STEPHAN LEITHNER*

Eine Einführung in die präferenzfreie Bewertung zinsabhängiger Finanzinstrumente

1. Einleitung

Im historischen Vergleich überdurchschnittlich hohe Zinsschwankungen in Verbindung mit einer anhaltenden Unsicherheit über die kurz- bis mittelfristige Entwicklung des Zinsniveaus haben in den vergangenen Jahren zur Einführung einer Reihe neuartiger zinsabhängiger Finanzinstrumente geführt. Neben inzwischen traditionellen Instrumenten für das Management von Zinsrisiken, wie Swaps und Zinsfutures, wurden eine breite Palette von kaum standardisierten Produkten, wie Caps, Floors und Swaptions, entwickelt. Bei rasch wachsendem Handelsvolumen entstehen dabei Märkte mit hoher Liquidität, die oftmals jene der herkömmlichen Obligationenmärkte übertreffen. Die wachsende Marktliquidität und ihre vielseitigen Einsatzmöglichkeiten im Risikomanagement haben dazu beigetragen, dass zinsderivative Anlagen auch im traditionellen Portfoliomanagement zunehmend zum Einsatz gelangen. Neben den neuartigen Instrumenten enthalten jedoch auch zahlreiche Standardinstrumente Elemente derivativer Anlagen. Als Beispiel seien die in über achtzig Prozent aller SFr. Anleihen enthaltenen Kündigungsrechte der Emittenten angeführt, bei denen es sich um eine Call-Option auf eine festverzinsliche Anleihe handelt. In Anbetracht des Marktvolumens ist es nicht weiter erstaunlich, dass in der Praxis ein wachsendes Bedürfnis nach einer integrativen Betrachtungsweise von Zinsrisiken über einzelne Produkte hinweg festzustellen ist. Eine konsistente Bewertung aller zinsabhängigen Anlagen bildet hierfür die Grundlage und ermöglicht ein verbessertes Verständnis der Determinanten von Ertrag und Risiko. Allgemein stellen zinsderivative Anlagen Ansprüche auf zukünftige Zahlungen dar, deren Höhe und damit gegenwärtiger Wert, ausschliesslich von gegenwärtigen und zukünftigen Zinssätzen abhängen. Die Konzeption der Fristenstruktur als gemeinsame Risikoquelle aller zinsderivativen Anlagen, hat zu einer engen Verbindung zwischen den einzelnen Teilmärkten geführt und eine aktive Arbitrage zwischen den unterschiedlichen Anlagen bewirkt. Auch in der Finanzmarktforschung hat diese allgemeine Betrachtungsweise zu einer Reihe von Weiterentwicklungen traditioneller Bewertungsmodelle geführt. Grundlage für alle derartigen Modelle bildet die von BLACK/SCHOLES (1973) auf Aktienoptionen angewandte Methodik der arbitragefreien Bewertung einzelner Finanzanlagen. Die meisten der Modelle erklären in diesem Sinne nicht den absoluten Wert einer Anlage in einem gesamtwirtschaftlichen Gleichgewicht, sondern vielmehr den relativen Wert, gegeben ein Spektrum von Preisen anderer zinsabhängiger Instrumente, der Fristenstruktur [1]. Besondere Verbreitung haben die Modelle von HO/LEE (1986), HEATH/JAR-

* Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen eines Forschungsförderungsprojektes der Schweizerischen Kreditanstalt. Ich danke Claudio Loderer, Walter Wasserfallen und Heinz Zimmermann für zahlreiche Kommentare.

ROW/MORTON (1987,1990), JAMSHIDIAN (1987), BLACK/DERMAN/TOY (1990) und HULL/WHITE (1990) gefunden. Im Gegensatz zu allgemeinen Gleichgewichtsansätzen zur Preisbildung zinsderivativer Anlagen (z.B. COX/INGERSOLL/ROSS, 1985) sind die angeführten Modelle frei von Annahmen über die Risikopräferenzen der Anleger. Als Ausgangsinformationen setzen sie nur die beobachtete Fristenstruktur und Volatilitätserwartungen voraus, während gesamtwirtschaftliche Gleichgewichtsmodelle darüberhinaus die Ermittlung der aggregierten Risikopräferenz notwendig machen. Dafür ist jedoch auch das Anwendungsgebiet von präferenzfreien Modellen beschränkt. Während präferenzfreie Bewertungsmodelle ausschliesslich Anlagen bewerten und ein beobachtetes Preissystem auf seine Arbitragefreiheit hin beurteilen können, ermöglichen allgemeine Gleichgewichtsmodelle darüberhinaus Zinsprognosen.
Der vorliegende Artikel gibt eine Einführung in den "Preference Free Pricing Approach" für zinsderivative Instrumente. Das dargestellte Modell entspricht konzeptionell den von HO/LEE (1986) und HEATH/JARROW/MORTON (1990) entwickelten Ansätzen. Im Gegensatz zu den ursprünglichen Darstellungen bewahrt es jedoch die unmittelbare Beziehung zur Kassazinsstruktur, eine insbesondere Praktikern vertraute Formulierung.
Der zweite Abschnitt modelliert das Risiko zinsderivativer Instrumente als Unsicherheit über die zukünftige Entwicklung der Fristenstruktur in einem einfachen Binomialmodell. Der dritte Abschnitt leitet aus den Annahmen über den Zinsprozess das Preisbildungsmodell ab. Die Bewertung unterschiedlicher Anlagen in einem konkreten Zahlenbeispiel im vierten Abschnitt soll dazu beitragen, die theoretischen Ausführung zu veranschaulichen. Der fünfte Abschnitt enthält Hinweise auf Verallgemeinerungen des Modells und auf die empirische Ermittlung der Modell-parameter, und eine Zusammenfassung im sechsten Abschnitt beschliesst die Ausführungen.

2. Die Fristenstruktur der Zinsen als Grundlage für die Bewertung zinsderivativer Anlagen

Wie bereits in der Einleitung dargestellt, bildet die Fristenstruktur der Zinsen die allen zinsabhängigen Instrumenten gemeinsame Grundlage. Unter der Fristenstruktur der Zinsen versteht man dabei eine Übersicht der Renditen auf Verfall von Zero Coupon Anleihen mit unterschiedlicher Restlaufzeit. Alle weiteren Ausführungen basieren auf stetigen, periodisierten (z.B. jährlichen) Renditen auf Verfall, die wie folgt definiert sind:

$$r(t)=-\frac{1}{t}\log[P(t)], \quad \Leftrightarrow \quad P(t)=e^{-tr(t)} \quad \textit{fuer } t\geq 0 \qquad (1)$$

wobei t die Restlaufzeit in Perioden ist und $P(t)$ für den Preis eines Zero Coupon Bonds mit Restlaufzeit t und Nominalwert 1 steht. Theoretisch kann aus (1) für beliebige Restlaufzeiten eine stetige Fristenstruktur ermittelt werden. Da in realen Märkten jedoch nicht für alle Restlaufzeiten Zero Coupon Preise bekannt sind, sei davon ausgegangen, dass zumindest für N Zeitpunkte, die voneinander jeweils gleichen zeitlichen Abstand besitzen, die Renditen auf Verfall bekannt sind. Um die Notation der weiteren Ausführungen zu vereinfachen, sei darüberhinaus angenommen, dass die Länge der Perioden zwischen den N Beobachtungen jeweils 1 Jahr betrage. Abbildung 1 veranschaulicht die Fristenstruktur durch ein Zahlenbeispiel, das in den weiteren Ausführungen als Anhaltspunkt dient.
Wird die gegenwärtige Fristenstruktur als bekannt angenommen, so gilt es für die Bewertung von zinsderivativen Instrumenten in einem ersten Schritt die zukünftige Entwicklung der Fristenstruktur zu modellieren. Hierzu erweist es sich als zweckmässig, die Veränderungen der Fristenstruktur in zwei Komponenten aufzuspalten: Einerseits Veränderungen, die nur auf den Zeitablauf zurückzuführen sind und anderenseits Schwankungen, die ihre Ursache in unerwarteten Einflüssen auf die Fristenstruktur haben.
In einer Welt ohne Risiko wäre der Zeitablauf die einzige Ursache für Veränderungen der Fristenstruk-

Abbildung 1: Kassa- und Terminzinsstruktur in einem Zahlenbeispiel.

