator AG nach dem Ex-Dividendentermin wertlos sein und eine Ausübung der Calls nach der Ausschüttung wird in keinem Fall optimal sein. Vor dem Ex-Dividendentermin hingegen können Amerikanische Calls auf Aktien der Exterminator AG einen positiven Wert besitzen und eine vorzeitige Ausübung kann optimal sein. Im Gegensatz dazu sind Europäische Calls, die erst nach der Liquidation fällig werden, auch schon vor dem Ex-Dividendentermin wertlos, da feststeht, dass die Aktien der Exterminator AG am Fälligkeitstag der Europäischen Optionen wertlos sein werden.

Das Beispiel zeigt, dass die vorzeitige Ausübung eines Amerikanischen Calls auf Aktien mit Dividende optimal sein kann. Es kommen jedoch nicht alle Zeitpunkte während der Restlaufzeit als potentielle optimale vorzeitige Ausübungszeitpunkte in Frage, sondern höchstens der Zeitpunkt unmittelbar vor dem Dividendenabschlag ist optimal. Nach dem Ex-Dividendentermin handelt es sich um einen Call auf eine Aktie ohne Dividende und die vorzeitige Ausübung zu den darauffolgenden Zeitpunkten wurde bereits im letzten Unterabschnitt widerlegt. Dass eine vorzeitige Ausübung auch zu jedem früheren Zeitpunkt als unmittelbar vor dem Ex-Dividendentermin auszuschliessen ist, kann ebenfalls mit einfachen Arbitrageüberlegungen gezeigt werden. Für den Fall der vorzeitigen Ausübung lässt sich der heutige Callwert wiederum eindeutig als $C_0^A = S_0 - X$ bestimmen. Wird der Call heute nicht vorzeitig ausgeübt, so erhält man als Wertuntergrenze

$$C_0^N \geq S_0 - X(1+r)^{-\tau},$$

wobei τ die Länge des Zeitraumes bis zum Dividententermin angibt. Die Arbitragestrategie bei Verletzung dieser Ungleichung ist ähnlich wie in Tabelle 1, sie basiert jedoch nicht mehr auf dem gesamten Zeitraum bis zum Fälligkeitstermin, sondern nur noch auf dem Zeitraum bis unmittelbar vor dem Ex-Dividendentermin. Demnach müsste bei Verletzung der Ungleichung ein rationaler Investor heute eine Aktie leerverkaufen und mit dem Erlös einen unterbewerteten Call kaufen bzw. den Barwert des Basispreises $X(1+r)^{-\tau}$ zum risikolosen Zinssatz bis zum Ex-Dividendentermin anlegen. Am Ex-Dividendentermin werden die eingegangenen Positionen in Abhängigkeit vom dann herrschenden Aktienkurs glattgestellt.

Da im Gleichgewicht Arbitrage nicht möglich ist, gilt daher vor dem Ex-Dividendentermin für einen positiven risikolosen Zinssatz r

$$C_0^N > C_0^A.$$

Eine vorzeitige Ausübung zu jedem früheren Zeitpunkt als unmittelbar vor dem Ex-Dividendentermin ist somit sicher auszuschliessen.

Unter Umständen kann aber auch für Calls auf Aktien mit Dividende eine vorzeitige Ausübung für den gesamten Zeitraum bis zum Fälligkeitstermin ausgeschlossen werden. Unterschreitet nämlich die Dividende einen kritischen Wert, dann ist eine vorzeitige Ausübung nicht einmal kurz vor dem Ex-Dividendentermin optimal. Die kritische Dividende, bei deren Unterschreiten eine vorzeitige Ausübung von Calls auf Aktien mit Dividende niemals optimal ist, beträgt