Restlaufzeit	Kassazinsen zu Periodenbeginn	Terminzinsen auf Periodenende
1	5.00%	6.00%
2	5.50%	6.65%
3	6.10%	6.80%
4	6.35%	6.90%
5	6.52%	

tur. Befindet sich der Markt für Anleihen im Gleichgewicht und gibt es keine Marktimperfektionen, wie Steuern oder Transaktionskosten, so müssen unter dieser Annahme alle der Fristenstruktur zugrundeliegen den Anleihen, unabhängig von ihrer Restlaufzeit, gleiche Periodenrenditen besitzen. Weicht die Periodenrendite einer Anlage nämlich von der Rendite der Einperiodenanlage ab, ergeben sich Arbitragemöglichkeiten. Durch den Kauf von Anlagen mit über dem Einperiodensatz liegenden Renditen, finanziert durch die Aufnahme eines Einperiodenkredites zum Einperiodenzinssatz würden Gewinnmöglichkeiten entstehen, die annahmegemäss risikolos wären. Alle Marktteilnehmer würden diese Arbitragemöglichkeit wahrnehmen bis sie durch die Anpassung der Preise auf Grund von Angebot und Nachfrage zum Verschwinden gebracht würde. Haben jedoch alle Anlagen im Marktgleichgewicht über den Verlauf einer Periode die gleiche stetige Periodenrendite, so lässt sich einfach zeigen, dass der Zusammenhang zwischen heutiger t-Periodenrendite und der (t-1)-Periodenrendite nach Ablauf einer Periode gegeben ist als [2]:

$$f_1(t-1) = \frac{tr(t) - r(1)}{t-1}, \text{ für } t = 2, 3, \ldots, N \qquad (2)$$

Die dergestalt ermittelte zukünftige Rendite f_1(t-1) wird als Terminsatz für eine (t-1) Periodenanlage auf den Beginn der nächsten Periode bezeichnet. Abbildung 1 berechnet die Fristenstruktur der Terminzinsen nach Ablauf einer Periode auf Grund des bereits angeführten Zahlenbeispiels. In der Praxis bildet die Terminzinsstruktur ein weitverbreitetes Hilfsmittel unter anderem im Rahmen von Zinsvorhersagen und bei der Ermittlung von erwarteten Renditen von Anlagen mit unterschiedlichen Restlaufzeiten. Liegt z.B. die von einem Marktteilnehmer erwartete Fristenstruktur unter der impliziten Terminzinsstruktur, so bedeutet dies über dem Einperiodenzinssatz liegende Renditen für Anlagen mit längeren Restlaufzeiten.

Um nun in einem zweiten Schritt die Entwicklung der Fristenstruktur unter Risiko zu modellieren, erscheint es nach den bisherigen Ausführungen natürlich, Risiko als die Abweichung der am Periodenende tatsächlich beobachtbaren Fristenstruktur von der in (2) ermittelten Fristenstruktur am Periodenende in einer Welt ohne Risiko zu beschreiben. Dabei sei angenommen, dass die wirkliche t-Periodenrendite nach Ablauf einer Periode entweder um α_t über oder um β_t unter dem in (2) beschriebenen Terminsatz liegen kann. Damit ergibt sich ein einfaches Binomialmodell für die Entwicklung der t-Periodenrendite unter Berücksichtigung des Risikos:

Periodenanfang — Periodenende

$$r(t) \;\begin{cases} \nearrow \; r^u(t) = f_1(t) + \alpha_t \\ \searrow \; r^d(t) = f_1(t) - \beta_t \end{cases} \qquad (3)$$

Die eben gemachten Annahmen gelten nun nicht nur für die Rendite mit Restlaufzeit t, sondern es wird für jede andere Restlaufzeit gleichermassen ein Binomialprozess definiert, dessen Parameter α und β sich in der Regel von jenen anderer Restlaufzeiten unterscheiden werden. Es wird jedoch davon ausgegangen, dass die Zinssätze über alle Restlaufzeiten perfekt miteinander korreliert sind [3]. Obgleich sich die α_t und β_t für unterschiedliche Restlaufzeiten unterscheiden, werden somit am Periodenende entweder alle Zinssätze über (f_1 (t) + α_t) oder unter den Terminsätzen liegen (f_1 (t) - β_t). Der Binomialbaum in Gleichung (3) liefert einen konzeptionellen Rahmen für die Entwicklung der Fristenstruktur unter Risiko. In einem nächsten Schritt gilt es, die beiden Parameter α_t und β_t für alle

Restlaufzeiten (t) konkret festzulegen, womit der Zinsprozess spezifiziert wird. Vorraussetzung für die Bestimmung der beiden unbekannten Parameter für jede Restlaufzeit bilden zwei Annahmen: Erstens wird eine Annahme über die Volatilität der Zinssätze, d.h. das Verhältnis der α_t zu den jeweiligen β_t, getroffen. Die zweite Annahme bildet die Arbitragefreiheit zwischen Anlagen mit unterschiedlicher Restlaufzeit bei gegebener anfänglicher Fristenstruktur. Während der verbleibende Teil dieses Abschnittes die Beziehung zwischen α_t und β_t sowie der Zinsvolatilität erläutert, wird der Zusammenhang zwischen α_t und β_t und der Arbitragefreiheit aller Anlagen im dritten Abschnitt erläutert.
Wie für Aktienderivative, z.B. Aktien-Optionen, bildet die Volatilität auch für zinsderivative Anlagen eine wichtige Bestimmungsgrösse. Im Anhang 1 wird gezeigt, dass für den binomialen Zinsprozess in Gleichung (3) ein besonders einfacher Zusammenhang zwischen der Volatilität und den Binomialparametern α_t und β_t besteht:

$$\frac{1}{2}\,(\alpha_t+\beta_t) = \hat{\sigma}_t \tag{4}$$

wobei $\hat{\sigma}_t$ die erwartete Standardabweichung der Veränderung der Zinssätze mit der Restlaufzeit t über die nächste Periode ist.
Grundsätzlich kann in (4) für jede Restlaufzeit eine individuelle Volatilität berücksichtigt werden. Für das weitere Vorgehen sei jedoch angenommen, dass die Volatilität aller Renditen auf Verfall unabhängig von der Restlaufzeit sei. Wird diese mit $\bar{\sigma}$ bezeichnet, vereinfacht sich (4) zu:

$$(\alpha_t+\beta_t) = 2\bar{\sigma} \tag{5}$$

Zusammenfassend hat dieser Abschnitt mit der Beschreibung des Zinsprozesses drei Bausteine für die konsistente Bewertung aller von der Fristenstruktur abhängigen Instrumente geliefert: In einer Welt ohne Risiko stimmen heutiger Terminsatz und zukünftige Rendite auf Verfall überein. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, Risiko durch die Abweichungen der tatsächlichen Sätze von den Terminsätzen zu beschreiben. In einem einfachen Modell können diese Abweichungen durch einen Binomialprozess beschrieben werden, der durch zwei Parameter, α_t und β_t, bestimmt wird. Um diese zwei Parameter für jede Restlaufzeit konkret zu ermitteln, bedarf es zweier Restriktionen. Eine erste Restriktion in Form einer für alle Restlaufzeiten konstanten Volatilität der Renditen auf Verfall, wurde in diesem Abschnitt eingeführt. Die zweite Restriktion, aus der die Arbitragefreiheit der Renditen unter Berücksichtigung der gegenwärtigen Fristenstruktur folgt, wird im nächsten Abschnitt formuliert.

3. Die arbitragefreie Bewertung auf Grund der beobachteten Fristenstruktur

Aufbauend auf den binomialen Zinsprozess des zweiten Abschnittes formuliert dieser Abschnitt notwendige und hinreichende Bedingungen für das Verhältnis zwischen α_t und β_t, damit die resultierenden Preise mit der anfangs beobachteten Fristenstruktur vereinbar sind und zu keiner Arbitragemöglichkeit Anlass geben. Im Unterabschnitt 3.1 wird die Beschreibung der zukünftigen Entwicklung der Zinsen abgeschlossen, während der Unterabschnitt 3.2 zeigt, wie auf Grund der dann bekannten Parameter des Zinsprozesses beliebige zinsderivative Anlagen bewertet werden können.

3.1 Die Arbitragefreiheit der Renditen mit unterschiedlicher Restlaufzeit

Bereits im vorangegangenen Abschnitt wurde das Konzept der Arbitragefreiheit verwendet, um die Verbindung zwischen gegenwärtiger und zukünftiger Fristenstruktur der Zinsen in einer Welt ohne Risiko zu ermitteln. Allgemein versteht man unter Arbitragefreiheit von Preisen, dass alle Anlagen mit gleichem Wert am Ende der Periode auch am Beginn der Periode den gleichen Wert besitzen müssen.

Um die Bedeutung dieser Bedingung im Rahmen der Fristenstruktur und des Binomialmodells zu verstehen, ist es zweckmässig, zwei spezielle, hypothetische Einperiodenanlagen *P1* und *P2* einzuführen. *P1* bezeichne eine Anlage, die dem Käufer am Ende einer Periode eine Zahlung von einer Geldeinheit sichert, sofern der Einperiodenzinssatz im Binomialmodell $f_1(1) + \alpha_1$ beträgt. Beträgt der Einperiodenzinssatz jedoch $f_1(1) - \beta_1$, so verfällt die Anlage *P1* wertlos, ähnlich einer Einperioden-Calloption. Würde die Anlage *P1* gehandelt, so könnte ihr Preis am Beginn der Periode als π_1 beobachtet werden. Die Anlage *P2* bilde das Spiegelbild zur Anlage *P1*, indem ihr Wert am Periodenende 1 beträgt, sofern die Zinsen unter den Terminsätzen liegen und sie wertlos verfällt, sofern der Fall $f_1(t) + \alpha_t$ eintritt. Wie *P1* würde auch *P2* einen Marktpreis besitzen, der mit π_2 bezeichnet sei.
Ohne die Höhe von π_1 und π_2 zu kennen, ist es nun möglich, auf Grund von Arbitrageüberlegungen eine Aussage über das Verhältnis zwischen den beiden Preisen zu machen. Indem eine Einheit von jeder Anlage gekauft wird, steht nämlich mit Gewissheit fest, dass der Wert dieses Portfolios am Ende der Periode den Wert 1 aufweist. Dies entspricht dem Wert einer Einperiodenanlage bei Fälligkeit. Um Arbitragegewinne durch den Kauf/Verkauf von *P1* und *P2* auszuschliessen, ist es aus diesem Grund notwendig, dass auch zu Beginn der Periode der Wert des Portfolios aus *P1* und *P2* mit dem Preis der Einperiodenanlage übereinstimmt. Der Preis einer Einperiodenanlage ist jedoch auf Grund der aktuellen Fristenstruktur und Gleichung (1) bekannt:

$$\boldsymbol{P(1) = e^{-r(1)}} \qquad (6)$$

womit auf Grund der Arbitragefreiheit für die Preise π_1 und π_2 gelten muss [4]:

$$\pi_1 + \pi_2 = e^{-r(1)} \qquad (7)$$

Die Kenntnis der Fristenstruktur und der Preis der Anlage *P1* reichen daher im Gleichgewicht aus, um den Wert der Anlage *P2* zu ermitteln. Wenn mit π der Terminkurs der Anlage *P1*, $\pi_1 e^{+r(1)}$, bezeichnet wird, so kann (7) umformuliert werden, und π_1, π_2, in allen weiteren Ausführungen durch

$$\pi_1 = \pi e^{-r(1)}, \quad \pi_2 = (1-\pi) e^{-r(1)} \qquad (8)$$

ersetzt werden.
Wie aus *P1* und *P2* ein Portfolio gebildet werden konnte, dessen Wert am Ende der Periode dem Wert einer risikolosen Anlage entspricht, so kann durch die Kombination von *P1* und *P2* auch jede andere zinsabhängige Anlage repliziert werden. Als Beispiel diene eine Zero Coupon Anleihe mit der Restlaufzeit *t* am Beginn der Periode. Aus (1) und der beobachteten Fristenstruktur am Beginn der Periode, sowie dem Binomialmodell in (3) ist bekannt, dass im Fall von über dem Terminsatz liegenden Zinsen am Periodenende der Wert des Zero Coupon Bonds

$$P^u(t-1) = e^{-r^u(t-1)*[t-1]} = e^{-[f_1(t-1)+\alpha_{t-1}]*[t-1]} \qquad (9)$$

beträgt, und bei fallenden Zinsen

$$P^d(t-1) = e^{-r^d(t-1)*[t-1]} = e^{-[f_1(t-1)-\beta_{t-1}]*[t-1]} \qquad (10)$$

Analog zu den Überlegungen für die Einperiodenanlage werde nun wieder ein Portfolio aus den Anlagen *P1* und *P2* gebildet, in dem $P^u(t\text{-}1)$ Einheiten der Anlage *P1* und $P^d(t\text{-}1)$ Einheiten der Anlage *P2* gekauft werden. Das Porfolio wird unabhängig von der Fristenstruktur am Ende der Periode immer dem Wert der Anleihe am Periodenende entsprechen. Da der heutige Wert der *t*-Perioden Zero Coupon Anleihe gleich wie jener der Einperiodenanlage in (8) jedoch aus der gegenwärtigen Fristenstruktur bekannt ist, lässt sich eine Arbitragebeziehung ableiten:

$$P(t) = e^{-r(t)*t} \quad = \quad \pi_1 P^u(t-1) + \pi_2 P^d(t-1) \qquad (11)$$

Ersetzt man den Terminsatz in (9) und (10) durch (2), substituiert die Preise $P^u(t\text{-}1)$ und $P^d(t\text{-}1)$ aus

(9) und (10) in (11) und berücksichtigt man die Beziehung zwischen π_1 und π_2 sowie dem Terminkurs der Anlage *P1* aus (8), so lässt sich nach Umformung und Vereinfachung die Bedingung für die Arbitragefreiheit in (11) wie folgt formulieren:

$$1 = \pi e^{-\alpha_{t-1}*[t-1]} + (1-\pi)e^{+\beta_{t-1}*[t-1]} \qquad (12)$$

Da (12) am Beginn einer jeden Periode für jede Restlaufzeit $t > 1$ gelten muss, handelt es sich um eine allgemeine Beziehung zwischen den Parametern α_t, β_t des Binomialprozesses im zweiten Abschnitt und dem Preis der Anlage *P1* (π), die im Gleichgewicht gelten muss. Aufgrund der Annahmen des zweiten Abschnittes war es nicht möglich, α_t und β_t konkret festzulegen, wohl aber konnte eine Beziehung zwischen der Volatilität der Zinsen und den beiden Parametern hergestellt werden. Wird der (Termin)-preis der Anlage *P1*, π, in (12) als bekannt vorausgesetzt, so liefert (12) die notwendige zweite Information, an Hand derer es nun möglich ist, die beiden Parameter α_t und β_t für jede Restlaufzeit zu ermitteln. Durch die Umformung von (5)

$$\beta_t = 2\bar{\sigma} - \alpha_t \qquad (5‘)$$

und durch das Verschieben von (12) um eine Periode, kann α_t aus (5‘) und (12) als Funktion von $\bar{\sigma}$ und π bestimmt werden:

$$\alpha_t = \frac{1}{t}\log\left[\pi + (1-\pi)e^{2\bar{\sigma}t}\right] \qquad (13)$$

für alle $t \geq 1$.

Zusammenfassend spezifizieren (5‘) und (13) den Binomialprozess der Zinsen für alle Restlaufzeiten. Der dergestalt festgelegte Zinsprozess ist sowohl mit der im zweiten Abschnitt formulierten Annahme über die Volatilitäten vereinbar als auch mit einer arbitragefreien Entwicklung der Fristenstruktur im Zeitablauf ausgehend von der gegenwärtig beobachtbaren Fristenstruktur.

Die bisherigen Ausführungen haben gezeigt, wie am Beginn einer Periode ein arbitragefreier Binomialprozess für alle Renditen auf Verfall über eine Periode bestimmt werden kann. Grundsätzlich übertragen sich die angeführten Überlegungen analog auf eine Reihe aufeinanderfolgender Perioden und der nach (13) und (5‘) festgelegte Zinsprozess wird weiterhin arbitragefrei sein, auch wenn $\bar{\sigma}$ und π sich im Zeitablauf oder mit der Zinsstruktur verändern [5]. Wiederum im Sinne einer vereinfachenden Annahme, deren Bedeutung im fünften Abschnitt näher ausgeführt wird, sei jedoch für die weiteren Darstellungen angenommen, dass $\bar{\sigma}$ und π konstant sind. Für jede Periode ermitteln sich die beiden möglichen Fristenstrukturen am Ende der Periode somit aus den Renditen auf Verfall zu Beginn der Periode, der damit verbundenen Terminstruktur und den Parametern α_t und β_t.

3.2 Die Bewertung zinsderivativer Anlagen im Binomialmodell

Die für die Herleitung des arbitragefreien Zinsprozesses eingesetzte Methodik der Replikation eines Finanzinstrumentes durch ein Portfolio aus den Anlagen *P1* und *P2* wird in diesem Unterabschnitt verallgemeinert und auf die Bewertung beliebiger zinsderivativer Anlagen angewandt.

Grundlage für die Replikation einer Anlage bildet die Kenntnis ihres Wertes bei ihrer Fälligkeit. Für eine Zero-Coupon Anleihe entspricht dieser Wert einfach dem Nennwert der Anlage. Für kompliziertere Anlagen hängt der Wert bei Fälligkeit von der Fristenstruktur zum Fälligkeitszeitpunkt der Anlage ab. Z.B. hängt der Wert einer Call-Option auf eine 6 Monatseinlage am Verfalltag vom 6 Monatszinssatz zu diesem Zeitpunkt ab.