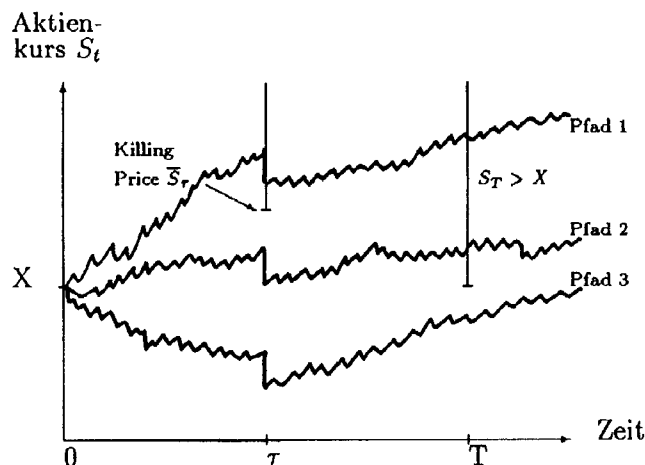
$$\bar{D} = X [1 - (1+r)^{-(T-\tau)}] \approx r(T-\tau)X.$$

Die kritische Dividende \bar{D} kann aus den Vor- und Nachteilen einer vorzeitigen Ausübung unmittelbar vor dem Dividendenabschlag hergeleitet werden: Der Vorteil einer vorzeitigen Ausübung von Calls besteht im Anspruch auf die Dividende, die die zugrundeliegende Aktie zahlt. Auf diese Divi-

dende hat der Callinhaber bei Nichtausübung zu diesem Zeitpunkt keinen Anspruch. Nachteilig wirkt sich dagegen aus, dass der Basispreis bei einer vorzeitigen Ausübung früher zu entrichten ist als bei Ausübung zum Fälligkeitstermin. Dadurch verzichtet der Optionsinhaber auf die Zinsen, die er bei Anlage des Basispreises über die Restlaufzeit verdienen könnte. Diese Zinsen betragen zum Fälligkeitszeitpunkt $X [(1+r)^{T-\tau} - 1]$ und der Barwert davon unmittelbar vor dem Ex-Dividendtag ist $X [1 - (1+r)^{-(T-\tau)}]$. Ist die Dividende (Vorteil der vorzeitigen Ausübung) kleiner als der Barwert der Zinsen auf den Basispreis am Ex-Dividendtag (Vorteil der Nichtausübung), so wird ein rationaler Optionsinhaber sein Recht auf vorzeitige Ausübung nicht wahrnehmen. Die kritische Dividende \bar{D} entspricht genau dem Barwert der Zinsen am Ex-Dividendtag, die der Optionsinhaber erzielen kann, wenn er am Ex-Dividendtag nicht vorzeitig ausübt und statt dessen den Basispreis X für die Restlaufzeit $T - \tau$ zum risikolosen Zinssatz r anlegt. Ist die sichere Dividende D grösser als die kritische Dividende \bar{D} , dann kann eine vorzeitige Ausübung unmittelbar vor dem Ex-Dividendtag optimal sein.

Ob eine vorzeitige Ausübung eines Calls auf eine Aktie mit hinreichend hoher Dividende unmittelbar

Abbildung 1: Optimale Ausübung von Amerikanischen Calls auf Aktien mit Dividende während der Restlaufzeit $D > \bar{D}$.



vor dem Ex-Dividendtag wirklich optimal ist, hängt davon ab, wie tief die Option im Geld ist. Tatsächlich existiert immer ein kritischer Aktienkurs \bar{S}_τ , auch Killing Price genannt, bei dessen Überschreiten unmittelbar vor dem Ex-Dividendtag ein Amerikanischer Call sofort vorzeitig ausgeübt werden sollte. In Abbildung 1 ist dies gleichbedeutend damit, dass der Aktienkurs S_τ die bei τ eingezeichnete Barriere durchdringt.

Beispiel 1:

Zum Stichtag 17.04.1991 soll für den an der DTB gehandelten VW September-360-Call bestimmt werden, ob eine vorzeitige Ausübung optimal sein kann:

nächster Dividentermin der VW AG:	05.07.1991
angekündigte Dividendenhöhe:	11 DM
Fälligkeitstermin der Option:	20.09.1991
risikoloser Zinssatz:	9 % p.a.