Wird mit *s* die Periode bezeichnet, in der die zu bewertende Anlage fällig ist, so können in einem ersten Schritt auf Grund der gegenwärtigen Fristenstruktur und dem aus (3), (5‘) und (13) bekannten Zinsprozess alle möglichen Fristenstrukturen in der Periode *s* ermittelt werden. In jedem Endpunkt kann sodann der Wert der Anlage berechnet werden [6]. Um den Wert der Anlage für jeden Knoten im Binomialbaum zur Periode (*s*-1) zu ermitteln, kann nun jeweils, wie im Falle einer Zero Coupon Anleihe im vorangegangenen Abschnitt, ein replizierendes Portfolio aus *P1* und *P2* gebildet werden. Beträgt der Wert der Anlage an zwei benachbarten Endpunkten in der Periode *s* C_s^u und C_s^d, werden Anlagen *P1* und *P2* in den Mengen C_s^u und C_s^d zu Beginn der Periode $(s\text{-}1)$ erworben. Bei Fälligkeit der Anlage entspricht der Wert dieses Portfolios sowohl bei über als auch bei unter den Terminzinsen liegenden Zinssätzen dem Wert der Anlage. Auf Grund der bereits bekannten Arbitrageüberlegungen müssen somit auch zum Zeitpunkt $(s\text{-}1)$ der Porfoliowert und der Anlagepreis identisch sein. Der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt $(s\text{-}1)$ beträgt daher:

$$C_{s-1} = \pi_1 C_s^u + \pi_2 C_s^d = e^{-r_{s-1}(1)}\left[\pi C_s^u + (1-\pi) C_s^d\right] \tag{14}$$

wobei $r_{s-1}(1)$ wie in (7) der Einperiodenzinssatz über den Zeitraum von $(s\text{-}1)$ bis s ist. Der Wert einer Anlage zu Beginn einer Periode entspricht somit dem Barwert eines gewichteten Durchschnittes der möglichen Anlagenwerte am Ende der Periode (C^u_s, C^d_s). Die Gewichtungsfaktoren für die beiden Periodenendwerte, π und $(1\text{-}\pi)$, entsprechen dem Wert einer Zahlung von einer Geldeinheit im jeweiligen Ast des Binomialbaumes.
Wie bei der Bewertung von Aktienoptionen im Binomialmodell, wird somit auch der Preis zinsderivative Anlagen durch eine rekursive Bewertung über einzelne Perioden von der Fälligkeit bis zur Gegenwart ermittelt. Einige konkrete Anwendungsbeispiele sollen dieses Vorgehen im nächsten Abschnitt verdeutlichen.

4. Ein Anwendungsbeispiel

Aufbauend auf die Fristenstruktur aus Abbildung 1 wird in diesem Abschnitt das Bewertungsmodell in ein konkretes Zahlenbeispiel umgesetzt. In einem ersten Schritt wird hierzu von der gegenwärtigen Fristenstruktur ausgehend der Binomialbaum der Fristenstrukturen aufgebaut. Dieser dient in der Folge der Bewertung verschiedener zinsderivativer Anlagen: einer kündbaren Couponanleihe und einer Swaption. Die Swaption wird eingesetzt um das Kündigungsrisiko der kündbaren Couponanleihe abzusichern und synthetisch eine gesamtfällige Anleihe herzustellen. Abschliessend wird gezeigt, wie das gleiche Ergebnis durch eine dynamische Strategie unter Verwendung der kündbaren Anleihe und eines Kredites in der risikolosen Anlage erzielt werden kann.

4.1 Die Bestimmung des Binomialbaumes der Fristenstrukturen

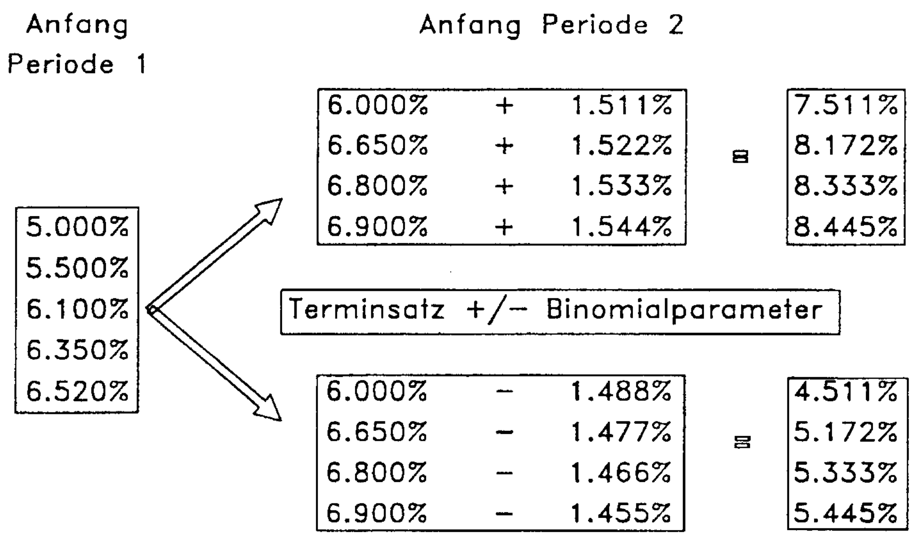
Neben der aus Abbildung 1 bereits bekannten Fristenstruktur bedarf es als weiterer Ausgangsinformationen der Zinsvolatilität und des Parameters π. Im Beispiel werden π mit 0.5 und $\bar{\sigma}$ mit 1.5% angenommen. Die Zinsvolatilität entspricht ungefähr der historischen Volatilität von 1 Jahres Zinssätzen in Schweizer Franken. Wie im fünften Abschnitt erläutert wird, kann π für praktische Anwendungen beliebig festgelegt werden, sofern die Periodenlänge sehr kurz gewählt wird. Obgleich die Periodenlänge von einem Jahr im Beispiel dieses Kriterium sicherlich nicht erfüllt, entspricht π=0.5 damit dem auch in der Praxis gewählten Parameterwert. Abbildung 2 berechnet für jede Restlaufzeit aus (5') und (13) die Binomialparameter.
Z.B. ergibt sich $\alpha_1=\log[0.5+(1-0.5)*e^{2*1.5\%}]=1.511\%$ und $\beta_1=2*1.5\%-1.511\%=1.488\%$.

Abbildung 2: Parameter des Binomialprozesses.

Restlaufzeit	α_t	β_t
1	1.511%	1.488%
2	1.522%	1.477%
3	1.533%	1.466%
4	1.544%	1.455%

Annahmen:
$\pi = 0.5$
$\sigma = 1.50\%$

Abbildung 3: Fristenstrukturen nach einer Periode (gerundete Zahlenwerte).



Auf Grund der Annahme, dass $\bar{\sigma}$ und π im Zeitablauf konstant sind, folgt darüberhinaus, dass die α_t und β_t aus Abbildung 2 nicht nur während der ersten Periode Anwendung finden, sondern dass sie in allen fünf Perioden unverändert bleiben.

Mittels der Binomialparameter in Abbildung 2 sowie der bereits im zweiten Abschnitt bestimmten Terminsätze auf das Ende der ersten Periode können in Abbildung 3 nun unmittelbar die beiden möglichen Fristenstrukturen am Ende der ersten Periode ermittelt werden. Eine Prozedur, die sich Periode für Periode in die Zukunft fortsetzt, bis nach Ablauf von 5 Perioden alle Informationen aus der anfänglichen Fristenstruktur erschöpft sind. Abbildung 4 setzt die Berechnungen exemplarisch für die zweite Periode fort. Grundsätzlich nimmt damit nach jeder Periode die Anzahl der möglichen Fristenstrukturen um den Faktor 2 zu. Unter der Modellannahme einer für alle Renditen auf Verfall mit unterschiedlicher Restlaufzeiten gleichen Standardabweichung der Zinsveränderungen zeigt es sich jedoch, dass die Fristenstruktur nach einem Zinsanstieg gefolgt von einer Zinsabnahme mit jener übereinstimmt, die sich aus einer Zinsabnahme in der ersten Periode und einem Zinsanstieg in der folgenden Periode ergibt. Diese Eigenschaft des Zinsprozesses im vorliegenden einfachen Modell wird als Pfadunabhängigkeit bezeichnet und liefert einen geschlossenen Binomialbaum. Ein geschlossener Binomialbaum erleichtert die Konstruktion des Binomialprozesses, da nach dem Ablauf von s Perioden nur $(s+1)$ und nicht 2^s mögliche Fristenstrukturen vorliegen [7]. Abbildung 4 veranschaulicht den Zusammenhang und Abbildung 5 gibt den gesamten Binomialbaum der Zinsen wieder,

Abbildung 4: Geschlossener Binomialbaum nach zwei Perioden.