Berechnung der kritischen Dividende:

$$T-\tau = (156 - 79 \text{ Tage})/365 \text{ Tage} = 77/365 \text{ Jahre}$$

$$\bar{D} = 360[1 - 1,09^{-77/365}] = 6,49 \text{ DM}$$

Approximativ gilt:

$$\bar{D} \approx 9\% \text{ p.a.} \times \frac{77}{365} \text{ Jahre} \times 360 \text{ DM} = 6,84 \text{ DM}$$

Da die Dividende (DM 11) grösser als die kritische Dividende (DM 6,49) ist, kann eine vorzeitige Ausübung des Calls kurz vor dem Ex-Dividendtag optimal sein.

Folgt der Aktienkurs dem Pfad 1, so ist eine vorzeitige Ausübung optimal. Folgt der Aktienkurs hingegen Pfad 2, so ist eine vorzeitige Ausübung nicht optimal. Allerdings lohnt sich die Ausübung bei Fälligkeit, da der Call dann im Geld ist. Bei einem Aktienkursverlauf gemäss Pfad 3 ist die Ausübung des Calls niemals optimal.

Kann die Optimalität einer vorzeitigen Ausübung eines Calls wegen $D > \bar{D}$ nicht ausgeschlossen werden, dann unterschätzt die BLACK-SCHOLES-Formel den Wert der Option. Eine exaktere Bewertung liefert das ROLL-GESKE-WHALEY-Modell [4]. Dieses Modell hat ausserdem den Vorteil, dass es die Berechnung des kritischen Aktienkurses \bar{S}_t ermöglicht.

Zusammenfassend lässt sich also für Amerikanische Calls feststellen, dass die vorzeitige Ausübung eines Amerikanischen Aktiencalls ausgeschlossen werden kann, wenn die zugrundeliegende Aktie während der Restlaufzeit entweder gar keine Dividende zahlt oder wenn die auszuschüttende Dividende unterhalb einer kritischen Dividende liegt. Ist hingegen die Dividende gross genug, so kann eine vorzeitige Ausübung unmittelbar vor dem Ex-Dividendtag optimal sein. Zu diesem Zeitpunkt ist der Call auszuüben, falls die Option tief genug im Geld liegt.

2. Puts auf Aktien

2.1 Puts auf Aktien ohne Dividende

Im Gegensatz zu Amerikanischen Calls kann bei Amerikanischen Puts auf Aktien ohne Dividende während der Restlaufzeit eine Ausübung jederzeit vor dem Fälligkeitstermin optimal sein. Dies wollen wir ebenfalls wie im letzten Unterabschnitt an einem Extremfall deutlich machen.

Angenommen, auf die Aktien der Konkurs AG werden Amerikanische Puts gehandelt und der Kurs dieser Aktien fällt vor dem Verfalltag der Puts auf Null. Wie soll sich ein Investor verhalten, der solche Puts in seinem Portefeuille hat? Ein rationaler Investor wird Puts der Konkurs AG sicher sofort ausüben. Er liefert eine wertlose Aktie an den Stillhalter und erhält dafür im Gegenzug den vereinbarten Basispreis X . Der Ausübungswert des Puts beträgt also $X - S_0 = X - 0 = X$. Bei jeder späteren Ausübung entgehen dem Putinhaber die Zinsen auf den erhaltenen Basispreis.

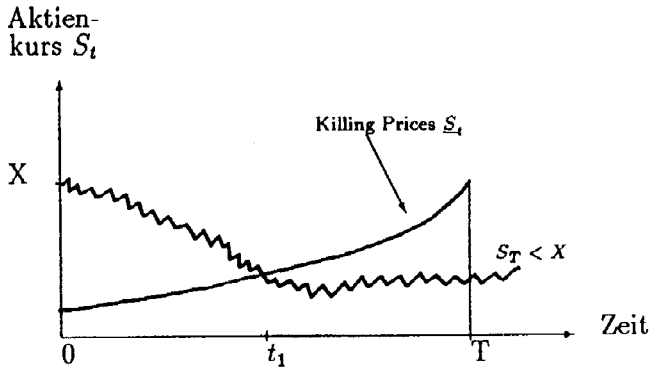
Allgemein gilt für jeden Zeitpunkt während der Restlaufzeit, dass die vorzeitige Ausübung eines Amerikanischen Puts genau dann optimal ist, wenn der Put hinreichend tief im Geld ist. Es existiert also zu jedem Zeitpunkt ein Killing Price \underline{S}_t , bei dessen