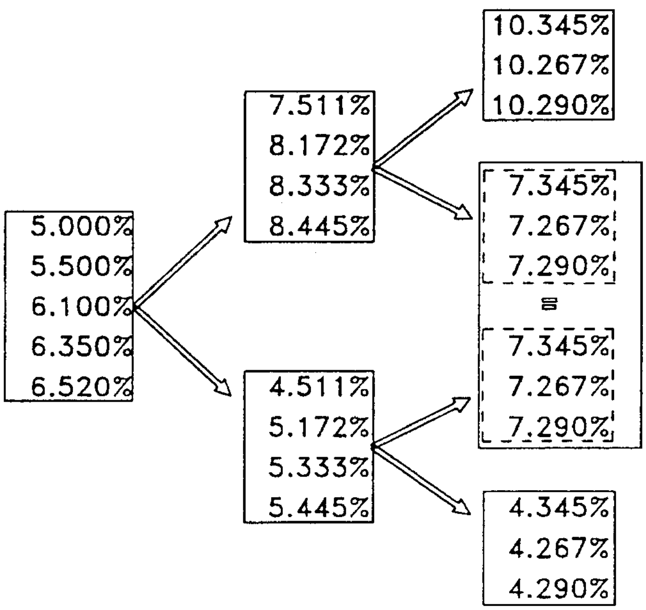
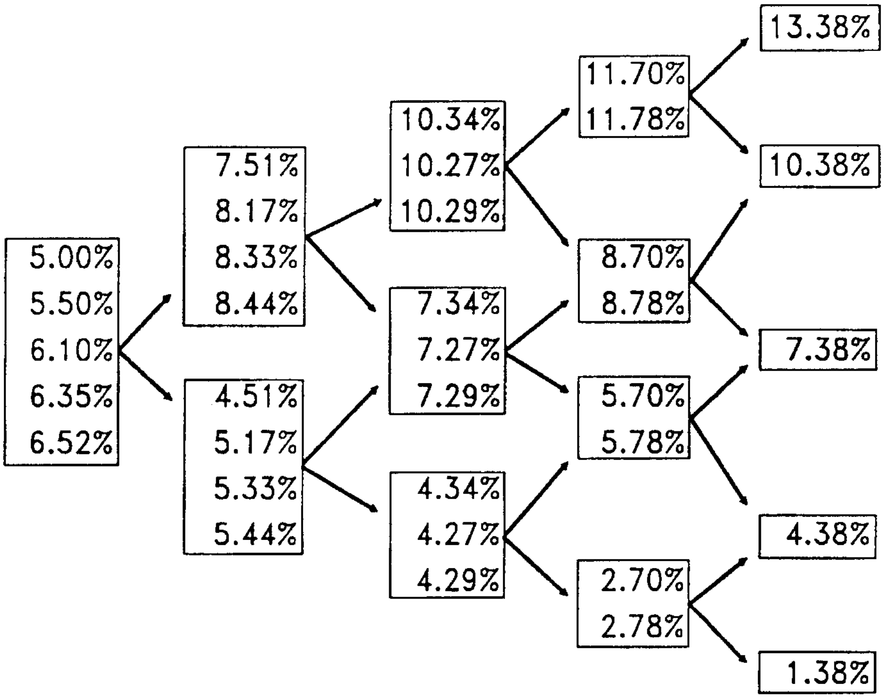


Abbildung 5: Binomialprozess über fünf Perioden.



womit die Grundlage für die Bewertung beliebiger zinsderivativer Anlagen gegeben ist.

4.2 Bewertung einer kündbaren Anleihe

Eine besonders einfach zu bewertende Anlage im vorliegenden Modell bildet eine gesamtfällige Couponanleihe ohne Kreditrisiko. Gesamtfällige Anlagen können nämlich, wie alle Anlagen die nur von der aktuellen Fristenstruktur abhängen, direkt aus der aktuellen Fristenstruktur bewertet werden. Um dies für den Fall einer 5 Jahresanleihe mit einem Coupon von 6.5% im Zahlenbeispiel zu zeigen, wird der Anleihenwert als der Barwert aller Coupons und des Schuldbetrages berechnet:

$6.50 * e^{-r(1)}$	=	6.18
$6.50 * e^{-2r(2)}$	=	5.82
$6.50 * e^{-3r(3)}$	=	5.41
$6.50 * e^{-4r(4)}$	=	5.05
$106.50 * e^{-5r(5)}$	=	76.87
Gesamtwert	=	99.33

Anders verhält es sich für den Fall einer durch den Emittenten kündbaren Anleihe. Auf Grund der Unsicherheit über die zukünftige Kündigungspolitik des Schuldners, sind die Zahlungsströme der kündbaren Anleihe zum gegenwärtigen Zeitpunkt nicht mit Sicherheit bekannt. Zum Kündigungszeitpunkt wird ein rational handelnder Schuldner die Anleihe immer dann vorzeitig zurückzahlen, sofern sich ihm am Markt eine günstigere Refinanzierungsmöglichkeit bietet. Um dies zu beurteilen, kann er zum Kündigungszeitpunkt den Kündigungspreis der Anleihe mit dem Marktwert einer identischen, jedoch unkündbaren Anleihe vergleichen. In der Optionsterminologie besitzt der Schuldner eine Call-(Bond) Option.
Um den Zusammenhang zu verdeutlichen, soll die bereits angeführte Anleihe unter der Annahme bewertet werden, dass sie zu Beginn der dritten Periode zu einem Ex-Coupon Preis von 100.- kündbar ist. Um die Methodik der schrittweisen, rekursiven Bewertung auf Grund von Gleichung (14) im Binomialmodell anwenden zu können, bedarf es neben der im vorangegangenen Unterabschnitt

Abbildung 6a: Ex-Couponpreise einer Anleihe mit Kündigungsklausel.

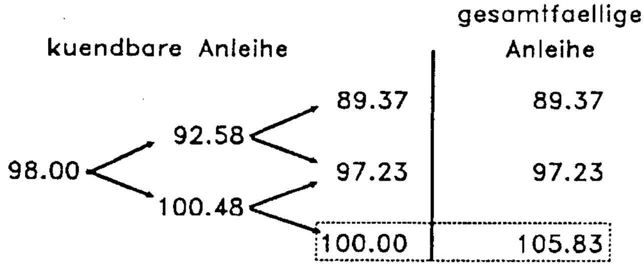
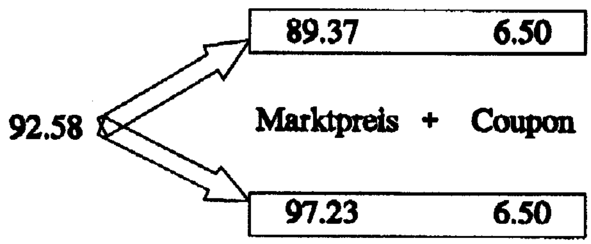


Abbildung 6b: Rekursive Bewertung einer kündbaren Couponanleihe.



$$\mathbf{92.58 = e^{-0.0751}\{0.5 * 95.87 + (1 - 0.5) * 103.73\}}$$

ermittelten Einperiodenzinssätze in allen Knoten des Binomialbaumes (vgl. Abbildung 5), des Wertes der Anlage zum Kündigungszeitpunkt unter allen zu diesem Zeitpunkt möglichen Fristenstrukturen. Gegeben die Fristenstrukturen in den Knoten zu Beginn der dritten Periode (Abbildung 5) kann diese Berechnung direkt durch Abzinsung der Coupons aus der vierten und fünften Periode und der Abzinsung des Nominalbetrages erfolgen. Die Ergebnisse finden sich in Abbildung 6a in der Spalte "gesamtfällige Anleihe". Um nun das Kündigungsrecht zu berücksichtigen wird immer dann, wenn der Marktwert in der dritten Periode über dem Ausübungspreis liegt, der Marktwert durch den Ausübungspreis ersetzt. Dies entspricht der beschriebenen Kündigungspolitik eines rational handelnden Schuldners. Die dergestalt ermittelten Preise im Kündigungszeitpunkt bilden die Ausgangsgrössen für die Anwendung der rekursiven Bewertung. Abbildung 6 führt die Berechnungen in Gleichung (14) exemplarisch für einen Teilbaum durch (Abbildung 6b) und gibt den Wert der Anleihe (Ex-Coupon Preise) in allen Knoten des Binomialbaumes an (Abbildung 6a). Aus der Differenz zwischen den Preisen der gesamtfälligen fünfperioden Anleihe und der kündbaren Anleihe (99.33 und 98.00) kann dann direkt der Wert der Kündigungsklausel ermittelt werden, der im vorliegenden Fall 1.33 beträgt.

4.3 Absicherung des Kündigungsrisikos durch eine Swaption

Eine Möglichkeit für den Besitzer der soeben bewerteten kündbaren Anleihe sich gegen die Kündigung zu Beginn der dritten Periode und das damit verbundene Wiederanlagerisiko abzusichern, besteht im Erwerb einer Swaption. Eine europäische Receiver-Swaption gibt dem Erwerber das Recht, bei Fälligkeit der Swaption einen Swap in Anspruch zu nehmen, in dem er feste Zinszahlungen erhält und variable Zinszahlungen leistet. Konkret kann das Kündigungsrisiko im Falle der 5 Jahresobligation durch eine Swaption mit einer Restlaufzeit von 2 Jahren auf einen 3 Jahresswap mit einem fixen Coupon von 6.5% perfekt abgesichert werden.
Um die Swaption zu bewerten wird in einem ersten Schritt wiederum der Wert des zugrundeliegenden Swaps in allen Binomialknoten am Verfalltermin der Swaption ermittelt. Auf Grund der Fristenstrukturen in Abbildung 5 berechnet sich z.B. der Wert des Swaps im untersten Knoten des Binomialbaumes zu Beginn der dritten Periode wie folgt:

variable Zinszahlungen:	$-100 * (1-e^{-3*4.29\%})$	=	-12.07
fixe Zinszahlungen:	$+6.5 * e^{-3*4.29\%}$	=	5.71
	$+6.5 * e^{-2*4.27\%}$	=	5.97
	$+6.5 * e^{-1*4.34\%}$	=	6.22
Swapwert			5.83

Abbildung 7: Bewertung einer Receiver-Swaption auf einen 3 Jahresswap mit einem Coupon von 6.5%.

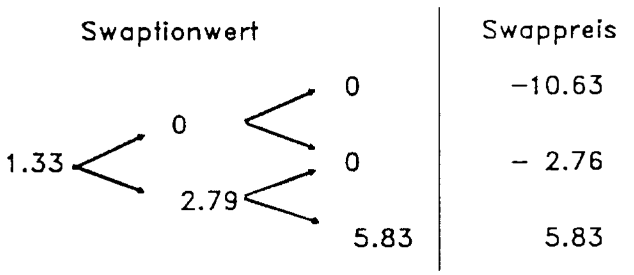


Abbildung 7 gibt den Wert des Swaps für alle drei möglichen Fristenstrukturen zu Beginn der dritten Periode an. Nur im Falle besonders tiefer Zinsen und einem damit verbundenen positiven Wert des Swaps wird der Inhaber der Swaption von seinem Recht Gebrauch machen und den 6.5% Swap in Anspruch nehmen. Die Berechnungen für den Wert der Swaption in der zweiten und in der ersten Periode entsprechen wiederum der bereits dargestellten rekursiven Vorgehensweise auf Grund von Gleichung (14). Der Wert der Swaption von 1.33 entspricht dem Wert der Kündigungsklausel aus den vorangegangenen Berechnungen für eine kündbare 6.5% Couponanleihe und auch in allen Knoten in der zweiten und in der dritten Periode entspricht die Summe aus Swaptionwert und dem Preis der kündbaren Anleihe dem jeweiligen Wert der gesamtfälligen Anleihe. Das resultierende Portfolio aus kündbarer Anleihe und Swaption entspricht somit einer synthetischen gesamtfälligen Anleihe.

4.4 Dynamische Absicherung des Kündigungsrisikos

Nicht immer ist die Absicherung des Kündigungsrisikos durch eine Swaption das geeignete Vorgehen. Zum Beispiel kann eine nicht perfekte Korrelation zwischen Obligationenpreisen und den, der Swaption zugrundeliegenden Swapsätzen zu einem Basisrisiko bei der Absicherung mittels einer Swaption führen. Unter diesen Umständen bildet eine dynamische Strategie zur Absicherung des Kündigungsrisikos eine Alternative. Dabei wird ein Porfolio von zinsderivativen Anlagen im Zeitablauf laufend angepasst, so dass der Portfoliowert und der Wert der zu replizierenden Anlage jeweils übereinstimmen. Ausgangspunkt für die Bestimmung einer dynamischen Strategie bildet die Kenntnis der mit einer Zinsveränderung verbundenen Preisveränderungen der einzelnen Anlagen. In der Regel wird dabei in einem ersten Schritt auf eine lineare Approximation der Zinsabhängigkeit der Preise abgestellt. Die Duration von Obligationen bildet eine derartige Masszahl, die jedoch für zinsderivative Anlagen mit Optionscharakteristika ungeeignet ist, als die genaue Höhe der zukünftigen Zahlungen zum gegenwärtigen Zeitpunkt nicht mit Sicherheit feststeht. Eine einfache Alternative bildet das von Aktienoptionen her bekannte Delta einer Anlage. Im vorliegenden Binomialmodell kann das Delta mittels der Anlagewerte in den beiden Ästen eines jeden Teilbaumes und den damit verbundenen Veränderungen des Einperiodenzinssatzes approximiert werden. Zum Beispiel berechnet sich das aktuelle Binomial-Delta der kündbaren Anleihe wie folgt:

$$\Delta = \frac{92.58 - 100.48}{8.44\% - 5.44\%} = -2.63$$

Die beiden Preise am Ende der ersten Periode (92.58 und 100.48) können aus Abbildung 6a entnommen werden, und die Einperioden-Zinssätze (8.44 und 5.44) entsprechen den beiden möglichen Einperioden-Zinssätzen am Ende der ersten Periode auf Grund von Abbildung 5. Abbildung 8a gibt für die kündbare und die gesamtfällige Anlage die aktuellen Deltas und die Deltas zu Beginn der zweiten Periode in jedem der beiden möglichen Knoten des Binomialbaumes an. Die Deltas in jedem Knoten zu Beginn der zweiten Periode basieren auf den vom jeweiligen Knoten aus erreichbaren Preisen zu Beginn der dritten Periode. Das Delta der gesamtfälligen Anleihe liegt dabei immer über demjenigen der kündbaren Anleihe. Die Anwendung

Abbildung 8a: Binomiale Bonddeltas.

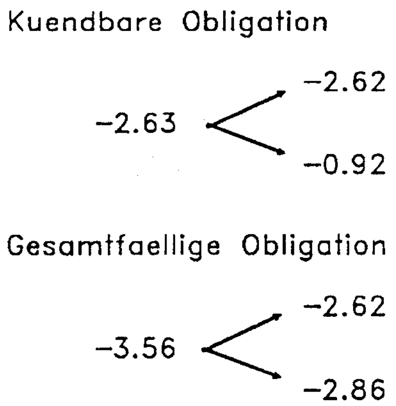
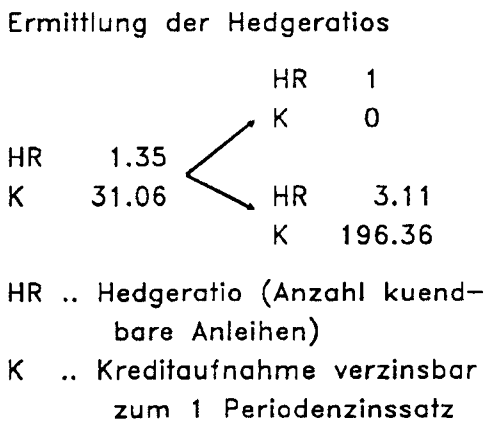


Abbildung 8b: Dynamische Replikation der gesamtfälligen Kouponanleihe.



der Duration der entsprechenden gesamtfälligen Anleihe für kündbare Anleihen, wie es in der Praxis häufig anzutreffen ist, überschätzt in diesem Sinne die Preisvolatilität der kündbaren Obligation.
Um nun das Kündigungsrisiko bis zur dritten Periode durch eine dynamische Strategie abzusichern, kann z.B. ein Porfolio aus der kündbaren Anleihe und einem Kredit in der risikolosen Anlage gebildet werden, das exakt eine gesamtfällige Anlage repliziert. Die hierfür notwendigen Mengen der kündbaren Obligation werden als Hedgeratio bezeichnet und müssen zu Beginn einer jeden Periode neu berechnet werden, um dem Zeitablauf und der Veränderung der Fristenstruktur Rechnung zu tragen. Konkret berechnet sich die Hedgeratio als der Quotient der beiden Deltas von gesamtfälliger und kündbarer Anleihe. Für die erste Periode berechnet sich die Hedgeratio in Abbildung 8b wie folgt:

$$HR_1 = \frac{\Delta_1^{gesamtfällig}}{\Delta_1^{kündbar}} = \frac{-3.56}{-2.63} = 1.35$$

Die Höhe des Kredites in der Einperiodenanlage ermittelt sich als der Barwert der Differenz zwischen dem Wert einer gesamtfälligen Anleihe und dem Wert der kündbaren Anleihen im Hedgeportfolio am Periodenende:

$$\begin{aligned} K_1 &= e^{-r_1} * \left[P^d_{gesamtfällig} - HR_1 P^d_{kündbar}\right] \\ &= e^{-5.00\%} * [103.27 - 1.35 * 100.48] \\ &= -31.06 \end{aligned}$$

Abbildung 8b gibt für alle Äste im Binomialbaum über die ersten beiden Perioden die Hedgeratios und die notwendigen Kredite in der jeweiligen Einperiodenanlage an, und wie sich leicht nachprüfen lässt, entspricht der Wert des replizierenden Portfolios in allen Ästen dem Wert der gesamtfälligen Anleihe. Insbesondere ist die Replikation nach der ersten Periode selbstfinanzierend, weil zwar Portfolioumschichtungen notwendig sind, der Portfoliowert jedoch ohne Mittelzu- oder Abflüsse dem Wert der Anleihe entspricht.
Anstelle der kündbaren Anleihe und dem Kredit in der risikolosen Anlage hätte das Kündigungsrisiko durch ein Portfolio aus zwei beliebigen anderen zinsderivativen Anlagen abgesichert werden können. Für praktische Anwendungen in denen aus Transaktionskostenüberlegungen das Hedgeportfolio nicht in jeder Periode angepasst wird, ist es dabei zweckmässig, neben der linearen Approximation der Wertveränderung durch das Delta auch die Konvexität der Anlagenpreise zu berücksichtigen. Grundsätzlich können jedoch auf Grund der dargestellten Methodik für alle zinsderivativen

Anlagen der Wert und die Höhe des Zinsrisikos ermittelt werden: Caps, Floors, Futures und Optionen auf Futures seien als weitere Beispiele angeführt [8].