Fortsetzung von Beispiel 1:

aktueller Aktienkurs:	369,50 DM
Volatilität [5]:	32,06 % p.a.
Callwert nach BLACK-SCHOLES [6]:	35,68 DM
Callwert nach ROLL-GESKE-WHALEY:	36,16 DM
Killing Price unmittelbar vor dem Ex-D-Tag [7]:	421,64 DM

Da eine vorzeitige Ausübung des Calls kurz vor dem Ex-Dividendtag optimal sein konnte, unterschätzt die Europäische Bewertung nach BLACK-SCHOLES den Wert des Calls. Die Differenz zwischen dem Callwert nach ROLL-GESKE-WHALEY und dem Callwert nach BLACK-SCHOLES ($36,16 - 35,68 = 0,48$ DM) gibt den Wert der vorzeitigen Ausübungsmöglichkeit an. Aus der Sicht des Stichtages ist die vorzeitige Ausübung unmittelbar vor dem Ex-Dividendtag optimal, wenn der Aktienkurs unmittelbar vor dem Ex-Dividendtag über dem Killing Price von 421,64 DM liegen würde.

Abbildung 2: Optimale Ausübung von Amerikanischen Puts auf Aktien ohne Dividende während der Restlaufzeit.



Unterschreiten eine sofortige Ausübung optimal ist (Abbildung 2). Sobald der Aktienkurs von oben die eingezeichnete Linie der Killing Prices durchdringt, sollte der Put sofort vorzeitig ausgeübt werden. Bei dem Aktienkursverlauf in Abbildung 2 ist es also optimal, den Put zu t_1 vorzeitig auszuüben.

Da die vorzeitige Ausübung eines Amerikanischen Puts auf Aktien ohne Dividendenzahlung während der Restlaufzeit also jederzeit optimal sein kann, unterschätzt die BLACK-SCHOLES-Formel zur

Bewertung von Europäischen Puts die Amerikanische Option. Ein exakteres Bewertungsmodell, das auch die Möglichkeit der vorzeitigen Ausübung berücksichtigt und die Bestimmung von \underline{S}_t erlaubt, wird von MACMILLAN (1986) vorgeschlagen. Nach diesem Modell ergibt sich der Wert eines Amerikanischen Puts aus dem Wert eines sonst identischen Europäischen Puts und einer analytischen Näherungslösung für den Wert der vorzeitigen Ausübungsmöglichkeit.

2.2 Puts auf Aktien mit Dividende

Für Amerikanische Puts auf Aktien mit Dividende während der Restlaufzeit gilt, dass eine vorzeitige Ausübung am Ex-Dividendtag und innerhalb eines kritischen Zeitraumes davor nicht optimal ist. Für alle Zeitpunkte t in diesem Intervall ist der Vorteil des Nichtausübens eines Puts (Barwert der Dividende $D (1+r)^{-(T-t)}$) grösser als der Nachteil des Nichtausübens (Verzicht auf den Barwert der Zinsen auf den Basispreis $X [1-(1+r)^{-(T-t)}]$). Im frühesten Zeitpunkt des kritischen Intervalls sind dieser Vor- und Nachteil gleich gross. Daraus kann die

Beispiel 2:

Zum Stichtag 17.04.1991 soll der an der DTB gehandelte VW Juni-360-Put bewertet werden:

aktueller Aktienkurs:	369,50 DM
nächster Dividentermin:	05.07.1991
Volatilität:	32,06 % p.a.
Fälligkeitstag der Option:	21.06.1991
Restlaufzeit:	65 Tage
risikoloser Zinssatz:	9 % p.a.
Putwert nach BLACK-SCHOLES:	12,94 DM
Putwert nach MACMILLAN [8]:	13,27 DM
Killing Price am Stichtag [9]:	299,29 DM

Da die VW Aktie bis zum Verfalltag des Juni-Puts keine Dividende ausschüttet, kann eine Ausübung des Puts jederzeit während der Restlaufzeit optimal sein. Die Europäische Bewertung nach BLACK-SCHOLES unterschätzt daher den Wert des Puts. Die Differenz zwischen dem Putwert nach MACMILLAN und dem Putwert nach BLACK-SCHOLES ($13,27 - 12,94 = 0,33$ DM) gibt den approximativen Wert der vorzeitigen Ausübungsmöglichkeit an. Am Stichtag wäre die vorzeitige Ausübung optimal gewesen, wenn der Aktienkurs unter dem Killing Price von DM 299,29 gelegen hätte.

Länge des kritischen Intervalls s berechnet werden als

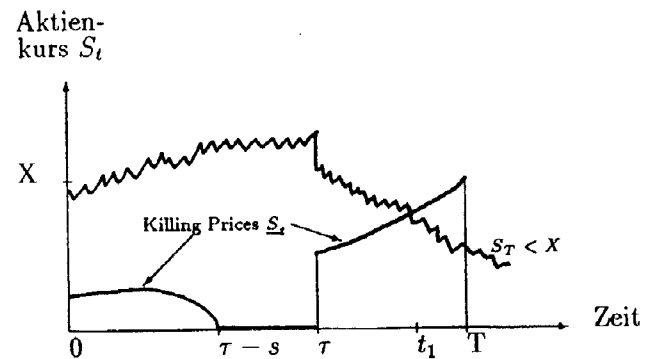
$$s = \frac{\ln\left(1 + \frac{D}{X}\right)}{\ln(1+r)} \approx \frac{D}{r}$$

Somit kann s bei at-the-money-Puts als Quotient aus Dividendenrendite und risikolosem Zinssatz approximiert werden.

Ausserhalb dieses Zeitraumes kann eine vorzeitige Ausübung des Puts optimal sein: Nach dem Ex-Dividendtag handelt es sich ja wiederum um eine Option auf eine Aktie ohne Dividende, deren vorzeitige Ausübung im letzten Unterabschnitt zu keinem Zeitpunkt generell ausgeschlossen werden konnte. Vor dem kritischen Zeitraum kann der Vorteil der vorzeitigen Ausübung den Vorteil des Nichtausübens überschreiten. Die Optimalität der Ausübung hängt in beiden Zeiträumen wiederum vom Killing Price \underline{S}_t ab. In Abbildung 3 ist eine vorzeitige Ausübung zu t_1 optimal, da der Aktienkurs zu diesem Zeitpunkt zum ersten Mal die Linie der Killing Prices durchdringt.

Für eine hinreichend grosse Dividende während der Restlaufzeit eines Puts wird s so gross, dass im gesamten Zeitraum bis zum Ex-Dividendtag eine

Abbildung 3: Optimale Ausübung von Amerikanischen Puts auf Aktien mit Dividende während der Restlaufzeit.



vorzeitige Ausübung eines Amerikanischen Puts ausgeschlossen werden kann. Als kritische Dividende \underline{D} , bei deren Überschreiten eine optimale vorzeitige Ausübung vor dem Dividendenabschlag ausgeschlossen werden kann, ergibt sich

$$\underline{D} = X [(1+r)^\tau - 1] \approx r \tau X.$$

Ganz ausschliessen lässt sich die vorzeitige Ausübung von Amerikanischen Puts nur für den unwahrscheinlichen Fall, dass die Dividende die kritische Dividende übersteigt und der Fälligkeitstermin der Option mit dem Dividendentag der

Beispiel 3:

Zum Stichtag 17.04.1991 soll geprüft werden, ob die Ausübung des VW September-360-Puts vor dem Ex-Dividendtag optimal sein kann:

nächster Dividendentag:	05.07.1991
angekündigte Dividendenhöhe:	11 DM
Fälligkeitstermin der Option:	20.09.1991
risikoloser Zinssatz:	9 % p.a.