5. Ermittlung der Modellparameter und die Bedeutung alternativer Zinsprozesse

Als letztes Hinderniss vor einer praktischen Umsetzung des dargestellten Modells bleibt die empirische Ermittlung der notwendigen Ausgangsinformationen. Drei Grössen bilden die Vorraussetzung für die Anwendung des Binomialmodells: der Parameter π, die gegenwärtig beobachtete Fristenstruktur der Zinsen und die Zinsvolatilität.
Die Preise der Anlagen $P1$ und $P2$, mittels derer π ins Modell eingeführt wurde, können selbstverständlich in realen Märkten nicht beobachtet werden. HEATH/JARROW/MORTON (1990) zeigen nun aber, dass der Parameter π im Modell keine Rolle spielt, sofern der verwendete Binomialbaum eine gute Annäherung für die, dem Modell zugrundeliegende Normalverteilung der Zinssätze bildet. Konkret erweist es sich daher als am zweckmässigsten, π=0.5 zu setzen und gleichzeitig die Periodenzahl zu erhöhen. Z.B. durch die Verwendung von täglichen Intervallen, um eine Option auf einen Zinsfuture zu bewerten, die eine Restlaufzeit von einem Monat besitzt.
Die gegenwärtige Fristenstruktur der Zinsen bildet im Modell die Basisgrösse, wie der Aktienkurs die Grundlage für die Bewertung von Aktienoptionen darstellt. Eine Reihe von Verfahren werden in der Literatur vorgeschlagen, um die Fristenstruktur der Zinsen aus Obligationenpreisen zu ermitteln [9]. Da die Aussagekraft der Bewertungergebnisse jedoch davon abhängt, in welchem Ausmass die zugrundeliegenden Arbitrageüberlegungen über die Basisinstrumente umgesetzt werden können, kommt der Liquidität der zugrundeliegenden Fristenstruktur besondere Bedeutung zu. Im Schweizerfranken-Bereich bietet es sich aus diesem Grunde an, die Fristenstruktur aus der Fristenstruktur der Swappreise abzuleiten. Obgleich Swaps nicht frei von Kreditrisiko sind, handelt es sich bei Swaps gegenwärtig um den liquidsten Teilmarkt im überjährigen Schweizerfranken-Zinsbereich.
Als einzige nicht direkt beobachtbare Ausgangsinformation des Modells bleibt die erwartete Zinsvolatilität $\bar{\sigma}$ zu ermitteln. In Analogie zu Bewertungsmodellen für Aktienoptionen bieten sich zwei Alternativen für die Bestimmung der Zinsvolatilitäten an: Aus historischen Zinsvolatilitäten oder aus impliziten Volatilitäten, die z.B. aus Marktpreisen von Caps ermittelt werden können.

Abbildung 9: Volatilitäten der Veränderungen von Zinssätzen mit unterschiedlicher Restlaufzeit. (Für Erläuterungen vgl. den Text).

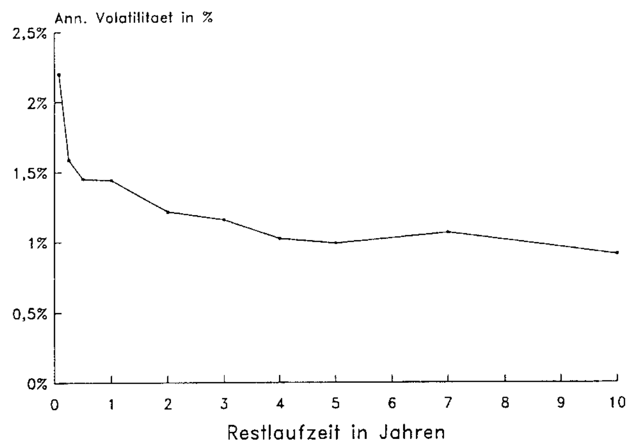


Abbildung 9 [10] stellt die historische Volatilität der Veränderungen der Renditen auf Verfall für unterschiedliche Restlaufzeiten dar. Dabei handelt es sich um annualisierte Standardabweichungen der wöchentlichen Veränderungen von aus Schweizerfranken Zinsswaps berechneten Fristenstrukturen. Im Gegensatz zur Modellannahme einer konstanten Volatilität zeigt sich, dass empirische Zinsvolatilitäten mit zunehmender Restlaufzeit abnehmen. Da dieser Zusammenhang für Zinsvolatilitäten typisch ist [11], stellt sich die Frage nach einer Modifikation des bisherigen Modelles. Konzeptionell korrekt gilt es eine mit der Restlaufzeit abnehmende Zinsvolatilität unmittelbar in der Gleichung (4) zu berücksichtigen, die die Volatilitäten für die Bestimmung der Binomialparameter ins Modell einführt. In (5') und (13) müssten in der Folge die α_t und β_t für jede Restlaufzeit auf Grund der empirisch ermittelten Volatilitäten an Stelle der durchschnittlichen Volatilität berechnet werden. Obgleich diese Veränderungen theoretisch unproblematisch sind, wird der resultierende Binomialbaum für ein konstantes π unter (5') und (13) nicht mehr geschlossen sein. RITCHKEN/SANKARASUBRAMANIAN (1990) zeigen, wie es möglich ist, durch eine Veränderung des Parameters π in jeder Periode doch einen geschlossenen Binomialbaum zu erhalten. Indem die mit einem sich ändernden π notwendigen Berechnungen nach s Perioden die Lösung von Polynomen s-ten Grades notwendig machen, ersetzt dieses Vorgehen aber nur die grössere Anzahl von Berechnungen eines nicht geschlossenen Binomialbaumes durch kompliziertere Berechnungen, für die in der Regel numerische Lösungsverfahren eingesetzt werden müssen.

Die eben angeführten Modifikationen bilden einen ersten Schritt in einer Verbesserung des dargestellten, einfachen Modelles aus den ersten Abschnitten. In praktischen Anwendungen störender als die Annahme einer konstanten Zinsvolatilität für unterschiedliche Restlaufzeiten ist das Auftreten negativer Zinssätze im Modell. Verlängert man den untersten Ast im Zahlenbeispiel des vorangegangenen Abschnittes (Abbildung 5) gedanklich um einige Perioden, so ist sofort erkenntlich, dass die Zinssätze negative Werte annehmen werden. Eine befriedigende Lösung hierfür verlangt, dass die Zinsvolatilität neben der Restlaufzeit auch von der Höhe des Zinsniveaus abhängt. Eine Reihe von Modellen basieren auf Zinsprozessen, die ausschliesslich positive Zinssätze zulassen und auf Grund derer die Volatilität der Renditen auf Verfall für längere Restlaufzeiten abnimmt: z.B. HEATH/JARROW/MORTON (1987), BLACK/DERMAN/TOY (1990) und HULL/WHITE (1990). Eine besonders einfache und elegante mathematische Darstellungweise für derartige kompliziertere Zinsprozesse bilden stochastische Differentialgleichungen in stetiger Zeit. Die bisher dargestellte Bewertungsmethodik bleibt dabei grundsätzlich erhalten, der Binomialbaum wird jedoch je nach Zinsprozess und zu bewertender Anlage durch andere Approximationen des (stetigen) Zinsprozesses oder, wenn möglich, durch analytische Lösungen ersetzt.

Explizite Bewertungformeln sind bisher nur für Zinsprozesse unter denen auch negative Zinssätze möglich sind und europäische Optionen bekannt. JAMSHIDIAN (1989) zeigt, dass unter dem stetigen Pendant zum Zinsprozess aus dem zweiten Abschnitt die Black/Scholes Bewertunggleichung auch für Optionen auf Diskontanleihen gilt und JAMSHIDIAN/ZHU (1990) verdeutlichen, wie es unter dem gleichen Zinsprozess möglich ist, Optionen auf Couponbonds analytisch zu bewerten. TURNBULL/MILNE (1991) liefern für eine Vielzahl von (europäischen) Instrumenten Bewertungsformeln, die zwar ebenfalls auf dem Zinsprozess aus dem zweiten Abschnitt basieren, im Gegensatz zu Jamshidian jedoch eine für längere Restlaufzeiten abnehmende Volatilität der Zinssätze berücksichtigen. Für amerikanische Optionen und realitätsnähere Zinsprozesse muss jedoch weiterhin auf Approximationsverfahren zurückgegriffen werden. HULL (1989, Kapitel 9) gibt einen Überblick zu den unterschiedlichen Approximationstechniken.

Zusammenfassend hat dieser Abschnitt Möglichkeiten für die konkrete Ermittlung der Ausgangsinformationen des Modells aufgezeigt. Gleichzeitig hat er aber auch die Grenzen des einfachen Modells aus den ersten Abschnitten abgesteckt und Hinweise für Modelle mit realitätsnäheren Zinsprozessen gegeben. Allgemein eignen sich derartige komplexere Modelle nicht für die Darstellung in einem einfachen Binomialbaum und die Berechnungen erfolgen in der Regel durch Verfahren, die eine effizientere Approximation des zugrundeliegenden stetigen Zinsprozesses liefern als der Binomialprozess.

6. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit hat eine Einführung in die präferenzfreie Bewertung zinsderivativer Finanzanlagen gegeben. An Hand eines einfachen Binomialmodelles wurde dargestellt, wie ausgehend von der gegenwärtigen Fristenstruktur aus Annahmen über die Arbitragefreiheit der Märkte und die Volatilität der Zinssätze beliebige Finanzanlagen bewertet werden können. Die angewandte Methodik der rekursiven Bewertung einer Anlage von ihrer Fälligkeit bis zur Gegenwart entspricht der auch bei Aktienderivativen angewandten Vorgehensweise. Die Bewertung auf Grund von Arbitrageüberlegungen gibt zudem insofern einen Hinweis auf das adäquate Risikomanagement von zinsderivativen Finanzanlagen, als sie für jede Anlage die Konstruktion eines Replikationsportfolios (Hedgeportfolios) ermöglicht.

Anhang 1: Zinsvolatilität im Binomialprozess

Unter der Annahme eines Binomialprozesses der Renditen auf Verfall mit Restlaufzeit t, berechnet sich die Volatilität der Zinsveränderungen wie folgt:

$$\sigma=\sqrt{Var[\Delta r(t)]} \tag{A1.1}$$

wobei $\Delta r(t)$ die Veränderung der Zinsen bezeichnet und $Var[\Delta r(t)]$ definiert ist als $E[(\Delta r(t) - E(\Delta r(t))^2]$. Ist p die Wahrscheinlichkeit, dass $r(t)$ am Ende der Periode $f_1(t) + \alpha_t$ beträgt und $(1\text{-}p)$ die Wahrscheinlichkeit, dass $r(t)$ auf $f_1(t) - \beta_t$ fällt, so ergeben sich der Erwartungswert und die Varianz der Zinsveränderungen als:

$$E(\Delta r(t)) = f_1(t) + p\alpha_t - (1-p)\beta_t - r(t) \tag{A1.2}$$

$$Var(\Delta r(t)) = (1-p)p(\alpha_t + \beta_t)^2 \tag{A1.3}$$

Weil α_t und β_t im zweiten Abschnitt noch nicht bestimmt sind, kann p festgelegt werden. Naheliegend ist ein symetrisches p=0.5; damit ergibt sich die Volatilität aus (A1.1) und (A1.3):

$$\hat{\sigma}_t = \frac{1}{2}(\alpha_t + \beta_t) \tag{A1.4}$$

Fussnoten

[1] Ausnahmen von derartigen partiellen Gleichgewichtsmodellen bilden die auf der Grundlage von MERTON (1973) und COX/INGERSOLL/ROSS (1985) entwikkelten allgemeinen Gleichgewichtsmodelle. Neben dem Kapitalmarkt beschreiben diese Modelle auch die Beziehung zu den zugrundeliegenden Gütermärkten und sind damit in der Lage, den absoluten Wert von Kapitalanlagen zu bestimmen.

[2] Die stetige Rendite einer Anlage über eine Periode ist definiert als: $R(1)=\log[F_1(t\text{-}1)]-\log[P_0(t)]$, wobei $F_1(t-1)$ den Preis der t-Perioden Anlage nach dem Ablauf einer Periode bezeichnet. Unter Verwendung von (1) entspricht dies: $R(1) = -(t-1)f_1(t-1) + tr(t)$. Im Marktgleichgewicht in einer Welt ohne Risiko gilt $R(1)=r(1)$, woraus durch umformen (2) folgt.

[3] Es handelt sich somit um ein Einfaktormodell. HEATH/JARROW/MORTON (1990) schlagen z. B. ein Zweifaktormodell vor. Wieviele Faktoren notwendig sind, um die zukünftige Entwicklung der Fristenstruktur adäquat zu beschreiben, ist eine empirische Frage. Auf die Bewertungsmethodik hat die Anzahl der Faktoren keinen Einfluss.

[4] Dem mit Optionsmärkten vertrauten Leser mag es an dieser Stelle helfen, die Beziehung zwischen *P1*, *P2*

und der Einperiodenanlage als Put/Call Parität zu verstehen.

[5] Für einen formalen Beweis, wonach ein Mehrperiodenmodell dann und nur dann arbitragefrei ist, wenn jede einzelne Periode arbitragefrei ist, vergleiche HARRISON/KREPS (1979).

[6] Hängt der Wert der Anlage nicht nur von der Fristenstruktur bei der Fälligkeit ab, sondern auch von der Zinsentwicklung während der Laufzeit des Instrumentes, spricht man von pfadabhängigen Instrumenten. Grundsätzlich können solche Instrumente mittels des dargestellten Modelles bewertet werden, jedoch ist es notwendig, für jeden möglichen Pfad einen eigenen Ast im Binomialbaum zu ermitteln.

[7] Obgleich sich nur für einfache Zinsprozesse ein geschlossener Binomialbaum ergibt, können auch komplexere Zinsprozesse durch geschlossene Binomialbäume approximiert werden. Vgl. NELSON/RAMASWAMY (1990).

[8] Detaillierte Beispiele zur Bewertung einzelner dieser Instrumente in Binomialmodellen finden sich in ZIMMERMANN (1991). Die dort angebenen Zahlungsströme bei Fälligkeit können analog übernommen werden. Für den speziellen Fall pfadabhängiger Instrumente vgl. Fussnote [5].

[9] KAERKI/AUBRY (1990) geben einen Ueberblick zur Literatur und eine Anwendung auf den schweizerischen Kapitalmarkt.

[10] Bei der Abbildung handelt es sich um annualisierte Standardabweichungen der Veränderungen von Zinssätzen mit unterschiedlicher Restlaufzeit. Als Grundlage dienen aus 1, 3, 6 und 12 Monatszinssätzen sowie Swappreisen berechnete wöchentliche Fristenstrukturen über den Zeitraum 6/88 bis 6/90. Die Daten wurden freundlicherweise von der Schweizerischen Kreditanstalt, Zürich, der Schweizerischen Bankgesellschaft, Zürich und Intercapital Brokers, London zur Verfügung gestellt.

[11] Der zugrundeliegende Zinsprozess wird als "mean reverting" bezeichnet: Ausgeprägt hohe und ausgeprägt tiefe Zinssätze sind unter dieser Annahme weniger wahrscheinlich, als unter dem bisher beschriebenen Zinsprozess mit konstanter Zinsvolatilität für alle Restlaufzeiten. Der Grund für diese Eigenschaft liegt in den negativen Autokorrelationen der Zinsveränderungen.

Literaturverzeichnis

BLACK, F., E. DERMAN, W. TOY (1990): "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Applications to Treasury Bond Options", Financial Analysts Journal, January/February 1990, pp. 33-39.

BLACK, F. and M. SCHOLES (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy 81, pp. 637-654.

COX, J., J. INGERSOLL and S. ROSS (1985): "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", Econometrica 53, pp. 363-384.

HARRISON, J.M. and D. KREPS (1979): "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", Journal of Economic Theory 20, pp. 381-413.

HEATH, D., R. JARROW and A. MORTON (1987): "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Calaims Valuation", Mimeo, Cornell University.

HEATH, D., R. JARROW and A. MORTON (1990): "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation", Journal of Financial Economics 18, 4.

HO, T. and S.B. LEE (1986): "Term Structure Movements and Pricing Interest Contingent Claims", Journal of Finance 41, pp. 1011-1029.

HULL, J. (1989): "Options, Futures, and other Derivative Securities", London: Prentice-Hall International.

HULL, J. and A. WHITE (1990): "Pricing Interest-Rate-Derivative Securities", The Review of Financial Studies 3, 4, pp. 573-592.

JAMSHIDIAN, F. (1987): "Pricing of Contingent Claims in the One-Factor Term Structure Model", Mimeo, Merrill Lynch Capital Markets.

JAMSHIDIAN, F. (1989): "An Exact Bond Option Formula", Journal of Finance 44, pp. 205-209.

JAMSHIDIAN, F. and Y. Zhu (1990): "Replication of an Option on a Bond Portfolio", The Review of Futures Markets 9, 1, pp. 84-100.

KAERKI, J. and O. AUBRY (1990): "Term Structure of Interest Rates and Bond Valuation", Credit Suisse Investment Research, Basic Report.

MERTON, R. (1973): "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model", Econometrica 41, pp. 867-887.

NELSON, D. and K. RAMASWAMY (1990): "Simple Binomial Processes as Diffusion Approximations in Financial Models", The Review of Financial Studies 3, 3, pp. 393-430.

RITCHKEN, P. and L. SANKARASUBRAMANIAN (1990): "On Valuing Complex Interest Rate Claims", The Journal of Futures Markets 10, 5, pp. 443-455.

TURNBULL, S.M. and F. MILNE (1991): "A Simple Approach to Interest Rate Option Pricing", The Review of Financial Studies 4, 1, pp.87-120.

ZIMMERMANN, H. (1991): "Binomial Pricing of Interest Contingent Assets", Zeitschrift für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, erscheint demnächst.