Berechnung der kritischen Dividende:

$$\tau = (13 + 31 + 30 + 5 \text{ Tage})/365 \text{ Tage} = 79/365 \text{ Jahre}$$

$$\underline{D} = 360 * (1,09^{79/365} - 1) = 6,78 \text{ DM}$$

Approximativ gilt:

$$\underline{D} \approx 9\% \text{ p.a.} \times (79/365) \text{ Jahre} \times 360 \text{ DM} = 7,01 \text{ DM}$$

Da die Dividende (DM 11) grösser als die kritische Dividende (DM 6,78) ist, kann eine optimale vorzeitige Ausübung zwischen dem Stichtag und dem Ex-Dividendtag ausgeschlossen werden. Die Länge des kritischen Intervalls beträgt $s = 0,3493$ Jahre = 127 Tage. Eine vorzeitige Ausübung ist daher seit dem 01.03.1991 sicher nicht optimal [10].

Fortsetzung von Beispiel 3:

aktueller Aktienkurs:	369,50 DM
Volatilität:	32,06 % p.a.
Putwert nach BLACK-SCHOLES:	23,95 DM
Putwert nach FISCHER:	25,11 DM

Aktie zeitlich zusammenfällt. In allen anderen Fällen wird die BLACK-SCHOLES-Formel Amerikanische Puts deshalb immer unterbewerten. Ein exakteres Bewertungsmodell für Amerikanische Puts wird u.a. von FISCHER (1992) vorgeschlagen.

Zusammenfassend lässt sich für Amerikanische Puts feststellen, dass eine vorzeitige Ausübung bei Puts auf Aktien ohne Dividende während der Restlaufzeit jederzeit optimal sein kann. Ist der Put hinreichend tief im Geld, dann sollte die Option sofort ausgeübt werden. Bei Puts auf Aktien mit Dividende während der Restlaufzeit kann eine optimale vorzeitige Ausübung für einen bestimmten Zeitraum vor dem Ex-Dividendtag ausgeschlossen werden. Ist die Dividende gross genug, dann ist eine optimale vorzeitige Ausübung für den gesamten Zeitraum vor dem Dividentermin auszuschliessen.

3. Zusammenfassende Fallstudie zur vorzeitigen Ausübung von Calls und Puts

Am 08.02.1991 sind folgende Amerikanische Calls und Puts auf Aktien der X-AG erhältlich:

Fälligkeitsmonate der Optionen	Feb.	März	April	Juni
Restlaufzeiten in Tagen	14	35	70	133

Die Basispreise betragen für jeden Fälligkeitstermin jeweils 320, 340, 360, und 380 und es ist eine Dividende in Höhe von 4,50 je Aktie mit einem Ex-Dividendtag in 50 Tagen geplant. Der risikolose Zinssatz beträgt 10 % p.a. Welche Aussagen können bezüglich der vorzeitigen Ausübung dieser Optionen getroffen werden?

Calls:

- Für sämtliche Februar- und März-Calls ist eine vorzeitige Ausübung nicht optimal, da während der Restlaufzeit dieser Calls keine Dividenden anfallen.
- Für April- und Juni-Calls kann eine vorzeitige Ausübung unmittelbar vor dem Dividentermin optimal sein, falls die geplante Dividende gross genug ist:

Berechnung der kritischen Dividenden:

		Basispreis			
Fälligkeitsmonat	320	340	360	380	
April	1,67	1,77	1,88	1,98	
Juni	6,86	7,29	7,72	8,15	

mit

$$T-\tau \text{ für April: } (70-50)/365 = 20/365 \text{ Jahre}$$

$$T-\tau \text{ für Juni: } (133-50)/365 = 83/365 \text{ Jahre}$$

- Für sämtliche April-Calls kann eine vorzeitige Ausübung unmittelbar vor dem Dividentermin optimal sein, da die Dividende (4,50) grösser als die kritische Dividende ist.
- Für sämtliche Juni-Calls ist eine vorzeitige Ausübung sicher nicht optimal, da die Dividende kleiner als die kritische Dividende ist.

Puts:

- Für sämtliche Februar- und März-Puts kann eine vorzeitige Ausübung jederzeit während der Restlaufzeit optimal sein, da bis zum Fälligkeitstermin keine Dividenden anfallen.
- Für die April- und Juni-Puts
 - kann eine vorzeitige Ausübung jederzeit nach dem Ex-Dividendtag optimal sein.
 - kann eine optimale vorzeitige Ausübung für

einen bestimmten Zeitraum der Länge s vor dem Dividendentermin ausgeschlossen werden:

Berechnung der Länge des kritischen Zeitraums s :

Basispreis	320	340	360	380
s in Jahren	0,1465	0,1380	0,1303	0,1235
s in Tagen	53,48	50,35	47,57	45,08

Für die April- und Juni- 380-Puts lässt sich eine optimale vorzeitige Ausübung für den Zeitraum von 45 Tagen vor dem Dividendentermin ausschliessen. Für die April- und Juni- 360-Puts gilt dies für 47 Tage. Für die April- und Juni-Puts mit den Basispreisen 320 und 340 kann eine optimale vorzeitige Ausübung für die gesamte Zeit bis zum Dividendenabschlag ausgeschlossen werden, da $s > \tau$ gilt ($\tau = 50/365$). Dies kann auch mit Hilfe der kritischen Dividende \underline{D} gezeigt werden:

Berechnung der kritischen Dividenden:

Basispreis	320	340	360	380
\underline{D}	4,21	4,47	4,73	4,99

Die Dividende (4,50) überschreitet die kritischen Dividenden für die Basispreise 320 und 340. Dies bestätigt, dass eine optimale vorzeitige Ausübung der entsprechenden April- und Juni-Puts vor dem Dividendentermin ausgeschlossen werden kann.

Fussnoten

- [1] Analytische Lösungen für die Bewertung von Europäischen Optionen wurden bereits 1973 hergeleitet. Siehe BLACK/SCHOLES (1973) und MERTON (1973).
- [2] Abgetrennte Optionsscheine werden wegen der Problematik der Kapitalverwässerung, die mit der Ausübung solcher Optionen verbundenen ist, nicht betrachtet. Siehe dazu FISCHER (1989).
- [3] Ein Callinhaber, der vor dem Verfalltag des Calls eine Aktie beziehen möchte, sollte den Call am Sekundärmarkt verkaufen und eine Aktie über die Börse erwerben.
- [4] Siehe ROLL (1977), GESKE (1979) und WHALEY (1981).
- [5] 30 Tage Volatilität aus dem HANDELSBLATT vom 18.04.1991.
- [6] Mit fiktivem ex-D-Kurs $S_0^{ex} = S_0 - D(1+r)^{-\tau}$.
- [7] Mit dem ROLL-GESKE-WHALEY-Modell ermittelt.
- [8] Die Putwerte und der Killing Price wurden mit Hilfe von Computerprogrammen berechnet, da eine manuelle Berechnung sehr aufwendig ist.
- [9] Mit dem MACMILLAN-Modell ermittelt.
- [10] Da der Handel mit der Option erst am 18.03.1991 aufgenommen wurde, ist eine vorzeitige Ausübung vor dem Ex-Dividendtag rückblickend gesehen nie optimal gewesen.

Literatur

- BLACK, F. und SCHOLES, M. (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy* 81, pp. 637-659.
- FISCHER, E.O. (1989): "Bewertung von Optionen mit aktienkursabhängigem Basispreis", *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung* 41, pp. 227-230.
- FISCHER, E.O. (1992): "Analytic Approximation for the Valuation of American Put Options on Stocks with Known Dividends", erscheint in: *International Review of Economics and Finance*.
- GESKE, R. (1979): "A Note on an Analytic Valuation Formula for Unprotected American Call Options with Known Dividends", *Journal of Financial Economics* 7, pp. 375-380.
- MACMILLAN, L. (1986): "Analytic Approximation for the American Put Option", in: "Advances in Futures and Options Research Vol. 1", Greenwich, Jai Press, pp. 119-139.
- MERTON, R.C. (1973): "The Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, pp. 141-183.
- ROLL, R. (1977): "An Analytic Valuation Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends", *Journal of Financial Economics* 5, pp. 251-258.
- WHALEY, R. (1981): "On the Valuation of American Call Options with Known Dividends", *Journal of Financial Economics* 9, pp. 207-211.